

**KTr-1.35**

**GS.TS. LÊU THỌ TRÌNH  
TS. ĐỖ VĂN BÌNH**

# **CƠ HỌC CÔNG TRÌNH**

**NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ





**THƯ VIỆN  
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



GS.TS. LÊU THỌ TRÌNH - TS. ĐỖ VĂN BÌNH

# CƠ HỌC CÔNG TRÌNH

DÀNH CHO CÁC NGÀNH  
KIẾN TRÚC - VẬT LIỆU XÂY DỰNG - KỸ THUẬT MÔI TRƯỜNG



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG







## LỜI TỰA

*Cơ học công trình là một phân kiến thức cơ sở đối với kỹ sư thuộc các ngành có liên quan đến kỹ thuật xây dựng. Môn học được bố trí trong chương trình đào tạo của các trường đại học và cao đẳng có các chuyên ngành: Kiến trúc; Vật liệu xây dựng; Kỹ thuật môi trường.*

*Cơ học công trình là môn học kết hợp của ba môn học: Cơ học cơ sở (phần Tĩnh học), các bài toán cơ bản của Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu. Cơ học công trình trang bị cho sinh viên, kỹ sư, và cán bộ kỹ thuật những kiến thức cần thiết để kiểm tra độ bền, độ cứng, độ ổn định của các công trình được chế tạo từ các thanh và hệ thanh biến dạng, chịu tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài là tải trọng.*

*Để đáp ứng yêu cầu học tập, sách biên soạn các nội dung cơ bản nhằm phục vụ thiết thực cho các sinh viên đại học thuộc các chuyên ngành: Kiến trúc; Vật liệu xây dựng; Kỹ thuật môi trường. Ngoài phần trình bày các nội dung lý thuyết, trong mỗi chương cũng giới thiệu một số bài tập chọn lọc kèm theo các đáp án.*

*Chúng tôi chân thành cảm ơn sự quan tâm và những ý kiến đóng góp của bạn đọc cùng các đồng nghiệp.*

*Mọi đóng góp xin gửi về Phòng Biên tập sách Khoa học kỹ thuật, Nhà xuất bản Xây dựng, 37 Lê Đại Hành, Hà Nội, ĐT: 04.39741954.*

**Tác giả**



**THƯ VIỆN  
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

# MỞ ĐẦU

## 1. ĐỐI TƯỢNG CỦA MÔN HỌC CƠ HỌC CÔNG TRÌNH

Cơ học công trình là môn học cơ sở trình bày các phương pháp nghiên cứu đối tượng là các kết cấu dưới dạng vật rắn theo hướng kỹ thuật. Vật rắn đề cập trong Cơ học công trình bao gồm:

\* **Vật rắn tuyệt đối** – một cơ hệ đặc biệt, trong đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của vật thể luôn không đổi. Vật rắn tuyệt đối là đối tượng nghiên cứu của Cơ học cơ sở.

\* **Vật rắn biến dạng** – một cơ hệ, trong đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của vật thể có khả năng thay đổi khi chịu tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài. Vật rắn biến dạng là đối tượng nghiên cứu của các môn học Cơ học vật rắn biến dạng như: Lý thuyết đàn hồi, Lý thuyết dẻo, Sức bền Vật liệu, Cơ học kết cấu...

Về hình dạng, đối tượng nghiên cứu của Cơ học vật rắn biến dạng thường có các dạng sau:

◆ **Thanh** – vật thể có một kích thước lớn hơn nhiều so với hai kích thước còn lại. Thanh được gọi là *thanh thẳng* khi trục thanh là đường thẳng (ví dụ: dầm cầu; cột nhà...). Thanh được gọi là *thanh cong* khi trục thanh là đường cong (ví dụ: vòm, móc cầu...).

◆ **Tấm, vỏ** – vật thể có hai kích thước lớn hơn nhiều so với kích thước thứ ba. Tấm hoặc vỏ có hai mặt đối diện với kích thước lớn gọi là hai mặt bên. Mặt trung gian của tấm hoặc vỏ là mặt cách đều hai mặt bên. Nếu mặt trung gian là mặt phẳng thì gọi là tấm (ví dụ: sàn nhà bê tông). Nếu mặt trung gian là mặt cong thì gọi là vỏ (ví dụ: mái vòm).

◆ **Khối** – vật thể có ba kích thước với độ lớn xấp xỉ như nhau.

Trong tài liệu này chỉ giới hạn nghiên cứu các thanh và hệ thanh.

## 2. NGOẠI LỰC

Ngoại lực là một tác nhân tác động trên công trình, thể hiện dưới dạng *tải trọng và phản lực*.



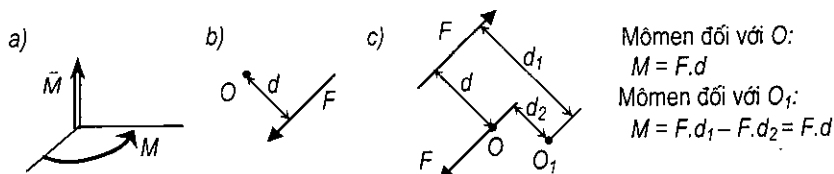
**2.1. Tải trọng:** Tải trọng là ngoại lực *chủ động* tác động trên công trình, thường được thể hiện dưới các dạng sau [1]:

\* *Lực tập trung*, được mô tả bằng vectơ  $\vec{F}$ : *góc* của vectơ biểu thị điểm đặt của lực; *hướng* (phương và chiều) của vectơ biểu thị hướng của lực; *độ dài* của vectơ biểu thị cường độ hay trị số của lực; *giá* của vectơ biểu thị đường tác dụng của lực. Trong hệ đơn vị SI, đơn vị đo cơ bản của lực là  $N$  (Newton).

\* *Mômen tập trung và ngẫu lực:*

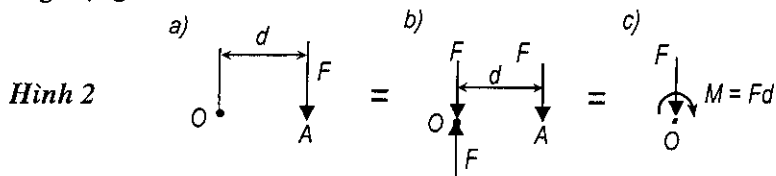
• *Mômen tập trung* mô tả mômen của lực đối với một điểm là điểm đặt của mômen tập trung được biểu thị bằng đường tên cong như trên hình 1a hoặc bằng vectơ mômen  $\vec{M}$  với đường tên hai nét, có phương vuông góc với mặt tác dụng của mômen tập trung, có chiều là chiều tiến của cái mở nút chai khi quay nó theo chiều của mômen tập trung. Mômen của lực  $\vec{F}$  đặt tại điểm  $A$  đối với điểm  $O$  là mômen nằm trong mặt phẳng  $OA$  có giá trị bằng tích của cường độ lực  $F$  với cánh tay đòn  $d$  của lực  $\vec{F}$  đối với điểm  $O$  (hình 1b).

• *Ngẫu lực* là một cặp gồm hai lực có giá trị bằng nhau, ngược chiều nằm trên hai đường tác dụng song song không trùng nhau. Mômen của ngẫu lực đối với một điểm cũng được xác định và biểu thị như trường hợp mômen tập trung. Mômen của ngẫu lực như nhau đối với một điểm bất kỳ trong mặt phẳng của ngẫu lực (trên hình 1c minh họa điều này khi tìm mômen của ngẫu lực đối với điểm  $O$  và  $O_1$ ).



**Hình 1**

\* *Định lý chuyển lực song song.* Khi chuyển song song lực  $\vec{F}$  tác dụng trên vật rắn tuyệt đối từ điểm  $A$  đến điểm  $O$  thì tác dụng của lực không thay đổi nếu thêm vào một mômen bằng mômen của lực đặt tại  $A$  đối với điểm  $O$ . Để minh họa điều nêu trên, trên hình 2 trình bày cách chuyển trạng thái chịu lực a) sang trạng thái chịu lực c).



**Hình 2**

Đối với *hệ lực* là tập hợp của  $n$  lực  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  tác động trên vật rắn tuyệt đối, khi áp dụng định lý chuyển lực song song để quy đổi hệ lực về điểm  $O$  bất kỳ ta sẽ được:

- Tổng hình học của các lực quy tụ ở điểm  $O$  là  $\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ , được gọi là *vector chính* của hệ lực. Vector chính là một bất biến.

- Tổng mômen của các lực thành phần đối với cùng điểm  $O$  là  $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ , được gọi là *mômen chính* của hệ lực. Mômen chính thay đổi theo điểm lấy mômen. Giữa các mômen chính đối với điểm  $O$  và điểm  $O'$ , ta có liên hệ:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{OO'} \times \vec{R}'$$

\* *Lực phân bố*, bao gồm các dạng sau:

- *Lực thể tích*: phân bố trong toàn bộ thể tích của vật thể, ví dụ trọng lượng bản thân của vật thể. Lực thể tích được biểu thị theo cường độ là trọng lượng trên đơn vị thể tích với đơn vị thường dùng là  $\text{N/cm}^3$  hay  $\text{kN/m}^3$ . Thường gặp trong các bài toán về khối.

- *Lực bề mặt*: phân bố trên diện tích một phần bề mặt của vật thể. Lực bề mặt được biểu thị theo cường độ là giá trị của lực trên đơn vị diện tích với đơn vị thường dùng là  $\text{N/cm}^2$  hay  $\text{kN/m}^2$ . Thường gặp trong các bài toán về tấm, vỏ.

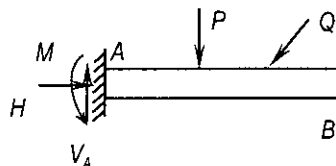
- *Lực phân bố theo chiều dài*, được biểu thị theo cường độ là giá trị của lực trên đơn vị chiều dài với đơn vị thường dùng là  $\text{N/cm}$  hay  $\text{kN/m}$ . Thường gặp trong các bài toán về thanh.

\* *Mômen phân bố*, bao gồm các dạng sau:

- *Mômen phân bố theo bề mặt*: phân bố trên diện tích một phần bề mặt của vật thể. Mômen phân bố theo bề mặt được biểu thị bằng cường độ là giá trị của mômen trên đơn vị diện tích với đơn vị thường dùng là  $\text{N.cm/cm}^2$  hay  $\text{kN.m/m}^2$ . Thường gặp trong các bài toán về tấm, vỏ.

- *Mômen phân bố theo chiều dài*, được biểu thị theo cường độ là giá trị của mômen trên đơn vị chiều dài với đơn vị thường dùng là  $\text{N.cm/cm}$  hay  $\text{kN.m/m}$ . Thường gặp trong các bài toán về thanh.

**2.2. Phản lực:** Trong thực tế, các vật thể có thể bị ràng buộc với nhau hoặc ràng buộc với Trái đất bằng các liên kết. Ví dụ, thanh  $AB$  được nối với Trái đất tại  $A$  bằng liên kết ngàm như trên hình 3, liên kết ngàm không cho phép tiết diện  $A$  xoay cũng như chuyển dịch tịnh tiến nên trong ngàm sẽ phát sinh các thành phần phản lực: mômen  $M$ , lực ngang  $H$  và lực đứng  $V$  (xem chi tiết về liên kết và phản lực trong chương 1). Phản lực là ngoại lực *bị động* phát sinh trong các liên kết khi công trình chịu tải trọng.



Hình 3

Khi nghiên cứu ngoại lực ta *được phép xem vật thể là cứng tuyệt đối* nên có thể áp dụng các tiên đề của Tĩnh học như sau [1]:

- 1) Điều kiện cân và đủ để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực đó phải trực đối (cùng đường tác dụng, ngược chiều, có giá trị bằng nhau).
- 2) Tác dụng của một hệ lực trên vật rắn không đổi nếu thêm hoặc bớt hai lực cân bằng.

Từ tiên đề này ta dễ dàng suy ra phép biến đổi tương đương: Tác dụng của lực không đổi khi trượt lực đó trên đường tác dụng của lực.

- 3) Hai lực đặt tại cùng một điểm tương đương với một lực đặt tại cùng điểm đó và được xác định bằng đường chéo hình bình hành vẽ theo hai lực đã cho (Quy tắc hình bình hành lực).

Ngược lại, có thể phân tích một lực đặt tại một điểm  $A$  thành hai lực đồng quy đặt tại  $A$  theo quy tắc hình bình hành lực

- 4) Các lực do hai vật rắn tác dụng lên nhau có cùng đường tác dụng, ngược chiều và có trị số bằng nhau (Nguyên lý tác dụng và phản tác dụng).
- 5) Vật rắn có liên kết được xem là vật rắn tự do cân bằng nếu thay tác dụng của liên kết bằng phản lực liên kết tương ứng.

Để tìm các lực chưa biết, ta vận dụng các điều kiện cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu trên một số trục hoặc tổng mômen đối với một số điểm, hoặc một số trục, cụ thể như sau:

#### Trường hợp hệ lực không gian:

\* Nếu các lực đặt vào hệ là hệ lực đồng quy tại điểm  $O$  thì thường sử dụng các phương trình hình chiếu lên ba trục  $X, Y, Z$ :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$



$X, Y, Z$  là ba trục bất kỳ trong không gian miễn là không song song hoặc cùng đồng phẳng.

\* Nếu các lực đặt vào hệ là *hệ lực bất kỳ*, ta có thể sử dụng một trong các dạng điều kiện sau:

1) Ba phương trình hình chiếu lên ba trục  $X, Y, Z$  và ba phương trình mômen đối với ba trục  $x, y, z$  :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

$X, Y, Z$  là ba trục bất kỳ trong không gian miễn là không song song hoặc cùng đồng phẳng, các trục lấy mômen  $x, y, z$  không nhất thiết phải trùng với các trục chiếu  $X, Y, Z$ , có thể lấy bất kỳ miễn là chúng không song song hoặc cùng đồng phẳng.

2) Sáu phương trình cân bằng mômen đối với sáu trục:

$$\sum M_1 = 0; \quad \sum M_2 = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad \sum M_4 = 0; \quad \sum M_5 = 0; \quad \sum M_6 = 0,$$

trong đó  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  là sáu trục chọn tùy ý với điều kiện:

- Sáu trục không được cùng cắt một đường thẳng.
- Trong số sáu trục đó không có quá ba trục song song.
- Trong số sáu trục đó nếu đã có ba trục đồng quy tại một điểm thì ba trục còn lại không được song song.

Trường hợp hệ lực phẳng (trong mặt phẳng  $x, y$ ):

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ là *hệ lực đồng quy tại điểm O* thì thường sử dụng điều kiện sau:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0,$$

$X$  và  $Y$  là hai trục chiếu bất kỳ không song song với nhau.

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ là *hệ lực song song*, có thể sử dụng một trong hai dạng điều kiện:

a) 
$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0,$$

*trục chiếu không được vuông góc với phương của các lực song song.*

b) 
$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0,$$

*AB không được song song với phương của các lực song song.*

\* Nếu các lực đặt vào phần hệ là *hệ lực bất kỳ*, có thể sử dụng một trong ba dạng điều kiện:

a)  $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_A = 0,$

các trục chiếu  $X$  và  $Y$  không được song song với nhau.

b)  $\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0,$

$A$  và  $B$  không được nằm trên đường thẳng vuông góc với trục  $X$ .

c)  $\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0,$

$A, B$  và  $C$  không được cùng nằm trên một đường thẳng.

Nhất thiết phải chú ý đến điều kiện hạn chế của các dạng điều kiện cân bằng, nếu không thì các phương trình cân bằng sẽ không độc lập với nhau và có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng vẫn được thỏa mãn trong khi hệ không cân bằng.

Trong các bài toán cụ thể, ta cần vận dụng linh hoạt các phương trình cân bằng để xác định lực chưa biết.

### 3. KHÁI NIỆM VỀ CHUYỂN VỊ VÀ BIẾN DẠNG

#### 3.1. Chuyển vị

Khi chịu tác động của các nguyên nhân bên ngoài như tải trọng, các phần tử của kết cấu nói chung đều có sự thay đổi về vị trí. Sự chuyển dời vị trí của phần tử được gọi tắt là *chuyển vị* của phần tử. Chuyển vị của phần tử bao gồm: *chuyển vị thẳng* (còn gọi là chuyển vị đường) và *chuyển vị góc*.

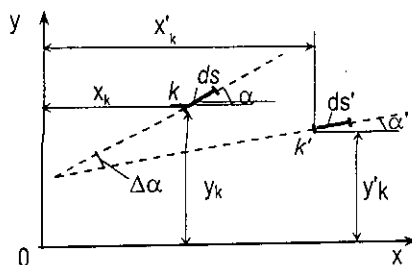
Gọi  $\Delta$  là chuyển vị thẳng của phần tử từ trạng thái chưa chịu lực đến trạng thái chịu lực. Trong bài toán không gian, chuyển vị  $\Delta$  thường được phân tích thành các thành phần theo hệ tọa độ Descartes vuông góc và được ký hiệu như sau:

- chuyển vị thẳng theo phương  $x$ :  $u = \Delta x;$
- chuyển vị thẳng theo phương  $y$ :  $v = \Delta y;$
- chuyển vị thẳng theo phương  $z$ :  $w = \Delta z.$

Gọi  $ds$  là chiều dài của đoạn thẳng rất ngắn (được xem là vô vùng bé) gắn tại phần tử đang xét tương ứng với trạng thái chưa chịu lực, sau khi chịu lực đoạn này có chiều dài mới là  $ds'$ . Góc tạo thành giữa hai đoạn  $ds'$  và  $ds$  là chuyển vị góc của phần tử. Chuyển vị góc cũng thường được phân tích thành ba thành phần trên ba mặt  $xy$ ;  $yz$  và  $zx$  của hệ tọa độ Descartes vuông góc và được ký hiệu như sau:

- chuyển vị góc trong mặt  $xy$ :  $\varphi_{xy}$ ;
- chuyển vị góc trong mặt  $yz$ :  $\varphi_{yz}$ ;
- chuyển vị góc trong mặt  $zx$ :  $\varphi_{zx}$ .

Trong bài toán phẳng, khi hệ và tải trọng cùng nằm trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 4), các thành phần chuyển vị của phần tử  $k$  bao gồm:



Hình 4

- chuyển vị thẳng theo phương  $x$ :  $u = \Delta x = x'_k - x_k$ ;
- chuyển vị thẳng theo phương  $y$ :  $v = \Delta y = y'_k - y_k$ ;
- chuyển vị góc:  $\varphi = \Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ .

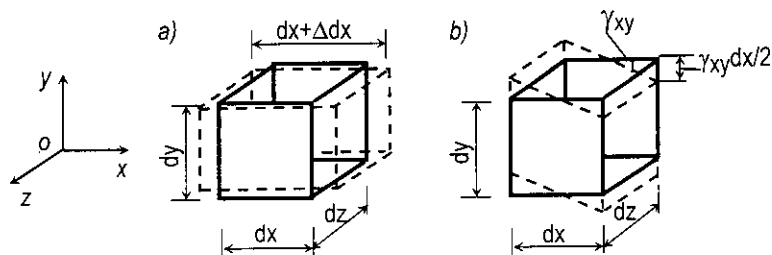
### 3.2. Biến dạng

Dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài:

- \* Khi chuyển vị của mọi phần tử trên vật rắn như nhau thì vật rắn là cứng tuyệt đối.
- \* Khi chuyển vị của các phần tử trên vật rắn khác nhau thì vật rắn là vật thể biến dạng.

Xét một phân tử hình hộp vô cùng bé của vật rắn có kích thước  $dx \times dy \times dz$  trong hệ tọa độ Descartes vuông góc (hình 5). Biến dạng của phân tử bao gồm các thành phần biến dạng dài và biến dạng góc.

#### ♦ Biến dạng dài



Hình 5

Xét biến dạng dài theo phương  $x$  (hình 5a): Sau khi các phân tử chuyển vị, chiều dài  $dx$  theo phương  $x$  bị dãn ra và có chiều dài mới là  $(dx + \Delta dx)$ . Hiệu của hai chiều dài  $(dx + \Delta dx) - dx = \Delta dx$  là biến dạng dài tuyệt đối theo phương  $x$  của phân tử. Tỷ số  $\Delta dx / dx$  là biến dạng dài tỷ đối theo phương  $x$  của phân tử.



Cũng phân tích tương tự như trên đối với biến dạng dài theo phương  $y$  và phương  $z$  ta có các biểu thức *biến dạng dài tỷ đối theo phương của các trục tọa độ*  $x, y$  và  $z$  như sau:

$$\begin{aligned} \text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } x: \quad \varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} \\ \text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } y: \quad \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} \\ \text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } z: \quad \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} \end{aligned} \quad (1)$$

#### ◆ Biến dạng góc, biến dạng trượt

Xét thành phần biến dạng góc giữa hai mặt vuông góc với trục  $x$  (hình 5b): Sau khi các phân tử chuyển vị, các mặt của phân tử bị trượt, giữa hai mặt vuông góc với trục  $x$  hình thành góc  $\gamma_{xy}$ . Góc  $\gamma_{xy}$  là *biến dạng góc tuyệt đối của phân tử*. Độ trượt  $\gamma_{xy}dx/2$  là *biến dạng trượt của phân tử*.

Cũng phân tích tương tự như trên đối với biến dạng góc giữa các mặt vuông góc với trục  $y$  và phương  $z$  ta có các biểu thức *biến dạng trượt* giữa các mặt vuông góc với các trục tọa độ  $x, y$  và  $z$  như sau:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}; \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}. \quad (2)$$

Trong phạm vi bài toán phẳng, khi hệ và tải trọng cùng nằm trong mặt phẳng  $xOy$  phân tử vô cùng bé của vật rắn với kích thước  $dx \times dy$  có các thành phần biến dạng như sau:

$$\begin{aligned} \text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } x: \quad \varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} \\ \text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } y: \quad \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} \\ \text{Biến dạng trượt:} \quad \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

## 4. NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT

### 4.1. Định nghĩa

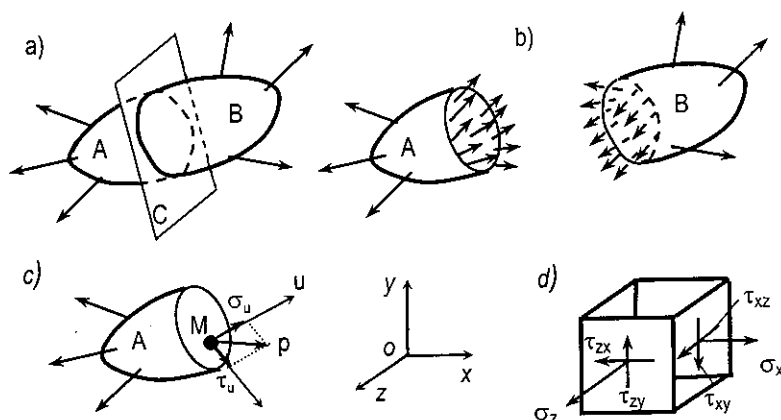
Giữa các phần tử vật chất của vật rắn luôn tồn tại các lực tương tác. Ở trạng thái ban đầu khi chưa có tác động của ngoại lực, các lực tương tác bảo đảm cho vật rắn cân bằng dưới một hình dạng xác định. Khi có tác động của

, ngoại lực, vật rắn bị biến dạng, khoảng cách giữa các phân tử thay đổi nên các lực tương tác trong vật rắn cũng thay đổi để cân bằng với ngoại lực.

Ta định nghĩa: *nội lực là lượng thay đổi của các lực tương tác giữa các phân tử vật chất trong vật rắn. Điều đó có nghĩa là chấp nhận giả thiết: vật rắn ở trạng thái ban đầu là trạng thái tự nhiên (ở thái ban đầu khi chưa có tác động của ngoại lực, nội lực trong hệ bằng không).*

Để phát hiện và xác định nội lực ta vận dụng *phương pháp mặt cắt*.

Xét một vật rắn bất kỳ cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực (hình 6a). Tưởng tượng dùng một mặt cắt  $C$  chia vật rắn thành hai phần tách biệt  $A$  và  $B$  (hình 6b) và xét cân bằng của một phần nào đó, chẳng hạn phần  $A$ . Vì phần  $A$  cân bằng trong toàn hệ nên khi loại bỏ phần  $B$  ta cần thay thế tác dụng của phần  $B$  đối với phần  $A$  bằng một hệ lực phân bố trên toàn tiết diện bị cắt. Hệ lực đó chính là nội lực. Ngược lại, trên tiết diện bị cắt thuộc phần  $B$  cũng tồn tại một hệ nội lực thay thế tác dụng của phần  $A$  đối với phần  $B$ . Theo tiên đề 4 đã nêu trong mục 2 (nguyên lý tác dụng và phản tác dụng), hai hệ nội lực tác dụng trên hai phần  $A$  và  $B$  phải bằng nhau về giá trị và ngược chiều nhau tại các điểm tương ứng trên tiết diện bị cắt. Như vậy, với phương pháp mặt cắt, ta đã *biến đổi nội lực trong toàn hệ thành ngoại lực đối với từng phần hệ* để xét cân bằng của từng phần hệ.



Hình 6

Gọi  $d\vec{p}$  là vectơ tổng nội lực tại một diện tích phân tố  $dA$  quanh điểm  $M$  của tiết diện bị cắt. Mật độ trung bình của nội lực trên diện tích phân tố  $dA$  được gọi là *ứng suất toàn phần trung bình*  $\vec{p}$  tại  $M$  và được xác định bằng giới hạn của tỷ số:

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta A}. \quad (4)$$

Thứ nguyên của ứng suất: [Lực] / [chiều dài]<sup>2</sup>.

## 4.2. Các thành phần của ứng suất

Gọi  $\bar{u}$  là pháp tuyến ngoài của tiết diện bị cắt ta có thể phân tích vector ứng suất toàn phần thành hai thành phần vuông góc với ký hiệu và tên gọi như sau (hình 6c):

- Thành phần theo phương pháp tuyến  $\bar{u}$  là *ứng suất pháp*, ký hiệu:  $\sigma_u$ ;
- Thành phần nằm trong mặt cắt là *ứng suất tiếp*, ký hiệu:  $\tau_u$ .

Giữa các ứng suất  $p$ ,  $\sigma_u$ ,  $\tau_u$  có liên hệ:  $p^2 = \sigma_u^2 + \tau_u^2$ .

Nếu trên mặt cắt có gắn hai trục vuông góc  $x$  và  $y$  thì có thể phân tích  $\tau_u$  thành hai thành phần theo hai phương  $x$  và  $y$  và được ký hiệu là  $\tau_{ux}$  và  $\tau_{uy}$ . Chỉ số thứ nhất của ứng suất tiếp biểu thị phương của pháp tuyến ngoài của mặt cắt, chỉ số thứ hai biểu thị phương của ứng suất tiếp trên mặt cắt.

Quy ước về dấu của ứng suất:

- \* *Ứng suất pháp được xem là dương khi có chiều hướng theo chiều dương của pháp tuyến ngoài của mặt cắt. Ngược lại thì xem là âm.*
- \* *Ứng suất tiếp được xem là dương khi quay pháp tuyến ngoài một góc 90° thuận chiều kim đồng hồ trong mặt phẳng của pháp tuyến với ứng suất tiếp thì chiều dương của pháp tuyến trùng với chiều của ứng suất tiếp. Ngược lại thì xem là âm.*

Trên hình 6d trình bày cách ký hiệu và chiều dương của các ứng suất trên hai mặt có pháp tuyến ngoài là  $x$  và  $z$ .

## 4.3. Các thành phần của nội lực

Xét một vật rắn bất kỳ cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực. Sau khi thực hiện mặt cắt chia hệ thành hai phần tách biệt và xét cân bằng của một phần nào đó, chẳng hạn phần bên trái (hình 7a). Gắn hệ trục tọa độ vuông góc có gốc tại trọng tâm  $O$  của tiết diện, trục  $Oz$  trùng với pháp tuyến ngoài của mặt cắt như trên hình 7a. Khi loại bỏ phần bên phải ta cần thay thế tác dụng của phần bên phải bằng hệ nội lực phân bố trên toàn tiết diện bị cắt. Tại một diện tích phân tố  $dA$  quanh điểm bất kỳ  $M$  của tiết diện bị cắt tồn tại ứng suất toàn phần trung bình  $\bar{p}$  được xác định bằng  $p.dA$ .

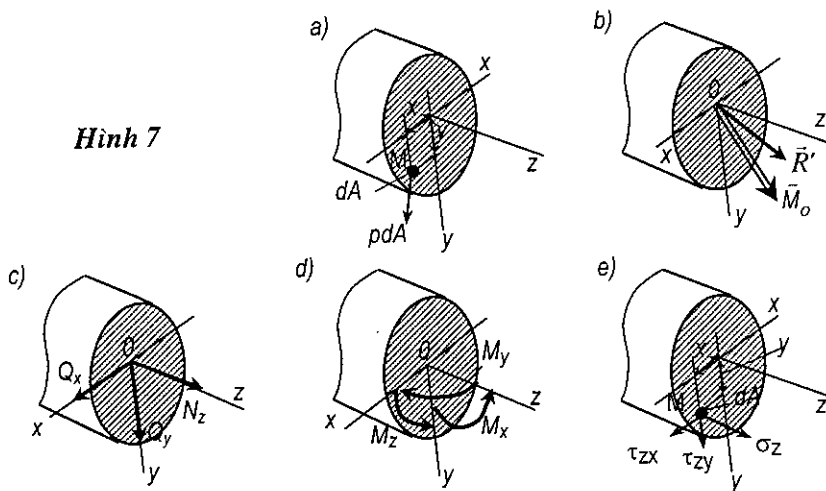
Với bất kỳ sự phân bố ứng suất trên tiết diện như thế nào, theo *định lý chuyển lực song song* đã nêu trong mục 2.1, ta có thể quy đổi hệ nội lực đó về một vectơ chính  $\vec{R}'$  đặt tại trọng tâm  $O$  của tiết diện và một mômen chính  $\vec{M}_o$  (hình 7b).

Phân tích vectơ chính thành các thành phần theo ba trục  $z, x, y$  (hình 7c):

- Thành phần theo trục  $z$  gọi là *lực dọc*, ký hiệu  $N_z$ ;
- Thành phần theo trục  $x$  gọi là *lực cắt trên trục  $x$* , ký hiệu  $Q_x$ ;
- Thành phần theo trục  $y$  gọi là *lực cắt trên trục  $y$* , ký hiệu  $Q_y$ .

Phân tích vectơ mômen chính thành các thành phần theo ba trục  $z, x, y$  (hình 7d):

- Thành phần theo trục  $z$  gọi là *mômen xoắn quanh trục  $z$* , ký hiệu  $M_z$ ;
- Thành phần theo trục  $x$  gọi là *mômen uốn quanh trục  $x$* , ký hiệu  $M_x$ ;
- Thành phần theo trục  $y$  gọi là *mômen uốn quanh trục  $y$* , ký hiệu  $M_y$ .



#### 4.4. Quy ước về dấu của các thành phần nội lực

- \* Lực dọc  $N_z$  mang dấu dương khi hướng ra ngoài mặt cắt (gây tác dụng kéo).
- \* Lực cắt  $Q_x, Q_y$  mang dấu dương khi làm cho phần hệ đang xét quay thuận chiều kim đồng hồ.
- \* Mômen uốn  $M_x, M_y$  mang dấu dương khi làm căng các thớ thuộc phần dương của các trục  $y, x$  (căng thớ dưới).

Trên hình 8 minh họa chiều dương của các thành phần nội lực.

#### 4.5. Liên hệ giữa các thành phần nội lực với các ứng suất

Nếu ứng suất tại mỗi điểm  $M$  của tiết diện được phân tích thành: ứng suất pháp  $\sigma_z$ , và các ứng suất tiếp  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  (hình 7e) thì từ các hình 7c, d, e ta dễ dàng lập được các liên hệ sau trên cơ sở tương đương về lực:

$$\begin{aligned} \bullet N_z &= \int_A \sigma_z dA; & \bullet M_x &= \int_A y \sigma_z dA; \\ \bullet Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA; & \bullet M_y &= \int_A x \sigma_z dA; \\ \bullet Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA; & \bullet M_z &= \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA. \end{aligned} \quad (5)$$

#### 4.6. Liên hệ vi phân giữa các thành phần nội lực với tải trọng

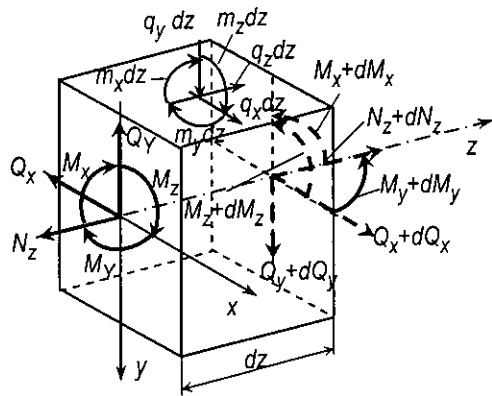
##### Trường hợp bài toán không gian:

Gọi  $x, y$  là hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, trục  $z$  hướng theo phương tiếp tuyến với trục thanh. Tách một phân tố thanh có chiều dài vô cùng bé theo phương  $z$ , kích thước theo phương  $x, y$  hữu hạn (hình 8). Phân tố thanh cân bằng dưới tác dụng của các lực:

\* Ngoại lực tác dụng dưới dạng lực phân bố và mômen phân bố có cường độ  $q_y, q_x, q_z, m_x, m_y, m_z$  với quy ước chiều dương như trên hình 8.

\* Nội lực tại tiết diện bên trái phân tố thanh bao gồm các thành phần:  $M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, N_z$  với quy ước chiều dương như trên hình 8.

\* Nội lực tại tiết diện bên phải phân tố thanh bao gồm các thành phần:  $M_x+dM_x, M_y+dM_y, M_z+dM_z, Q_x+dQ_x, Q_y+dQ_y, N_z+dN_z$  với quy ước chiều dương như trên hình 8.



Hình 8

Từ các phương trình cân bằng hình chiếu lên các trục  $x, y, z$  ta tìm được các liên hệ vi phân sau:

$$\frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0; \quad \frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0; \quad \frac{dN_z}{dz} + q_z = 0; \quad (6)$$



Từ các phương trình cân bằng mômen quanh các trục  $x, y, z$  ta tìm được các liên hệ vi phân sau:

$$\frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x = 0; \quad \frac{dM_y}{dz} - Q_x - m_y = 0; \quad \frac{dM_z}{dz} - m_z = 0; \quad (7)$$

**Trường hợp bài toán phẳng** (trong mặt phẳng  $x, y$ ):

$$\frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0; \quad \frac{dN_z}{dz} + q_z = 0; \quad \frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x = 0; \quad (8)$$

## 5. CÁC GIẢ THIẾT CỦA MÔN HỌC

### 5.1. Các giả thiết về vật liệu [3, 4]

Các cấu kiện trong công trình thường được chế tạo từ các loại vật liệu rất khác nhau về cấu tạo và tính chất vật lý: gỗ, kim loại, bê tông, bê tông cốt thép, chất hữu cơ... Để xây dựng một phương pháp tính thực hành, áp dụng chung cho mọi loại, ta cần nghiên cứu với một loại vật liệu quy ước, mang tính chất chung nhất, phổ biến nhất, tức là phải đưa ra các giả thiết thích hợp.

**\* Giả thiết 1:** *Vật liệu phân bố liên tục, đồng nhất và đẳng hướng.*

- *Tính liên tục* nghĩa là vật liệu chiếm đầy không gian của vật thể.
- *Tính đồng nhất* nghĩa là phân tố vật thể lấy tại những điểm khác nhau đều có tính chất cơ học như nhau.
- *Tính đẳng hướng* nghĩa là vật thể có tính chất cơ học như nhau theo mọi phương.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì ta được phép nghiên cứu một phân tố của vật thể rồi suy ra cho toàn vật thể, nghĩa là sử dụng được các phép tính vi phân và tích phân.

**\* Giả thiết 2:** *Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối, giữa lực và biến dạng có sự liên hệ bậc nhất (Định luật Robert Hooke).*

Dưới tác dụng của ngoại lực vật thể bị biến dạng, khi lực chưa vượt quá một giới hạn xác định nào đó thì sau khi bỏ ngoại lực đi vật thể sẽ khôi phục lại hình dáng và kích thước:

- Nếu khôi phục lại đúng hình dáng và kích thước ban đầu thì vật liệu có tính *đàn hồi tuyệt đối*.
- Nếu chỉ khôi phục lại được một phần về hình dáng và kích thước ban đầu thì vật liệu có tính *đàn hồi không tuyệt đối*.



Năm 1660 Robert Hooke đã nghiên cứu sự làm việc của các lò xo và đã đi đến kết luận: "độ dãn dài của lò xo tỷ lệ thuận với lực tác động". Kết luận này là cơ sở của định luật mang tên Robert Hooke: "*Giữa lực tác động và biến dạng tương ứng có sự liên hệ bậc nhất*".

Giả thiết này biểu thị điều kiện vật lý của bài toán. Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi tuyến tính hay tuyến tính vật lý* và cách giải được thực hiện rất dễ dàng.

Trong những trường hợp không cho phép chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi phi tuyến hay phi tuyến vật lý*.

## 5.2. Giả thiết về biến dạng và chuyển vị

\* **Giả thiết 3:** *Giả thiết biến dạng và chuyển vị trong hệ rất nhỏ.*

Dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, hình dạng của công trình thay đổi rất ít, cho phép ta có thể sử dụng các liên hệ gần đúng giữa các đại lượng hình học. Chẳng hạn, nếu gọi  $\theta$  là góc xoay của một tiết diện nào đó trên công trình trong quá trình biến dạng thì theo giả thiết này ta có thể viết:  $\sin\theta \approx 0$ ;  $\operatorname{tg}\theta \approx 0$ ;  $\cos\theta \approx 1$ .

Do đó, khi xác định nội lực ta có thể thực hiện theo *sơ đồ không biến dạng* của công trình. Nghĩa là mặc dù dưới tác dụng của tải trọng, công trình có thay đổi hình dạng nhưng khi tính nội lực ta vẫn dùng các kích thước hình học tương ứng với hình dạng ban đầu của công trình.

Đối với những trường hợp như bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc chẳng hạn, nếu dùng giả thiết này thì có thể mắc phải những sai số thuộc về bản chất, do đó phải xác định nội lực theo trạng thái biến dạng.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *tuyến tính hình học*. Khi không chấp nhận được giả thiết này thì bài toán được gọi là *phi tuyến hình học* và cách tính sẽ khá phức tạp vì cần được thực hiện theo *sơ đồ biến dạng* của công trình.

## 5.2. Giả thiết về sơ đồ tính của công trình

\* **Giả thiết 4:** *Khi thực hiện tính toán ta thay sơ đồ công trình bằng sơ đồ tính tương ứng.*

Nói chung, khi xác định nội lực trong công trình, nếu xét đến một cách chính xác và đầy đủ tất cả các yếu tố hình học của các cấu kiện thì bài toán sẽ quá phức tạp. Do đó cũng như các môn khoa học khác, Cơ học công trình

cũng phải dùng phương pháp trừu tượng khoa học để thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính tương ứng.

*Sơ đồ tính của công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn bảo đảm phản ánh được sát với sự làm việc thực của công trình.*

Trong sơ đồ tính ta lược bỏ các yếu tố không cơ bản và chỉ xét đến các yếu tố chủ yếu quyết định khả năng làm việc của công trình. Khi tính toán ta cần tìm cách thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính hợp lý gọi là lựa chọn sơ đồ tính.

Lựa chọn sơ đồ tính là việc khá phức tạp và đa dạng. Khó có thể nêu ra những quy tắc có tính chất tổng quát về vấn đề này. Việc chọn sơ đồ tính chẳng những tùy thuộc hình dạng kết cấu và tầm quan trọng của nó, tùy thuộc khả năng tính toán, tùy thuộc quan hệ tỷ lệ giữa độ cứng của các cấu kiện trong công trình mà còn tùy thuộc tải trọng và tính chất tác dụng của tải trọng. Khi lựa chọn sơ đồ tính còn phải chú ý khảo sát thêm các yêu cầu kinh tế, kỹ thuật khác nữa.

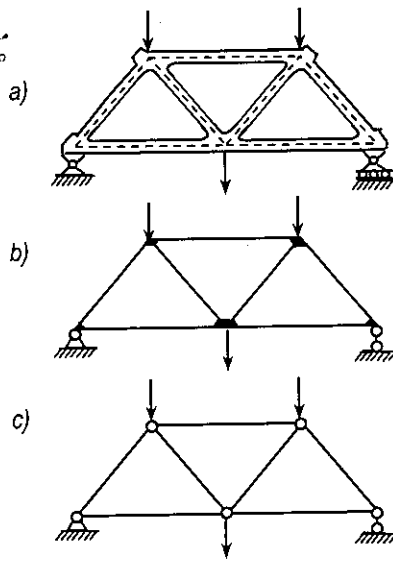
Trong thực tế, để chuyển công trình thực về sơ đồ tính tương ứng, thường cần thực hiện hai bước biến đổi sau:

\* **Bước thứ nhất:** Chuyển công trình thực về sơ đồ của công trình. Bước này được thực hiện theo một số nguyên tắc thay thế gần đúng như sau:

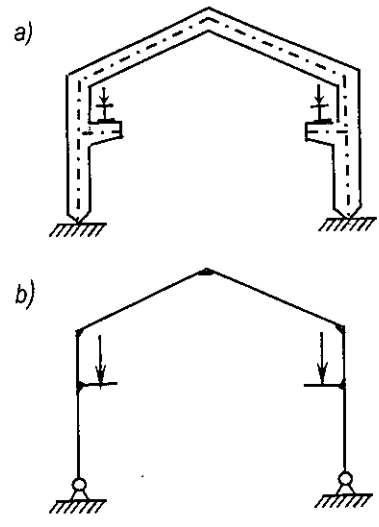
- Thay các thanh bằng đường trung gian gọi là *trục*. Thay các bản hoặc vỏ bằng các *mặt trung gian*.
- Thay tiết diện bằng các đại lượng đặc trưng như diện tích  $A$ , mômen quán tính  $I$ ... của tiết diện.
- Thay các thiết bị tựa bằng các liên kết tựa lý tưởng (không ma sát).
- Đưa các tải trọng tác dụng trên mặt cấu kiện về trục của cấu kiện.

\* **Bước thứ hai:** Chuyển sơ đồ của công trình về sơ đồ tính của công trình. Ở bước này, nếu cần, ta bỏ qua thêm một số yếu tố giữ vai trò thứ yếu trong sự làm việc của công trình nhằm bảo đảm cho sơ đồ tính phù hợp với khả năng tính toán của người thiết kế.

Ví dụ, với kết cấu dàn trên hình 8a, sau khi thực hiện các phép biến đổi trong bước thứ nhất, ta được sơ đồ của công trình như trên hình 8b.



Hình



Hình

Nếu dùng sơ đồ này để tính toán với quan niệm mắt dàn (giao điểm của các thanh) được xem là nút cứng, nghĩa là xem chuyển vị thẳng và chuyển vị góc của các đầu thanh quy tụ ở mỗi nút như nhau, thì bài toán sẽ rất phức tạp nếu không có sự trợ giúp của máy tính điện tử.

Trên thực tế, để đơn giản hóa cách tính dàn người ta thường quy đổi tải trọng về mắt dàn và giả thiết xem các mắt của dàn như các khớp lý tưởng, nghĩa là quan niệm các thanh quy tụ vào mắt có thể xoay tự do, không ma sát. Sau khi thực hiện cách đơn giản hóa đó, ta được hệ trên hình 9c là sơ đồ tính của công trình.

Nếu sơ đồ của công trình đã phù hợp với khả năng và yêu cầu tính toán thì có thể chấp nhận làm sơ đồ tính mà không cần đơn giản hóa thêm nữa.

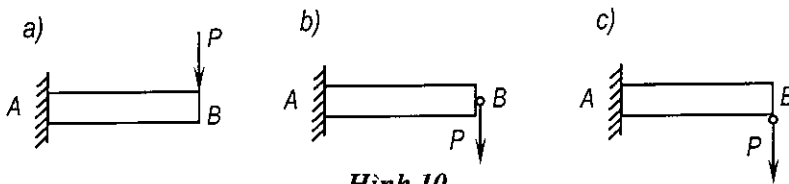
Ví dụ, với hệ khung cho trên hình 9a, sau khi thực hiện phép biến đổi ở bước thứ nhất ta có sơ đồ công trình như trên hình 9b. Sơ đồ này cũng là sơ đồ tính vì đã phù hợp với khả năng tính toán.

Như trên đã nói, cách chọn sơ đồ tính của công trình là một vấn đề phức tạp và quan trọng vì chất lượng kết quả tính toán phụ thuộc rất nhiều vào sơ đồ tính. Đối với những phép tính sơ bộ, sơ đồ tính có thể đơn giản, thô sơ còn đối với những bước tính toán có tính chất quyết định thì sơ đồ tính phải hoàn thiện, chặt chẽ.

## 6. CÁC NGUYÊN LÝ ÁP DỤNG CHO HỆ ĐÀN HỒI

### 6.1. Nguyên lý Saint-Venant [4]

Xét hệ đàn hồi chịu lực  $P$  tương ứng với ba vị trí điểm đặt lực khác nhau tại đầu mút  $B$  (hình 10a, b, c). Tất nhiên sự khác nhau về điểm đặt lực dẫn đến sự phân bố ứng suất và biến dạng khác nhau ở lân cận tiết diện  $B$ . Nếu chú ý thỏa mãn các điều kiện biên khác nhau này thì cách tính sẽ rất khó khăn. Thực nghiệm và lý thuyết cho biết: ở cách tiết diện  $B$  một đoạn rất ngắn thì sự phân bố ứng suất và biến dạng của cả ba trường hợp là như nhau. Do đó, nếu bỏ qua sự khác biệt cục bộ ở tiết diện  $B$  thì cả ba trường hợp trên cùng đưa về một trường hợp và cách tính được dễ dàng hơn rất nhiều.



Kỹ sư người Pháp Adhémar Barré Saint-Venant đã đề xuất nguyên lý mang tên nguyên lý Saint-Venant (còn gọi là nguyên lý làm giảm nhẹ điều kiện biên) với nội dung như sau:

*Tại những điểm đủ xa điểm đặt của tải trọng, ứng suất do tải trọng gây ra phụ thuộc rất ít vào cách phân bố của tải trọng trên mặt của vật thể*

### 6.2. Nguyên lý cộng tác dụng

Nếu công trình nghiên cứu đáp ứng được các giả thiết 2 và 3 thì khi tính công trình đó ta được phép áp dụng nguyên lý gọi là *nguyên lý cộng tác dụng* (còn gọi là nguyên lý tác dụng độc lập của các lực).

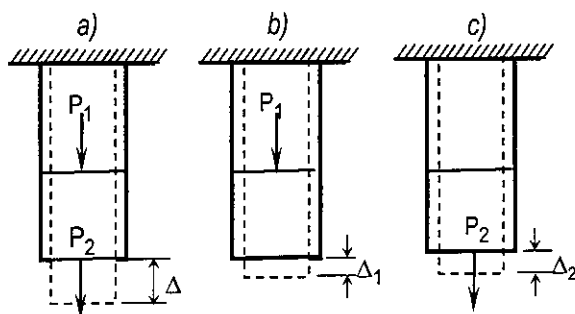
**Nội dung nguyên lý cộng tác dụng:**

*Một đại lượng nghiên cứu nào đó (chẳng hạn phản lực, nội lực, chuyển vị...) do một số nguyên nhân đồng thời cùng tác dụng trên công trình gây ra được xem như tổng đại số hay tổng hình học những giá trị thành phần của đại lượng đó do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.*

Lấy tổng đại số nếu đại lượng nghiên cứu là vô hướng còn lấy tổng véctơ nếu đại lượng nghiên cứu được biểu thị bằng các véctơ.

Ví dụ, cần xác định độ dãn của thanh chịu lực  $P_1$  và  $P_2$  (hình 11a). Nếu gọi  $\Delta_1$  là độ dãn của thanh do riêng lực  $P_1$  gây ra (hình 11b),  $\Delta_2$  là độ dãn của thanh do riêng lực  $P_2$  gây ra (hình 11c); theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 .$$



Hình 11

Biểu hiện về mặt giải tích của nguyên lý cộng tác dụng như sau:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_k + \dots + S_n \quad (9)$$

hay

$$S = \bar{S}_1 P_1 + \bar{S}_2 P_2 + \dots + \bar{S}_k P_k + \dots + \bar{S}_n P_n, \quad (10)$$

trong đó:

$S$  – đại lượng nghiên cứu do các lực  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$  tác dụng đồng thời gây ra;

$S_k$  – đại lượng nghiên cứu do riêng lực  $P_k$  gây ra;

$\bar{S}_k$  – đại lượng nghiên cứu do riêng lực  $P_k$  có giá trị bằng đơn vị của lực gây ra,

$$S_k = \bar{S}_k P_k; \quad (11)$$

Từ biểu thức (10) ta thấy nguyên lý cộng tác dụng biểu thị sự liên hệ tuyến tính giữa đại lượng nghiên cứu  $S$  với tải trọng.

Nguyên lý cộng tác dụng giữ một vai trò quan trọng trong Cơ học công trình. Với nguyên lý này ta có thể xây dựng được các thuật toán đơn giản nhưng vẫn thỏa mãn được yêu cầu chính xác trong thực tế. Cũng cần nhấn mạnh thêm là nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng được cho những bài toán tuyến tính về vật lý cũng như về hình học.

Trong phạm vi giáo trình này ta chỉ nghiên cứu cách tính các hệ thanh cho phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng.

## 7. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

Có nhiều cách phân loại công trình. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu một vài cách phân loại thường được sử dụng [6].

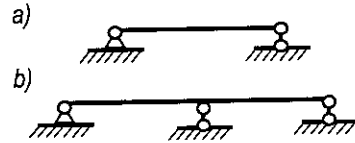
### A. Phân loại theo sơ đồ tính

Theo cách này ta chia các công trình thành hai loại: *hệ phẳng* và *hệ không gian*.

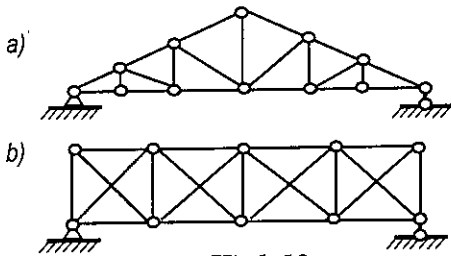
**1. Hệ phẳng:** khi tất cả các cấu kiện của công trình đều nằm trong một mặt phẳng và tải trọng cũng chỉ tác dụng trong mặt phẳng đó.

Trong hệ phẳng, dựa theo hình dạng của công trình người ta chia thành nhiều dạng kết cấu khác nhau:

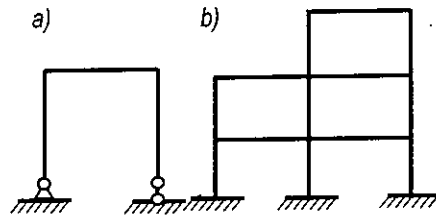
- ◆ dầm (hình 12a, b);
- ◆ dàn (hình 13a, b);
- ◆ khung (hình 14a, b);
- ◆ vòm (hình 15a, b);



Hình 12

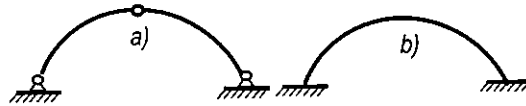


Hình 13

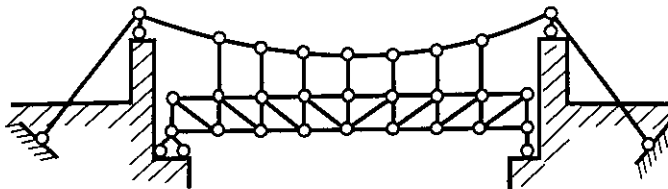


Hình 14

- ◆ hệ liên hợp (hệ treo trên hình 16 là hệ liên hợp giữa dàn và dây xích).

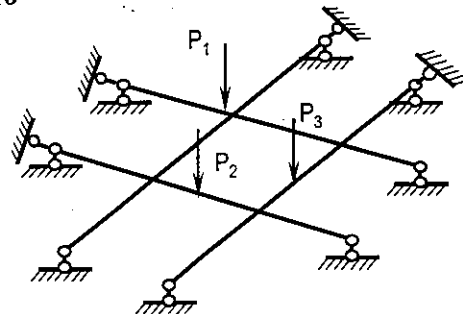


Hình 15



Hình 16

**2. Hệ không gian:** khi các cấu kiện của công trình không nằm trong cùng một mặt phẳng hoặc nằm trong cùng một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ngoài mặt phẳng của công trình.

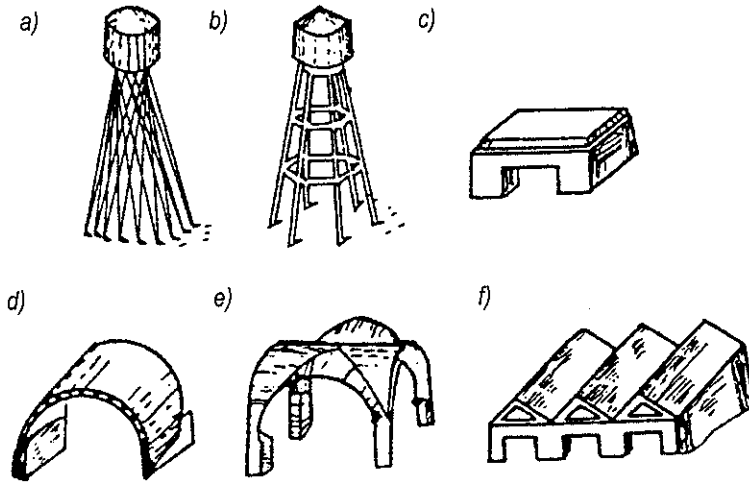


Hình 17



Những hệ không gian thường gặp là:

- ◆ dầm trục giao (hình 17);
- ◆ dàn không gian (phần dưới hình 18a);



Hình 18

- ◆ khung không gian (phần dưới hình 18b);
- ◆ bản (hình 18c);
- ◆ vỏ (hình 18d, e, f).

### B. Phân loại theo cách tính công trình

Khi tính toán công trình, nói chung ta phải sử dụng các điều kiện sau:

- \* *Điều kiện cân bằng tĩnh học.*
- \* *Điều kiện động học* hay còn gọi là điều kiện hình học, điều kiện liên tục về biến dạng (biểu thị sự tương quan hình học giữa các điểm trên công trình; chẳng hạn điều kiện biểu thị chuyển vị tại hai tiết diện kề nhau trên công trình là như nhau hoặc khác nhau với một giá trị xác định nào đó).
- \* *Điều kiện vật lý* biểu thị sự liên hệ giữa nội lực và biến dạng (sự biến đổi hình dạng) của công trình.

Tùy theo cách vận dụng các điều kiện nói trên trong một khâu tính toán nào đó, ta có thể phân loại công trình như sau:

- ◆ **Hệ tĩnh định** là những hệ khi chịu tải trọng ta có thể xác định được nội lực trong hệ chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Ví dụ, các hệ trên hình 12a; 13a; 14a và 15a là tĩnh định.

♦ **Hệ siêu tĩnh** là những hệ khi chịu tải trọng, nếu chỉ sử dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định nội lực trong hệ. Đối với các hệ này ngoài những điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng các điều kiện động học và các điều kiện vật lý.

Những hệ trên hình 12b; 13b; 14b; 15b và 16 là siêu tĩnh.

Ngoài ra, người ta còn phân loại công trình theo nhiều cách khác như:

- \* Phân loại theo *khả năng thay đổi hình dạng hình học của công trình* (xem chương 1).
- \* Phân loại theo *kích thước hình học tương đối của các cấu kiện* (xem mục 1, chương Mở đầu).

Trong phạm vi giáo trình này ta chỉ nghiên cứu các hệ thanh phẳng. Cách tính hệ thanh không gian cũng được thực hiện theo nguyên tắc tương tự như khi tính hệ thanh phẳng song phức tạp hơn vì số lượng các thành phần nội lực và biến dạng nhiều hơn. Bạn đọc có thể tìm hiểu cách tính hệ thanh không gian qua các tài liệu [6, 8].

## 8. NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

Cơ học công trình là môn *khoa học thực nghiệm*, trình bày các phép tính để kiểm tra *độ bền*, *độ cứng* và *độ ổn định* của các công trình được chế tạo từ các vật thể biến dạng, chịu tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

- \* **Tính công trình về độ bền** nhằm bảo đảm cho công trình có khả năng chịu tác dụng của tải trọng mà không bị phá hoại.
- \* **Tính công trình về độ cứng** nhằm bảo đảm cho công trình không có chuyển vị lớn và rung động lớn có thể làm cho công trình mất trạng thái làm việc bình thường ngay cả khi điều kiện bền vẫn bảo đảm.
- \* **Tính công trình về mặt ổn định** là tìm hiểu khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của công trình dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

*Nhiệm vụ chủ yếu của Cơ học công trình là xác định các thành phần nội lực (còn gọi là ứng lực) và chuyển vị trong công trình có dạng hệ thanh. Độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình có liên quan đến tính chất cơ học*

của vật liệu, hình dạng và kích thước của cấu kiện, nội lực phát sinh và phát triển trong công trình. Hơn nữa kích thước của cấu kiện lại phụ thuộc nội lực trong cấu kiện đó. Do đó công việc đầu tiên khi tính công trình là xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình dưới các tác động bên ngoài.

Sau khi đã giải bài toán xác định các thành phần nội lực và biến dạng trong công trình dưới dạng hệ thanh, ta nghiên cứu từng cấu kiện thanh, xác định trạng thái phân bố ứng suất để kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình tương ứng với các thành phần nội lực trong thanh:

- \* Nếu thanh chỉ chịu lực dọc thì vận dụng cách tính cấu kiện chịu kéo hoặc nén trình bày trong chương 3 để nghiên cứu.
- \* Nếu thanh chỉ chịu mômen xoắn thì vận dụng cách tính các cấu kiện chịu xoắn trình bày trong chương 4 để nghiên cứu.
- \* Nếu thanh chịu mômen uốn thì vận dụng cách tính các cấu kiện chịu uốn trình bày trong chương 5 để nghiên cứu.
- \* Nếu thanh chịu nhiều thành phần nội lực thì vận dụng cách tính các cấu kiện chịu lực kết hợp trình bày trong chương 6 để nghiên cứu.

Cơ học kết cấu là môn kỹ thuật cơ sở, chuẩn bị phục vụ cho các môn kỹ thuật chuyên môn. Các môn Kết cấu thép, Kết cấu bê tông cốt thép, Kết cấu gỗ, Kết cấu gạch đá sẽ căn cứ vào các kết quả tính nội lực đã tìm được đồng thời tùy theo tính năng của vật liệu do các môn đó nghiên cứu để tiếp tục hoàn thiện việc tính toán công trình.

Ngoài ra, Cơ học công trình còn có nhiệm vụ nghiên cứu dạng hợp lý của các công trình bảo đảm yêu cầu tiết kiệm vật liệu cũng như nghiên cứu các quy luật hình thành công trình bảo đảm cho công trình không bị thay đổi dạng hình học dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài.

Trong thực tế thường gặp hai loại bài toán:

- \* *Bài toán kiểm tra*: Ta gặp bài toán này khi đã có sẵn công trình, tức là đã biết hình dạng, kích thước của công trình. Nếu đã biết tải trọng tác động thì cần xác định trạng thái nội lực và biến dạng tương ứng trong hệ để phán đoán xem công trình có bảo đảm đủ bền, đủ cứng và đủ ổn định hay không, công trình thiết kế có kinh tế hay không? Nếu chưa biết tải trọng

thì cần vận dụng các điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định để xác định giá trị cho phép của tải trọng.

\* *Bài toán thiết kế*: Ta gặp bài toán này khi cần thiết kế công trình, tức là cần xác định hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý để cho công trình có khả năng thỏa mãn điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định dưới tác động của các tải trọng đã biết. Để giải bài toán này người thiết kế thường phải dựa vào kinh nghiệm hoặc sử dụng các phương pháp thiết kế sơ bộ gần đúng để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình. Tiếp đó, tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên để xem công trình vừa mới giả thiết có thỏa mãn các điều kiện bền, điều kiện cứng, điều kiện ổn định hay không, có bảo đảm tiết kiệm nguyên vật liệu hay không. Trên cơ sở đó người thiết kế hiệu chỉnh lại giả thiết ban đầu đã chọn.

Như vậy, trong cả hai loại bài toán kiểm tra và thiết kế ta đều phải biết cách xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình khi cho biết hình dạng kích thước của các cấu kiện trong công trình và tác động của tải trọng.

Cơ học công trình giữ một vai trò quan trọng đối với các kỹ sư làm công tác thiết kế cũng như thi công các công trình xây dựng. Cơ học công trình trang bị cho kỹ sư thiết kế những tri thức giúp họ phát hiện được trạng thái phân bố nội lực và biến dạng trong công trình và do đó tìm được những hình dạng hợp lý của công trình, thể hiện được một cách đầy đủ và hợp lý những ý nghĩ sáng tạo của mình. Môn học này giúp những người làm công tác thi công có khả năng hiểu biết đúng đắn sự làm việc của công trình, loại trừ được những thiếu sót trong khi xây dựng, quyết định một cách đúng đắn về kích thước các đà giáo, các thiết bị lắp ráp và có khả năng quyết định thay thế cấu kiện này bằng cấu kiện khác tương đương...

# 1

## PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA CÁC HỆ THANH PHẪNG

Kết cấu dầm trong xây dựng thường được cấu tạo từ nhiều vật thể nối với nhau để cùng chịu các nguyên nhân tác động bên ngoài như tải trọng. Cách nối có thể thực hiện dưới nhiều hình thức khác nhau nhưng điều cơ bản là dưới tác dụng của tải trọng, kết cấu đó vẫn giữ được hình dạng hình học ban đầu mà không được sụp đổ. Do đó, trước khi đi vào tính toán công trình, ta cần biết các quy tắc cho phép cấu tạo hệ thanh có khả năng chịu được tải trọng. Trong chương này thực hiện nhiệm vụ đó đối với các hệ thanh phẳng.

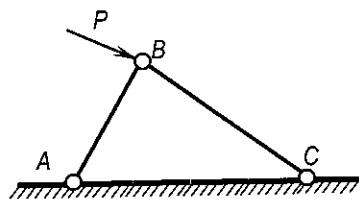
### 1.1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Để xây dựng quy tắc cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng ta cần tìm hiểu các khái niệm sau:

#### 1.1.1. Hệ bất biến hình

*Hệ bất biến hình (BBH) là hệ khi chịu tải trọng vẫn giữ nguyên được hình dạng hình học ban đầu nếu xem biến dạng đàn hồi của các cấu kiện là không đáng kể hoặc xem là tuyệt đối cứng.*

Hệ trên hình 1.1 là BBH vì dưới tác dụng của tải trọng, nếu xem các cấu kiện là tuyệt đối cứng thì hệ vẫn giữ nguyên dạng hình học ban đầu. Thực vậy, khi xem các cấu kiện  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  là tuyệt đối cứng tức là chiều dài của chúng không đổi thì như ta đã biết, với ba cạnh xác định ta chỉ có thể dựng được một tam giác duy nhất  $ABC$  mà thôi.



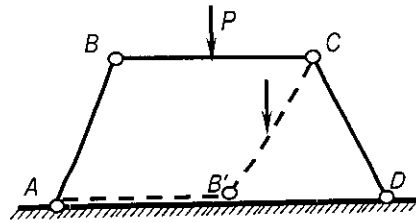
Hình 1.1

Trừ một vài trường hợp đặc biệt còn nói chung các kết cấu trong xây dựng phải là hệ BBH. Hệ BBH có khả năng chịu tải trọng; nội lực phát sinh trong hệ cân bằng với ngoại lực.

#### 1.1.2. Hệ biến hình

*Hệ biến hình (BH) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi hình dạng hình học một cách hữu hạn mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.*

Kết cấu trên hình 1.2 là hệ BH. Dưới tác dụng của tải trọng, hệ  $ABCD$  có thể thay đổi dạng hình học hữu hạn và có thể sụp đổ theo đường đứt nét  $AB'CD$  như trên hình 1.2 mặc dù ta xem các thanh  $AB, BC, CD$  là tuyệt đối cứng.

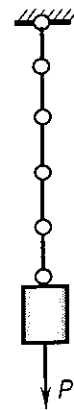


Hình 1.2

Nói chung kết cấu biến hình không có khả năng chịu tải trọng, do đó hệ BH không được sử dụng trong các công trình xây dựng.

Đôi khi trong thực tế ta cũng dùng hệ BH để chịu lực nếu tải trọng tác dụng có thể làm cho hệ nằm trong trạng thái cân bằng.

Ví dụ, hệ dây xích trên hình 1.3 là hệ BH (khi tải trọng tác dụng theo phương ngang, hệ thay đổi dạng hình học ban đầu) nhưng vẫn có khả năng chịu lực tác dụng dọc theo các mắt xích (phương đứng).



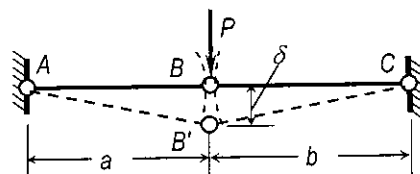
Hình 1.3

### 1.1.3. Hệ biến hình tức thời

Hệ biến hình tức thời (BHTT) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi dạng hình học vô cùng bé (nếu bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao về sự thay đổi kích thước hình học) mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Sau khi thay đổi dạng hình học vô cùng bé, hệ lại trở nên bất biến hình.

Trên hình 1.4 là một ví dụ đơn giản về hệ BHTT. Để xác nhận điều đó ta cần chứng minh điểm  $B$  chỉ có khả năng chuyển dời một đoạn  $BB'$  vô cùng bé.



Hình 1.4

Thật vậy, dưới tác dụng của tải trọng, điểm  $B$  thuộc thanh  $AB$  có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ . Tương tự, điểm  $B$  thuộc thanh  $BC$  có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CB$ . Vì  $ABC$  thẳng hàng nên hai đường tròn đó tiếp xúc tại  $B$ . Do đó điểm  $B$  có khả năng chuyển dời vô cùng bé theo phương của tiếp tuyến chung tới  $B'$  với một lượng bằng  $\delta$ . Chuyển dời vô cùng bé này có thể xảy ra được bởi vì độ chênh lệch giữa chiều dài của các thanh ở vị trí nằm nghiêng và vị trí nằm ngang là đại lượng vô cùng bé bậc hai.



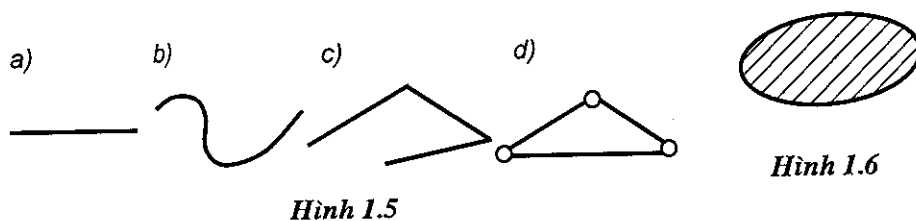
Sau khi  $B$  chuyển dời vô cùng bé tới  $B'$ , điểm  $B'$  có khuynh hướng chuyển dời theo hai đường tròn có tâm  $A$  và  $C$  với bán kính  $AB'$  và  $CB'$ . Hai đường tròn giao nhau nên  $B'$  không có khả năng chuyển động tiếp tục, hệ trở nên BBH.

Như vậy hệ đã cho chỉ có khả năng thay đổi dạng hình học vô cùng bé và là hệ BHTT.

Trong xây dựng người ta không dùng những hệ BHTT hoặc những hệ gần biến hình tức thời (những hệ BBH song cách bố trí có thể dễ dàng dẫn đến BHTT nếu thay đổi nhỏ vị trí của chúng, chẳng hạn hệ có dạng đường đứt nét  $AB'C$  trên hình 1.4) vì như sau này ta sẽ thấy, trong hệ gần biến hình tức thời thường phát sinh nội lực rất lớn.

#### 1.1.4. Miếng cứng

Hệ bất biến hình trong thực tế có nhiều hình dạng khác nhau nhưng cùng chung tính chất là có khả năng chịu tải trọng. Để tiện cho việc nghiên cứu ta khái quát hóa các hệ bất biến hình bằng cách đưa ra khái niệm *miếng cứng*.



*Miếng cứng là một hệ phẳng bất kỳ bất biến hình một cách rõ rệt.*

Ví dụ, các hệ trên hình 1.5 đều là các miếng cứng.

Quy ước biểu diễn các miếng cứng như trên hình 1.6:

#### 1.1.5. Bậc tự do

*Bậc tự do của hệ là số thông số độc lập đủ để xác định vị trí của hệ đối với một hệ khác được xem là bất động.*

Đối với một hệ trục tọa độ bất động trong mặt phẳng, một điểm có hai bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau, còn một miếng cứng có ba bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau và một chuyển động quay quanh giao điểm của hai phương đó.

## 1.2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT

Để nối các miếng cứng với nhau ta dùng các liên kết. Liên kết có thể đơn giản hay phức tạp.

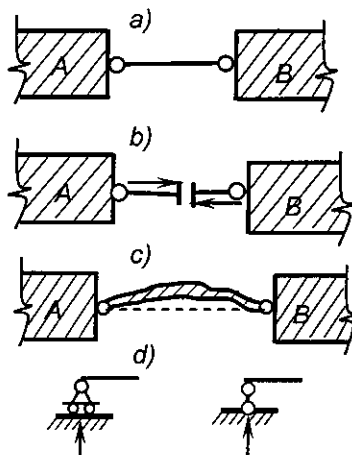
### 1.2.1. Liên kết đơn giản

Liên kết đơn giản là liên kết chỉ nối hai miếng cứng với nhau.

Liên kết đơn giản được chia thành ba loại như sau:

#### 1. Liên kết loại một hay liên kết thanh

- *Cấu tạo*: liên kết được hình thành từ một thanh có khớp lý tưởng ở hai đầu.
- *Tính chất động học*: Nếu dùng liên kết thanh để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động (hình 1.7a) thì sẽ khử được một bậc tự do của miếng cứng B đối với miếng cứng A vì B không thể di chuyển theo phương dọc trục thanh.
- *Tính chất tĩnh học*: trong liên kết thanh phát sinh một phản lực liên kết dọc theo trục thanh (hình 1.7b).



Hình 1.7

Như vậy, một liên kết thanh khử được một bậc tự do và phát sinh trong đó một phản lực dọc trục thanh.

Căn cứ vào tính chất nói trên ta thấy cấu tạo của liên kết thanh không nhất thiết phải là thanh thẳng mà có thể là một miếng cứng bất kỳ miễn là hai đầu có khớp lý tưởng như trên hình 1.7c. Trong trường hợp này liên kết vẫn khử được một bậc tự do theo phương dọc theo đường nối hai khớp và trong liên kết vẫn phát sinh một phản lực hướng theo phương nối trên.

Trường hợp đặc biệt, khi miếng cứng bất động là Trái Đất thì liên kết thanh được gọi là gối tựa di động (hình 1.7d).

#### 2. Liên kết loại hai hay liên kết khớp

- *Cấu tạo*: liên kết khớp được cấu tạo như trên hình 1.8a.
- *Tính chất động học*: Khi dùng liên kết khớp để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động thì liên kết này khử được hai bậc tự do

của  $B$  so với  $A$  vì miếng cứng  $B$  không thể chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ nào trong mặt phẳng đang xét mà chỉ có thể quay quanh miếng cứng  $A$  tại khớp  $K$ .

- **Tính chất tĩnh học:** Trong liên kết sẽ phát sinh một phản lực đặt tại  $K$  nhưng có phương bất kỳ nên thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định giao nhau tại khớp  $K$  (hình 1.8b).

Như vậy, một liên kết khớp khử được hai bậc tự do và phát sinh hai thành phần phản lực đi qua khớp.

Về mặt động học, liên kết khớp tương đương với hai liên kết thanh. Nếu nối miếng cứng  $B$  với miếng cứng  $A$  bằng hai thanh thì miếng cứng  $B$  bị khử mất hai bậc tự do và chỉ còn có thể quay quanh giao điểm  $K$  của hai thanh (hình 1.8c). Ta gọi giao điểm đó là **khớp giả tạo**.

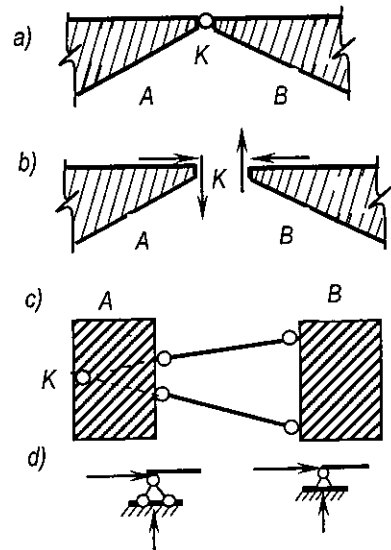
Trường hợp đặc biệt, khi miếng cứng bất động là Trái Đất thì liên kết khớp được gọi là gối tựa bất động (hình 1.8d).

### 3. Liên kết loại ba hay liên kết hàn

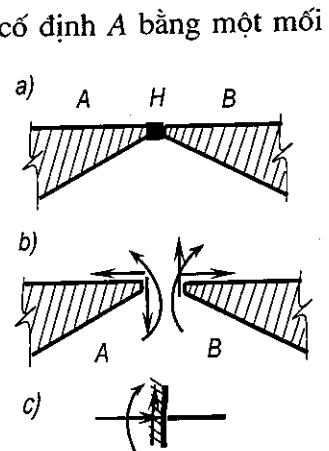
- **Cấu tạo:** Nối miếng cứng  $B$  với miếng cứng cố định  $A$  bằng một mối hàn, tức là gắn chặt  $B$  vào  $A$  (hình 1.9a).

- **Tính chất tĩnh học:** Mối hàn khử được ba bậc tự do của  $B$  đối với  $A$ . Thật vậy, miếng cứng  $B$  không di chuyển tịnh tiến và cũng không quay được so với  $A$ .

- **Tính chất động học:** Trong liên kết hàn phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt bất kỳ. Đưa lực này về một điểm xác định tại mối hàn ta sẽ được một thành phần mômen và hai thành phần phản lực hướng theo hai phương xác định nào đó.



Hình 1.8



Hình 1.9

Như vậy, một liên kết hàn khử được ba bậc tự do và phát sinh ba thành phần phản lực.

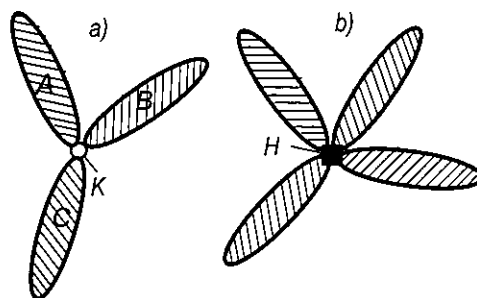
Một liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hay tương đương với một thanh và một khớp nếu chúng được sắp xếp hợp lý (dưới đây ta sẽ tìm hiểu về điều kiện sắp xếp hợp lý).

Trường hợp đặc biệt, khi miếng cứng bất động là Trái Đất thì liên kết hàn được gọi là liên kết ngầm (hình 1.9d).

### 1.2.2. Liên kết phức tạp

*Liên kết phức tạp là liên kết nối nhiều miếng cứng, số miếng cứng lớn hơn hai.*

Trong thực tế ta có thể gặp các liên kết phức tạp dưới dạng khớp phức tạp (hình 1.10a) hoặc liên kết hàn phức tạp (hình 1.10b).



Hình 1.10

Để tiện cho việc nghiên cứu, ta quy đổi liên kết phức tạp về các liên kết đơn giản cùng loại tương đương. Do đó cần xây dựng khái niệm về độ phức tạp.

*Độ phức tạp của một liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.*

Ví dụ liên kết khớp phức tạp trên hình 1.10a tương đương với hai liên kết khớp đơn giản. Thật vậy, coi A là miếng cứng cố định, nối B với A bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của B. Tiếp đó nối C với A cũng bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của C. Như vậy khớp K khử được bốn bậc tự do tức là tương đương với hai khớp đơn giản. Do đó độ phức tạp của liên kết này bằng hai.

Từ nhận xét đó ta dễ dàng suy ra: *độ phức tạp của một liên kết phức tạp bằng số lượng các miếng cứng quy tụ vào liên kết trừ đi một.*

$$p = D - 1 \quad (1.1)$$

trong đó:

$p$  – độ phức tạp của liên kết phức tạp;

$D$  – số miếng cứng quy tụ vào liên kết phức tạp.

Ví dụ, liên kết phức tạp trên hình 1.10a có độ phức tạp là  $p = 3 - 1 = 2$ ; liên kết phức tạp trên hình 1.10b có độ phức tạp là  $p = 5 - 1 = 4$ .

### 1.3. CÁCH NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

Để nối các miếng cứng ta phải dùng các liên kết. Như vậy, vấn đề đặt ra là: *muốn nối một số lượng xác định các miếng cứng thì cần sử dụng bao nhiêu liên kết và các liên kết đó phải được bố trí như thế nào để bảo đảm cho hệ thu được là bất biến hình.* Để giải đáp điều đó ta cần lần lượt nghiên cứu điều kiện cần và điều kiện đủ về cách nối các miếng cứng thành một hệ bất biến hình.

#### 1.3.1. Điều kiện cần

Điều kiện cần biểu thị mối quan hệ về số lượng giữa các miếng cứng với số lượng các liên kết có trong hệ đang xét. Ta lần lượt khảo sát các trường hợp sau:

##### 1. Hệ bất kỳ

Giả sử trong hệ có  $D$  miếng cứng được nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp,  $H$  liên kết hàn, đã quy đổi về liên kết đơn giản.

Coi một miếng cứng nào đó là bất động thì  $(D-1)$  miếng cứng còn lại sẽ có  $3(D-1)$  bậc tự do cần phải khử so với miếng cứng bất động. Đó là yêu cầu.

Xét về khả năng, với số lượng các liên kết nói trên có thể khử được  $T+2K+3H$  bậc tự do.

Gọi  $n$  là hiệu số giữa số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu), ta có:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D-1).$$

Có thể xảy ra ba tình huống sau:

- $n < 0$  : khả năng thấp hơn yêu cầu, chứng tỏ *hệ thiếu liên kết*. Ta có thể kết luận ngay là hệ biến hình.
- $n = 0$  : khả năng đáp ứng đúng với yêu cầu, chứng tỏ *hệ đủ liên kết*. Lúc này hệ có triển vọng BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là tĩnh định.
- $n > 0$  : khả năng lớn hơn yêu cầu, chứng tỏ *hệ thừa liên kết*. Trong trường hợp này hệ có triển vọng là BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là siêu tĩnh. Số  $n$  biểu thị số lượng liên kết thừa tương đương loại một.

Như vậy, trong trường hợp hệ bất kỳ ta có điều kiện cần:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1) \geq 0. \quad (1.2)$$

## 2. Hệ nối với Trái Đất

Trong thực tế, phần lớn các công trình đều được nối với Trái Đất. Nếu quan niệm Trái Đất là một miếng cứng thì ta vẫn có thể sử dụng công thức (1.2) để khảo sát điều kiện cần cho những hệ này. Tuy nhiên bài toán hệ nối với Trái Đất cũng khá phổ biến nên để tiện cho việc sử dụng ta sẽ thiết lập công thức biểu thị điều kiện cần cho trường hợp này.

Giả sử trong hệ có  $D$  miếng cứng không kể Trái Đất, được nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp,  $H$  liên kết hàn đã quy đổi về liên kết đơn giản và được nối với Trái Đất bằng  $C$  liên kết tựa tương đương loại một (xem bảng 1.1).

Bảng 1.1

Tên	Gối di động	Gối cố định	Ngàm trượt	Ngàm cứng
Sơ đồ				
C =	1	2		3

Coi Trái Đất là bất động, như vậy để nối  $D$  miếng cứng với nhau và với Trái Đất thì yêu cầu phải khử được  $3D$  bậc tự do. Về khả năng, với số lượng các liên kết đã nêu, có thể khử được  $T + 2K + 3H + C$  bậc tự do.

Cũng lý luận tương tự như trên, trong trường hợp này, ta có điều kiện cần:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0 \quad (1.3)$$

Công thức này có ý nghĩa tương tự như (1.2) và là trường hợp đặc biệt của (1.2).

## 3. Hệ dàn

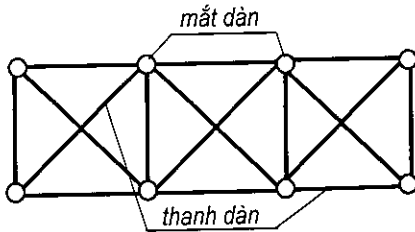
Dàn là hệ gồm các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



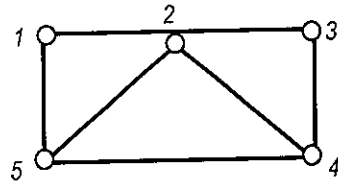
Giao điểm của các thanh được gọi là *mắt*.

Hệ trên hình 1.11 là hệ dàn. Hệ trên hình 1.12 không phải là hệ dàn vì thanh 1-3 không phải chỉ có khớp ở hai đầu.

Đối với hệ dàn, ta cũng có thể áp dụng công thức (1.2) hoặc (1.3) để khảo sát song cần chú ý là trong hệ dàn các liên kết khớp thường là khớp phức tạp nên cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát, dưới đây ta sẽ thiết lập các điều kiện cần áp dụng riêng cho hệ dàn, trong đó không cần quan tâm đến độ phức tạp của liên kết khớp.



Hình 1.11



Hình 1.12

**a) Trường hợp dàn không nối với đất:** Giả sử trong hệ dàn có  $D$  thanh và  $M$  mắt. Xem một thanh nào đó là miếng cứng bất động. Như vậy hệ còn lại  $D-1$  thanh và  $M-2$  mắt cần được nối vào miếng cứng bất động. Như đã biết, mỗi điểm (mắt) trong mặt phẳng có hai bậc tự do, do đó để nối  $(M-2)$  mắt thì số bậc tự do cần phải khử là  $2(M-2)$ , đó là yêu cầu. Xét về khả năng, hệ còn lại  $(D-1)$  thanh tương đương loại một nên khả năng có thể khử được là  $(D-1)$  bậc tự do. Cũng lập luận tương tự như trên ta có công thức biểu thị điều kiện cần cho trường hợp dàn không nối với đất như sau:

$$n = (D-1) - 2(M-2) \geq 0,$$

hay

$$\boxed{n = D + 3 - 2M \geq 0} \quad (1.4)$$

Ý nghĩa của (1.4) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

**b) Trường hợp hệ dàn nối với Trái Đất:** Giả sử trong hệ dàn có  $D$  thanh,  $M$  mắt và  $C$  liên kết tựa tương đương loại một nối với Trái Đất. Coi Trái Đất là miếng cứng bất động thì số mắt cần nối vào miếng cứng bất động đó là  $M$ . Do đó số bậc tự do cần phải khử là  $2M$ . Về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là  $D + C$ .

Tương tự như trên, ta thiết lập được công thức biểu thị điều kiện cân cho hệ dàn nối với đất như sau:

$$n = D + C - 2M \geq 0 \quad (1.5)$$

Ý nghĩa của (1.5) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

### 1.3.2. Điều kiện đủ

Khi điều kiện cân đã được thỏa mãn, hệ có thể là đủ hoặc thừa liên kết nhưng nếu cách bố trí liên kết không được hợp lý thì các liên kết này vẫn không có khả năng khử tất cả các bậc tự do của hệ và hệ có thể là biến hình hoặc biến hình tức thời.

Như vậy, điều kiện đủ để cho hệ bất biến hình là các liên kết cần được bố trí hợp lý.

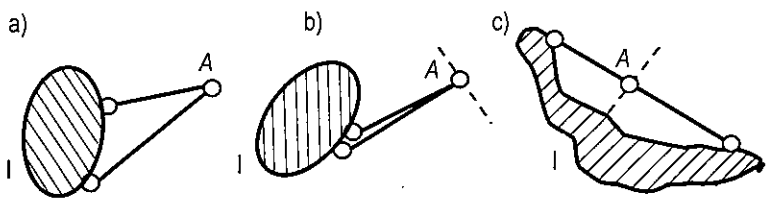
Nhưng làm thế nào để có thể khẳng định được các liên kết đã bố trí là hợp lý? Để giải quyết vấn đề này ta lần lượt khảo sát một số trường hợp cụ thể.

#### 1. Cách nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành hệ BBH

Xét miếng cứng bất động  $I$  và một điểm (mắt)  $A$  nằm ngoài miếng cứng đó. Để nối điểm  $A$  vào miếng cứng ta cần phải khử hai bậc tự do của  $A$  nghĩa là phải dùng hai liên kết thanh như trên hình 1.13a. Hai thanh này không được nằm trên cùng một đường thẳng như trên hình 1.13b, c, vì nếu không thì điểm  $A$  có thể chuyển vị vô cùng bé theo phương vuông góc với trục của hai thanh và hệ là BHTT (chứng minh tương tự như đối với hệ trên hình 1.4).

Như vậy, điều kiện cần và đủ để nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành một hệ bất biến hình là phải dùng hai thanh không thẳng hàng.

Gọi hệ hai thanh không thẳng hàng này là bộ đôi.

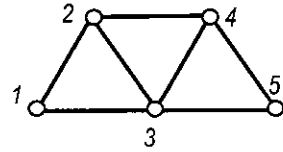


Hình 1.13

Do sự cấu tạo hợp lý và chỉ vừa đủ để liên kết một điểm vào một hệ nên bộ đôi có tính chất sau:

Bộ đôi không làm thay đổi tính chất động học của hệ, nghĩa là nếu hệ cho ban đầu là BBH (hoặc BH, BHTT) thì sau khi thêm hoặc bớt một bộ đôi ta sẽ được một hệ mới, hệ mới này vẫn là BBH (hoặc BH, BHTT).

Có thể vận dụng tính chất nói trên của bộ đôi để phát triển miếng cứng, nhằm mục đích đưa hệ nhiều miếng cứng về hệ gồm một số ít các miếng cứng để khảo sát cho dễ dàng.



Hình 1.14

Ta sẽ tìm hiểu cách phát triển miếng cứng thông qua hệ trên hình 1.14. Tam giác khớp  $1-2-3$  là một miếng cứng, thêm vào miếng cứng này bộ đôi  $(4-2)$   $(4-3)$ , ta sẽ được hệ mới  $1-2-4-3$  cũng BBH. Tương tự, thêm vào hệ BBH  $1-2-4-3$  bộ đôi  $(5-4)$   $(5-3)$  ta sẽ được hệ mới  $1-2-4-5-3$  cũng BBH. Như vậy, có thể kết luận toàn hệ là BBH.

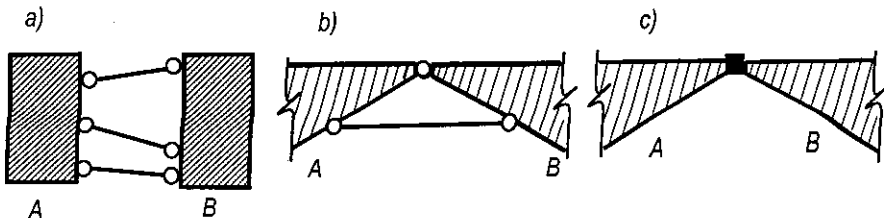
Cũng có thể phân tích sự cấu tạo hình học theo trình tự ngược lại (thu hẹp hệ). Theo cách này, ta lần lượt loại ra khỏi hệ cho ban đầu từng bộ đôi một, cuối cùng sẽ được một hệ mới, căn cứ vào cấu tạo của hệ này ta có thể kết luận về sự cấu tạo hình học của hệ cho ban đầu. Ví dụ, với hệ vẽ trên hình 1.14 ta lần lượt loại bỏ khỏi hệ các bộ đôi  $(5-4)(5-3)$ ;  $(4-2)(4-3)$  và  $(2-1)(2-3)$ , hệ còn lại là thanh  $1-3$  bất biến hình, do đó hệ cho ban đầu là BBH.

## 2. Cách nối hai miếng cứng thành một hệ BBH

Từ điều kiện cần ta thấy: để nối hai miếng cứng thành hệ BBH thì tối thiểu phải sử dụng ba thanh (hình 1.15a); một khớp và một thanh (hình 1.15b), hoặc một mối hàn (hình 1.15c).

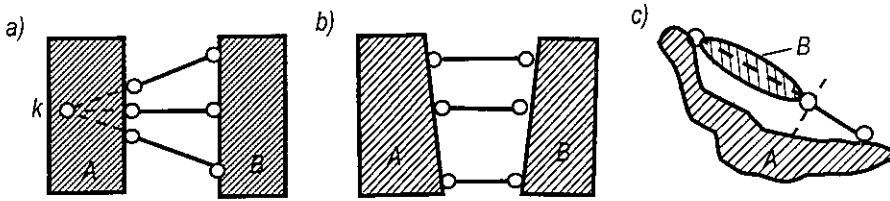
Sử dụng một mối hàn (hình 1.15c) để nối hai miếng cứng thì bao giờ cũng được một hệ BBH.

Nếu sử dụng ba thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *ba liên kết thanh không được đồng quy hoặc song song* (hình 1.15a).



Hình 1.15

Thật vậy, trong trường hợp bố trí ba thanh đồng quy như trên hình 1.16a thì cả ba thanh đó đều không ngăn cản được chuyển vị xoay vô cùng bé với tâm quay  $K$  của miếng cứng  $B$  quanh miếng cứng quy ước bất động  $A$ . Chuyển vị xoay đó là vô cùng bé bởi vì sau khi dịch chuyển, ba thanh trở thành không đồng quy nữa và hệ lại BBH. Hệ trên hình 1.16a là BHTT.



Hình 1.16

Khi bố trí ba thanh song song như trên hình 1.16b thì hệ là BHTT bởi vì lúc này hệ là trường hợp đặc biệt của trường hợp ba thanh đồng quy (giao điểm của ba thanh ở vô cùng). Khi ba thanh song song có chiều dài bằng nhau thì chuyển vị xảy ra là hữu hạn, hệ sẽ biến hình.

Nếu sử dụng một khớp và một thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *liên kết thanh không được đi qua liên kết khớp* (hình 1.15b).

Trong trường hợp liên kết thanh đi qua liên kết khớp thì hệ sẽ BHTT (hình 1.16c), cách chứng minh như đã thực hiện với hệ trên hình 1.4.

Tóm lại, trong bài toán hai miếng cứng ta có thể phát biểu như sau:

*Để nối hai miếng cứng thành một hệ bất biến hình thì điều kiện cần và đủ là phải sử dụng ít nhất:*

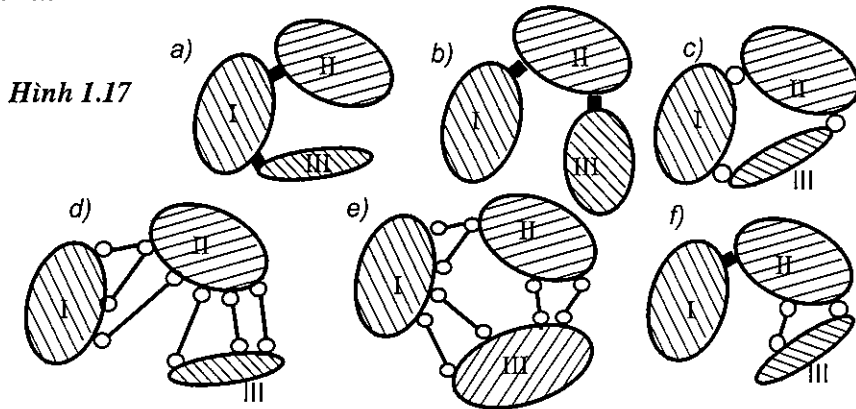
- hoặc ba liên kết thanh không đồng quy hay không song song;
- hoặc một liên kết khớp và một liên kết thanh không đi qua khớp;
- hoặc một mối hàn.

### 3. Cách nối ba miếng cứng thành một hệ BBH

Từ điều kiện cần ta thấy: để nối ba miếng cứng thành một hệ BBH thì tối thiểu phải sử dụng sáu liên kết tương đương loại một. Như vậy có thể thực hiện theo nhiều cách nối như sau:

- sử dụng hai mối hàn (hình 1.17a, b);
- sử dụng ba khớp (hình 1.17c);
- sử dụng sáu liên kết thanh (hình 1.17d, e);

- sử dụng một mối hàn, một khớp và một thanh (hình 1.17f);
- v. v...



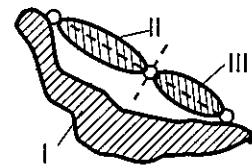
Hình 1.17

Qua những cách nối ba miếng cứng như trên hình 1.17 ta thấy: trong một số trường hợp có thể sử dụng các điều kiện nối hai miếng cứng đã biết để phân tích điều kiện đủ. Các cách nối trên hình 1.17a, b, d, f thuộc trường hợp này. Ví dụ với hệ trên hình 1.17f, ta có thể xem như đã dùng một mối hàn để nối hai miếng cứng I và II thành hệ BBH, tiếp đó nối III với hệ BBH vừa thu được bằng một khớp và một thanh không đi qua khớp.

Khi ba miếng cứng được liên kết từng cặp hai miếng cứng với nhau bằng một khớp hoặc hai thanh như trên hình 1.17c, e, ta không thể vận dụng điều kiện nối hai miếng cứng để phân tích mà phải sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng như sau:

*Điều kiện cần và đủ để nối ba miếng cứng là ba khớp thực hoặc giả tạo tương hỗ (giao điểm của hai thanh nối từng cặp hai miếng cứng) không được nằm trên cùng một đường thẳng.*

Nếu ba khớp tương hỗ cùng nằm trên một đường thẳng thì hệ sẽ BHTT. Hệ vẽ trên hình 1.18 là BHTT vì có cấu tạo tương tự như hệ BHTT đã khảo sát trên hình 1.4.



Hình 1.18

#### 4. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi điều kiện cần đã được thỏa mãn ta có thể phân tích điều kiện đủ theo biện pháp sau:

Vận dụng tính chất của bộ đôi, điều kiện nối hai miếng cứng hoặc ba miếng cứng đã biết để phát triển từng miếng cứng của hệ hoặc thu hẹp hệ đã

cho đến mức tối đa cho phép. Như vậy, ta sẽ đưa bài toán hệ có nhiều miếng cứng về bài toán mới có số lượng miếng cứng ít hơn.

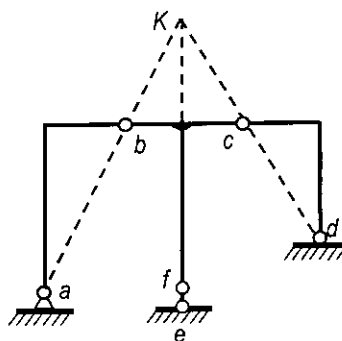
- \* Nếu hệ mới được đưa về một miếng cứng thì hệ sẽ bất biến hình.
- \* Nếu hệ mới được đưa về hai miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối hai miếng cứng để khảo sát.
- \* Nếu hệ mới được đưa về ba miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng để khảo sát.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có thể sử dụng biện pháp trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong những trường hợp phức tạp, khi không thể vận dụng các biện pháp trên để phân tích ta có thể áp dụng các phương pháp khác như phương pháp tải trọng bằng không; phương pháp động học (xem [6]) hoặc phương pháp thay thế liên kết.

#### 1.4. VÍ DỤ ÁP DỤNG

*Ví dụ 1.1.*[6]. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.19.

\* **Điều kiện cần.** Hệ đã cho là hệ nối với đất, ta sẽ dùng công thức (1.3) để khảo sát điều kiện cần. Có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau:



Hình 1.19

a) *Quan niệm mỗi thanh thẳng là một miếng cứng*

Lúc này ta có:  $D = 6; T = 0; K = 2; H = 3; C = 5$ .

Theo (1.3):  $n = 0 + 2.2 + 3.3 + 5 - 3.6 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

Cách quan niệm này chỉ làm phức tạp bài toán vì hai miếng cứng được nối với nhau bằng một mối hàn thực ra đã trở thành một miếng cứng.

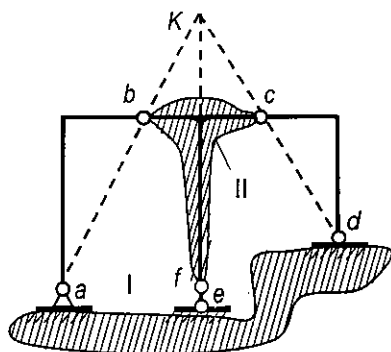
b) *Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng*

Lúc này ta có  $D = 3$  (các miếng cứng  $ab, bcf, cd$ ). Các liên kết nối giữa ba miếng cứng:  $T = 0; K = 2; H = 0$ . Số liên kết nối với đất tương đương loại một:  $C = 5$ .

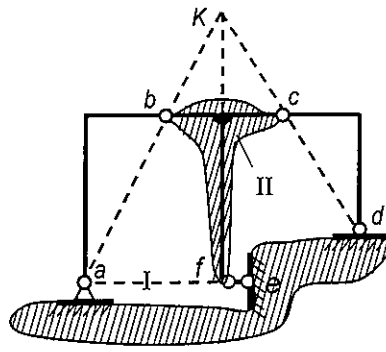
Theo (1.3):  $n = 0 + 2.2 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0$ . Hệ đủ liên kết.

c) Giải theo cách chọn số miếng cứng tối thiểu

Quan niệm thanh gậy khúc  $bcf$  là một miếng cứng còn các thanh gậy khúc  $ab, cd$  là liên kết loại một nối với đất, ta có:  $D=1; T=0; K=0; H=0; C=3$ . Theo (1.3):  $n = 3-3.1 = 0$ . Hệ đủ liên kết.



Hình 1.20



Hình 1.21

d) Quan niệm Trái Đất là một miếng cứng và sử dụng công thức (1.2)

Lúc này ta có:  $D = 2; T = 3; K = 0; H = 0$ .

Theo (1.2):  $n = 3 + 2.0 + 3.0 - 3(2-1) = 0$ . Hệ đủ liên kết.

Như vậy khi phân tích điều kiện cân ta có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau, song với bất kỳ cách quan niệm nào ta cũng thu được một kết quả thống nhất.

\* **Điều kiện đủ.** Hệ đã cho có thể đưa về bài toán hai miếng cứng như trên hình 1.20, được nối với nhau bằng ba thanh ( $ab, ef, dc$ ) đồng quy. Vậy hệ là BHTT.

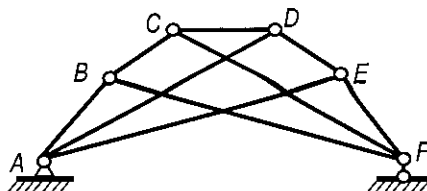
Nếu đổi cách bố trí liên kết sao cho ba thanh  $ab, ef$  và  $dc$  không đồng quy nữa, chẳng hạn như hệ trên hình 1.21, thì sẽ được một hệ BBH.

**Ví dụ 1.2.**[6]. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn trên hình 1.22.

\* **Điều kiện cần.** Bài toán này là hệ dàn nối với đất nên ta sẽ sử dụng công thức (1.5) để khảo sát.

Trong trường hợp này ta có:

$$D = 9; M = 6; C = 3.$$



Hình 1.22



Do đó theo (1.5):

$$n = 9 + 3 - 2.6 = 0.$$

Hệ đủ liên kết.

\* **Điều kiện đủ.** Có thể dựa vào nhận xét sau để làm đơn giản bài toán: Trường hợp hệ nối với đất bằng ba liên kết tựa bố trí hợp lý, nếu phần hệ chưa nối với đất mà BBH thì toàn bộ hệ sẽ BBH. Do đó, trong trường hợp này ta có thể loại bỏ Trái Đất để phân tích sự cấu tạo.

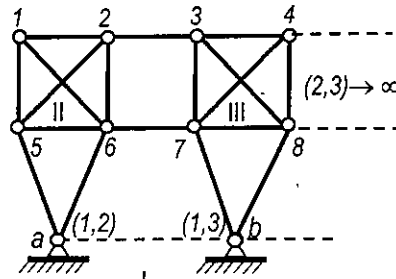
Quan niệm hai tam giác khớp  $ADE$  và  $FBC$  là hai miếng cứng. Như vậy phần dàn chưa nối với đất gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng ba thanh  $AB, CD$  và  $EF$  không đồng quy hoặc song song. Kết luận: hệ BBH.

**Ví dụ 1.3.**[6]. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.23.

\* **Điều kiện cần.** Hệ đã cho là hệ dàn nối với đất. Ta có:  $D = 18; M = 10; C = 4$ . Theo (1.5):  $n = 18 + 4 - 2.10 = 2 > 0$ . Hệ thừa hai liên kết tương đương loại một.

\* **Điều kiện đủ.** Gọi Trái Đất là miếng cứng  $I$ . Từ tam giác khớp  $a-5-6$  ta có thể phát triển thành miếng cứng  $a-5-1-2-6$  gọi là miếng cứng  $II$  bằng cách thêm vào hai bộ đôi, chẳng hạn  $(1-5)(1-6)$  và  $(2-5)(2-6)$ .

Trong quá trình phát triển thành miếng cứng  $II$  ta thấy có một thanh thừa. Tương tự ta cũng được miếng cứng  $b-7-3-4-8$  gọi là miếng cứng  $III$ ; trong đó cũng có một thanh thừa.



Hình 1.23

Như vậy bài toán được đưa về ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ.

Khớp tương hỗ  $(2,3)$  nối  $II$  với  $III$  là giao điểm của hai thanh song song nên ở xa vô cùng theo phương ngang. Các khớp tương hỗ  $(1,2)$  và  $(1,3)$  nằm trên đường thẳng song song với hai thanh nối hai miếng cứng  $II$  và  $III$  nên khớp  $(2,3)$  sẽ nằm trên đường thẳng nối  $(1,2)$  và  $(1,3)$ . Kết luận: hệ BHHT.

Trong trường hợp này, cũng có thể quan niệm trái đất là một miếng cứng có hai khớp  $a, b$  được dùng để nối hai miếng cứng  $II$  và  $III$ , giữ vai trò như

một liên kết thanh  $ab$ . Bài toán đưa về trường hợp hai miếng cứng  $II$  và  $III$  được nối với nhau bằng ba thanh song song  $2-3$ ,  $6-7$  và  $a-b$  có chiều dài khác nhau. Kết luận: hệ BHTT.

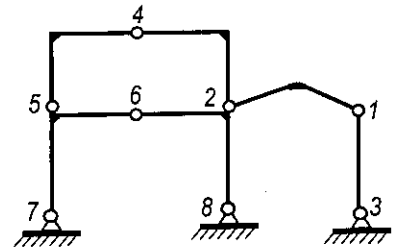
**Ví dụ 1.4.**[6]. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.24.

\* **Điều kiện cần.** Từ điều kiện cần (1.3) ta dễ dàng tìm được  $n = 0$  tức là hệ đủ liên kết.

\* **Điều kiện đủ.** Nếu chú ý là có thể quan niệm liên kết thanh một cách khái quát hơn như trên hình 1.7c thì ta có thể vận dụng tính chất của bộ đôi để giải bài toán này bằng biện pháp thu hẹp hoặc phát triển miếng cứng như sau:

Loại bỏ bộ đôi  $(1-2)(1-3)$  ra khỏi hệ thì hệ còn lại là  $7-5-4-2-8$  không thay đổi tính chất động học. Tiếp đó loại bỏ bộ đôi  $(4-5)(4-2)$  thì hệ còn lại là  $7-6-8$  cũng vẫn không thay đổi tính chất động học. Cuối cùng sau khi loại bỏ bộ đôi  $(6-7)(6-8)$  ta được hệ còn lại là Trái Đất. Vì Trái Đất là hệ BBH nên toàn bộ hệ đã cho cũng là BBH.

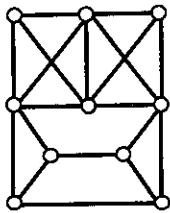
Cũng có thể phân tích bài toán bằng cách phát triển miếng cứng theo thứ tự ngược lại.



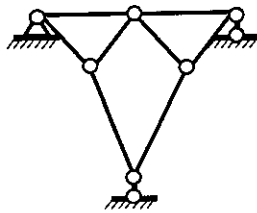
Hình 1.24

## BÀI TẬP CHƯƠNG 1

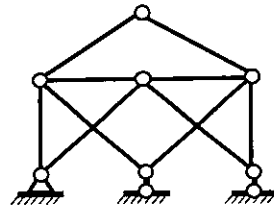
I.1 – I.10.[7]. Vận dụng điều kiện cân và đủ để xét xem các hệ cho trên các hình I.1 – I.10 là bất biến hình hay không bất biến hình.



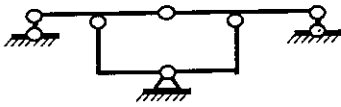
Hình I.1



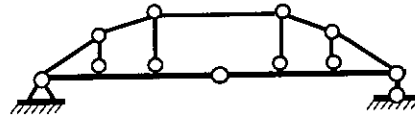
Hình I.2



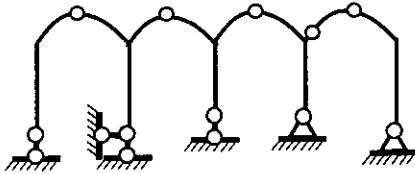
Hình I.3



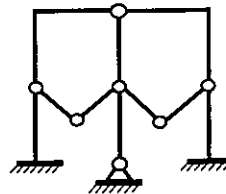
Hình I.4



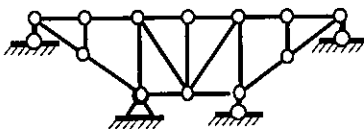
Hình I.5



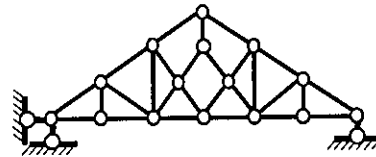
Hình I.6



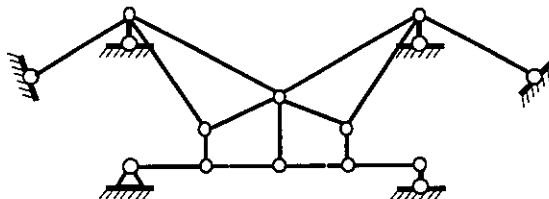
Hình I.7



Hình I.8



Hình I.9



Hình I.10



# 2

## CÁCH XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ THANH PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

### 2.1. NGUYÊN TẮC XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

Xuất phát từ định nghĩa hệ tĩnh định đã nêu trong chương Mở đầu, ta thấy: khi xác định nội lực chỉ cần sử dụng các điều kiện cân bằng, không yêu cầu sử dụng các điều kiện vật lý và biến dạng. Do đó, nội lực trong hệ tĩnh định chỉ phụ thuộc các đại lượng tham gia phương trình cân bằng như: tải trọng, sơ đồ hình học của công trình, không phụ thuộc độ cứng của các cấu kiện (vật liệu, kích thước tiết diện) cũng như không phụ thuộc công trình làm việc trong hay ngoài giai đoạn đàn hồi. Nội lực chỉ phụ thuộc vật liệu và kích thước tiết diện khi tính hệ thanh với trọng lượng bản thân chưa biết.

Cũng cần chú ý là khái niệm về nội lực tại một tiết diện  $k$  nào đó của hệ, hoàn toàn có thể đồng nhất với khái niệm về phản lực trong các liên kết nếu quan niệm tiết diện  $k$  là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện  $k$ . Như vậy, có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

Để xác định phản lực trong các liên kết hoặc nội lực tại một tiết diện nào đó ta sử dụng phương pháp mặt cắt nhằm biến nội lực thành ngoại lực, thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng giải tích, từ đó suy ra các phản lực hoặc nội lực cần tìm.

#### Thứ tự tiến hành:

- 1) Thực hiện các mặt cắt qua liên kết cần xác định phản lực (hoặc qua tiết diện cần tìm nội lực). Mỗi mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập.
- 2) Khảo sát một phần hệ nào đó. Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các phản lực (nội lực) tương ứng tại các liên kết (tiết diện) bị cắt. Các phản lực (nội lực) chưa biết có thể giả thiết hướng theo chiều dương.
- 3) Lập các điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng giải tích cho phần hệ khảo sát. Với mỗi mặt cắt ta có các điều kiện cân bằng dưới dạng tổng hình

chiều trên một số trục hoặc tổng mômen đối với một số điểm như đã trình bày trong mục 2, chương Mở đầu.

*Trong hệ tĩnh định ta sẽ thiết lập được một hệ phương trình cân bằng độc lập vừa đủ để xác định số thành phần phản lực liên kết (nội lực) cần tìm trong hệ.*

Thật vậy, nếu quan niệm hệ bất kỳ gồm  $D$  miếng cứng nối với nhau bằng  $T$  liên kết thanh,  $K$  liên kết khớp đơn giản,  $H$  mối hàn đơn giản, ta có  $T+2K+3H$  thành phần phản lực cần tìm. Số phương trình cân bằng độc lập được xác định bằng số bậc tự do của hệ tức là bằng  $3(D-1)$ . Vì hệ là tĩnh định nên:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D-1) = 0, \text{ hay } 3(D-1) = T + 2K + 3H.$$

Như vậy là số phương trình cân bằng độc lập vừa bằng số thành phần phản lực liên kết cần tìm.

4) Giải hệ phương trình cân bằng ta xác định được các thành phần phản lực cần tìm. Kết quả mang dấu dương thì chiều của thành phần phản lực đúng với chiều giả thiết còn kết quả mang dấu âm thì ngược với chiều đã giả thiết.

**Ví dụ 2.1.**[6]. Xác định các thành phần phản lực tại liên kết khớp  $A$ ,  $B$  và  $C$  (hình 2.1a).

Từ các điều kiện cân bằng của toàn hệ ta xác định các phản lực tựa, kết quả ghi trên hình 2.1a.

Thực hiện mặt cắt 1-1, xét cân bằng miếng cứng  $I$  (hình 2.1b), ta có:

$$\sum X = X_C - X_A = 0; \quad (a)$$

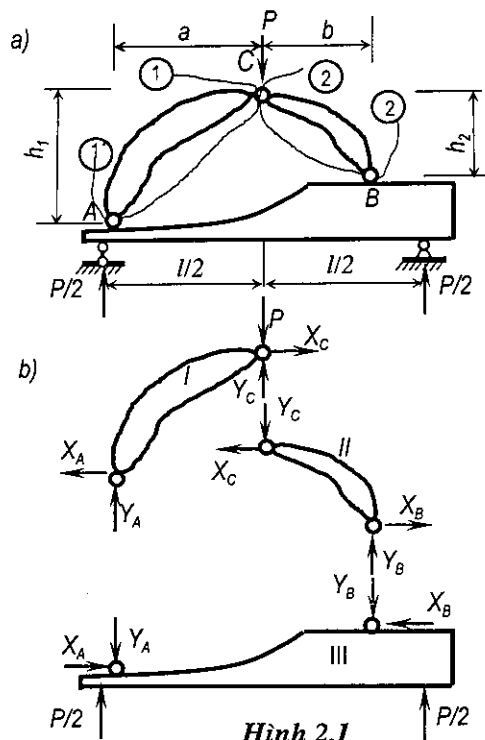
$$\sum Y = Y_A + Y_C - P = 0; \quad (b)$$

$$\sum M_C = Y_A a + X_A h_1 = 0. \quad (c)$$

Thực hiện mặt cắt 2-2; xét cân bằng miếng cứng  $II$  (hình 2.1b):

$$\sum X = X_B - X_C = 0; \quad (d)$$

$$\sum Y = Y_B - Y_C = 0; \quad (e)$$



Hình 2.1

$$\sum M_C = Y_B b + X_B h_2 = 0. \quad (f)$$

Ta được sáu phương trình đủ để xác định sáu thành phần phản lực cần tìm. Kết quả:

$$X_A = X_B = X_C = \frac{-Pab}{bh_1 + ah_2}; \quad Y_A = \frac{Pbh_1}{bh_1 + ah_2}; \quad Y_B = Y_C = \frac{Pah_2}{bh_1 + ah_2}.$$

Về nguyên tắc, khi vận dụng phương pháp mặt cắt để tính hệ tĩnh định ta sẽ lập được một hệ phương trình vừa đủ để xác định các đại lượng chưa biết. Sau này, tùy từng trường hợp cụ thể ta có thể vận dụng linh hoạt các mặt cắt và các phương trình cân bằng để sao cho việc giải hệ phương trình được dễ dàng.

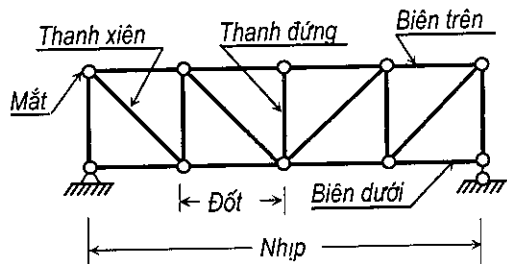
## 2.2. CÁCH TÍNH DÀN TĨNH ĐỊNH

### 2.2.1. Định nghĩa và tính chất chịu lực của dàn

Hệ thanh được gọi là dàn khi được hình thành từ các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh (hình 2.2).

Khoảng cách giữa các gối tựa của dàn gọi là *nhịp*. Giao điểm của các thanh gọi là *mắt dàn*. Những thanh nằm trên chu vi của dàn tạo thành đường *biên trên* và *biên dưới*.

Các thanh nằm bên trong các đường biên tạo thành *hệ thanh bụng*. Hệ thanh bụng gồm có các *thanh đứng* và các *thanh xiên*. Khoảng cách giữa các mắt thuộc đường biên gọi là *đốt* (xem hình 2.2).



Hình 2.2

Để tính toán dàn được đơn giản, ta thừa nhận các giả thiết sau:

- 1) *Mắt của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở mắt có thể xoay một cách tự do không ma sát).*
- 2) *Tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt của dàn.*
- 3) *Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng trên dàn.*

Trong thực tế, các thanh thường được nối với nhau bằng đinh tán hoặc mối hàn, rất ít khi nối bằng khớp (bulông, chốt...). Những mối nối này

không phải là khớp lý tưởng, ngoài ra các thanh đều có trọng lượng riêng, cho nên kết quả tính toán theo các giả thiết trên chỉ là gần đúng, nhưng thường được chấp nhận trong thực tế.

Từ các giả thiết trên ta đi đến kết luận quan trọng như sau:

*Các thanh trong dàn chỉ chịu kéo hoặc nén, nghĩa là trong dàn chỉ tồn tại lực dọc  $N$  mà không có mômen uốn  $M$  và lực cắt  $Q$ .*

Thật vậy, vì trọng lượng bản thân của mỗi thanh trong dàn không đáng kể và tải trọng chỉ đặt ở mắt nghĩa là thanh không chịu tải trọng đặt trực tiếp trên chiều dài của nó, hơn nữa vì các khớp ở hai đầu thanh là lý tưởng nên có thể xem mỗi thanh trong dàn như một liên kết loại một. Như đã biết từ chương 1, trong các liên kết loại một chỉ phát sinh một thành phần phản lực hướng theo trục thanh, do đó trong các thanh của dàn chỉ tồn tại lực dọc  $N$ .

Ưu điểm của dàn là có thể vượt qua được những nhịp lớn và tiết kiệm được vật liệu. Nếu dùng dầm đặc để vượt qua những nhịp lớn thì chiều cao của dầm đặc phải lớn và vật liệu làm việc không đồng đều. Thật vậy, trong dầm có mômen uốn do đó ứng suất phân bố không đều trên toàn tiết diện, các thớ biên làm việc nhiều còn các thớ giữa làm việc ít. Trong dàn thì các thanh chỉ chịu kéo hoặc nén đúng tâm nên ứng suất phân bố đều trên toàn tiết diện, do đó các thớ làm việc như nhau và tiết kiệm được vật liệu.

Trong các thanh dàn chỉ tồn tại lực dọc  $N$  nên khi thực hiện mặt cắt qua mỗi thanh dàn ta chỉ cần thay thế tác dụng của phần thanh bị cắt bằng một thành phần nội lực là lực dọc  $N$ .

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định lực dọc trong các thanh dàn theo một số phương pháp thường được áp dụng trong thực hành.

### **2.2.2. Phương pháp tách mắt**

Phương pháp tách mắt là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy. Phương pháp này thường được dùng để tính hệ dàn.

Nội dung của phương pháp tách mắt là *khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn.*

#### **Thứ tự áp dụng:**

- ◆ *Lần lượt tách từng mắt ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh mắt.*



♦ Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Quy ước lực dọc dương là kéo tức là hướng từ mắt ra ngoài. Khi chưa biết lực dọc trong thanh thì giả thiết lực dọc có chiều dương, hướng ra ngoài mắt đang xét. Sau khi thay thế, tại mỗi mắt ta có một hệ lực đồng quy.

♦ Khảo sát sự cân bằng của từng mắt. Vì hệ lực là phẳng và đồng quy nên tại mỗi mắt có hai phương trình cân bằng, thường dùng hai phương trình hình chiếu theo hai phương bất kỳ  $X$  và  $Y$  không song song:

$$\Sigma X = 0 \quad \text{và} \quad \Sigma Y = 0.$$

Từ các phương trình cân bằng đó ta suy ra được nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều đã giả định là đúng, lực dọc là kéo. Nếu kết quả mang dấu âm thì chiều của lực cần tìm ngược chiều đã giả định, lực dọc là nén.

Về nguyên tắc, có thể tách các mắt theo thứ tự bất kỳ và tại mỗi mắt có thể viết phương trình hình chiếu lên hai phương  $X, Y$  bất kỳ không song song, cuối cùng vẫn tìm được đầy đủ các nội lực trong dàn. Tuy nhiên, nếu thứ tự tách mắt và cách chọn trục không khéo thì trong một phương trình cân bằng có thể tồn tại nhiều lực chưa biết, do đó phải giải hệ phương trình. *Biện pháp tốt nhất là chọn sao cho trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn số.* Muốn vậy, khi áp dụng phương pháp tách mắt ta nên thực hiện theo những chỉ dẫn sau:

\* *Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai lực dọc chưa biết.*

Tại mỗi mắt ta chỉ có hai phương trình cân bằng cho nên nếu ở đó chỉ có một hoặc hai lực dọc chưa biết thì có thể tìm được ngay. Trong trường hợp hệ cho trên hình 2.3, có thể tách theo thứ tự 1, 2, 3, 4...

\* *Tại mỗi mắt, để tìm lực dọc trong thanh thứ nhất thì nên lập phương trình hình chiếu lên phương vuông góc với thanh thứ hai.*

Làm như vậy thì trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số và các kết quả tìm được sẽ độc lập với nhau, đỡ mắc sai lầm dốt đây.

**Ví dụ 2.2.**[6]. Xác định lực dọc trong các thanh 1-2, 1-3 và 2-3 trong hệ trên hình 2.3a.

Tách mắt 1 (hình 2.3b), để tìm  $N_{1-3}$  ta sử dụng phương trình hình chiếu lên phương  $X$  vuông góc với thanh 1-2:

$$\Sigma X = N_{1-3} \sin \alpha - A \cos \alpha = 0; \quad \text{suy ra} \quad N_{1-3} = 2P \cot \alpha \quad (\text{lực kéo}).$$

Để tìm  $N_{1-2}$  ta dùng phương trình hình chiếu lên phương  $Y$  vuông góc với thanh  $1-3$ :

$$\sum Y = N_{1-2} \sin \alpha + A = 0; \quad \text{suy ra} \quad N_{1-2} = -2P / \sin \alpha \quad (\text{lực nén}).$$

Sau khi biết  $N_{1-2}$  ta có thể tách mắt 2 để tìm  $N_{2-4}$  và  $N_{2-3}$  (hình 2.3c). Chẳng hạn cần tìm  $N_{2-3}$  ta chiếu các lực lên phương vuông góc với thanh  $2-4$

$$\sum Y = N_{2-3} \cos \beta + N_{1-2} \cos \beta + P = 0;$$

Nhưng  $N_{1-2} = -2P / \sin \alpha$  và  $\cos \beta = \sin \alpha$ , nên:

$$N_{2-3} = P / \sin \alpha \quad (\text{lực kéo}).$$

Từ phương pháp tách mắt ta suy ra các hệ quả quan trọng sau:

1) Tại một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng và không có tải trọng tác dụng thì lực dọc trong hai thanh đó bằng không.

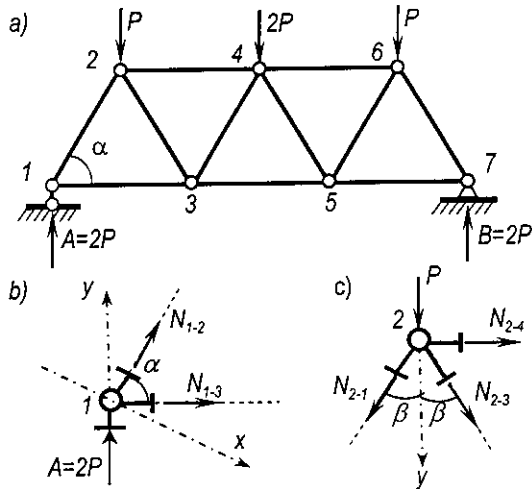
Ví dụ như trường hợp dàn trên hình 2.4, lực dọc trong các thanh  $1-2$  và  $1-10$  bằng không vì mắt 1 thỏa mãn các yêu cầu của hệ quả 1.

Để chứng minh hệ quả 1 ta khảo sát sự cân bằng của một mắt có hai thanh không thẳng hàng và không có lực đặt ở mắt (hình 2.5a).

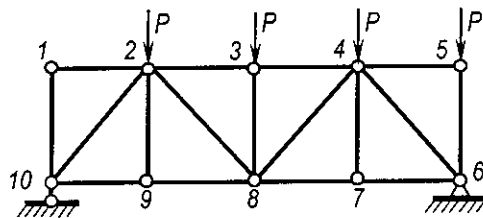
$$\sum X = N_2 \sin \alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_2 = 0.$$

$$\sum Y = N_1 \sin \alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0.$$

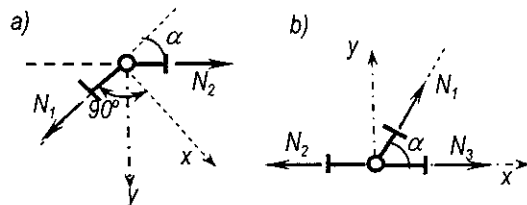
2) Tại một mắt có ba thanh trong đó có hai thanh thẳng hàng và nếu tại mắt đó không có tải trọng tác dụng thì lực dọc trong thanh không thẳng hàng bằng không còn lực dọc trong hai thanh thẳng hàng bằng nhau.



Hình 2.3



Hình 2.4



Hình 2.5

Trong trường hợp hệ trên hình 2.4 ta có:

- Tại mắt 9:  $N_{9-2} = 0$  còn  $N_{9-10} = N_{9-8}$ .
- Tại mắt 7:  $N_{7-4} = 0$  còn  $N_{7-8} = N_{7-6}$ .
- Tại mắt 5 ta thấy chỉ có hai thanh và một lực  $P$ , thẳng hàng với thanh 5-6; có thể xem lực  $P$  như một thanh đã biết nội lực, do đó:  $N_{5-4} = 0$  còn  $N_{5-6} = -P$ .

Để chứng minh tính chất trên ta khảo sát sự cân bằng của mắt vẽ trên hình 2.14b, ta có:

$$\begin{aligned} \sum Y &= N_1 \sin \alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0. \\ \sum X &= N_3 - N_2 = 0; \quad \text{nên } N_3 = N_2. \end{aligned}$$

Đó là điều cần chứng minh.

Trước khi tính dàn ta nên chú ý sử dụng các hệ quả trên để phát hiện các thanh có nội lực bằng không và loại chúng ra khỏi hệ, như vậy hệ còn lại sẽ đơn giản và dễ dàng tính toán hơn.

Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng nhưng cũng có nhược điểm là nếu để xảy ra sai lầm trong một bước tính toán nào đó thì các kết quả tiếp sau cũng bị sai kéo theo.

### 2.2.3. Phương pháp mặt cắt đơn giản

Phương pháp mặt cắt đơn giản là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, được áp dụng khá tiện lợi để tính dàn tĩnh định khi có thể thực hiện tách đôi dàn thành hai phần độc lập bằng một mặt cắt qua các thanh với số nội lực chưa biết nói chung không lớn hơn ba. Phương pháp này do A. Ritter (1826-1908) kiến nghị đầu tiên và được hoàn thiện bởi giáo sư F. S. Iaxinxki (1856-1899).

#### Thứ tự áp dụng:

- ♦ *Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và qua hai thanh khác chưa biết nội lực, mặt cắt cần phải chia dàn thành hai phần độc lập.*
- ♦ *Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Cũng như phương pháp tách mắt, khi chưa biết lực dọc ta giả thiết là dương nghĩa là hướng ra ngoài mặt đang xét.*
- ♦ *Lập điều kiện cân bằng của một phần dàn bị cắt (phần phải hoặc phần trái). Trong trường hợp này ta có hệ lực phẳng bất kỳ, nên có ba phương trình cân bằng. Từ các phương trình cân bằng đó suy ra các nội lực cần*

tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

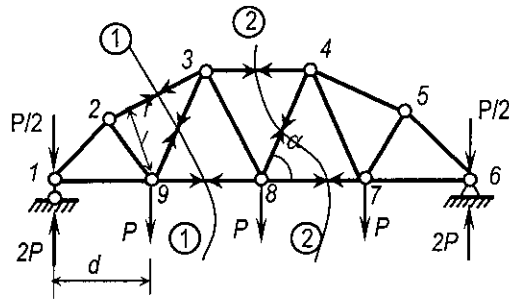
Để tìm được các phương trình cân bằng trong đó mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số ta nên thực hiện theo chỉ dẫn sau:

- \* Trường hợp ba thanh chưa biết nội lực cắt nhau từng đôi một, để tìm nội lực trong thanh thứ nhất, nên sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực đối với giao điểm của hai thanh còn lại.
- \* Trường hợp trong số ba thanh bị cắt chưa biết nội lực có hai thanh song song, để tìm nội lực trong thanh không song song ta sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu của các lực lên phương vuông góc với hai thanh song song.

Ví dụ 2.3.[6]. Xác định lực dọc trong các thanh 2-3 và 4-8 của dàn trên hình 2.6.

Tìm  $N_{2-3}$ : thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh 2-3 và hai thanh chưa biết nội lực 3-9 và 9-8. Thay thế các thanh bị cắt bằng lực dọc tương ứng như trên hình 2.6.

Khảo sát cân bằng phần bên trái mặt cắt. Để tìm được ngay  $N_{2-3}$  ta lập phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực thuộc phần bên trái mặt cắt đối với giao điểm của hai thanh 3-9 và 9-8 tức là đối với điểm 9.



Hình 2.6

Khi đó, các lực chưa biết  $N_{3-9}$ ,  $N_{9-8}$  không tham gia phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum M_9^r = -N_{2-3}r - \left(2P - \frac{P}{2}\right)d = 0, \text{ suy ra } N_{2-3} = -\frac{3Pd}{2r} \text{ (lực nén).}$$

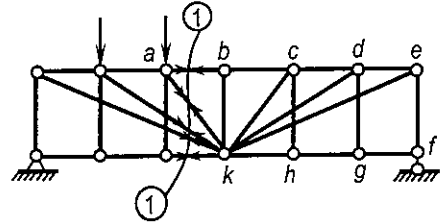
Tìm  $N_{4-8}$ : thực hiện mặt cắt 2-2 như trên hình 2.6. Mặt cắt này qua ba thanh chưa biết nội lực, trong đó hai thanh 3-4 và 8-7 song song. Do đó, để tìm  $N_{4-8}$  ta lập phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu các lực thuộc phần phải (hoặc phần trái) lên phương vuông góc với hai thanh song song 3-4 và 8-7, ta có:

$$\sum Y^{ph} = -N_{4-8} \sin \alpha - P + \left( 2P - \frac{P}{2} \right) = 0, \text{ suy ra } N_{4-8} = \frac{P}{2 \sin \alpha} \text{ (lực kéo).}$$

**Chú thích:**

Nếu mặt cắt đi qua bốn thanh (hoặc hơn nữa) chưa biết nội lực thì nói chung ta không thể xác định ngay được các lực dọc theo một mặt cắt. Trong trường hợp đặc biệt khi các thanh bị cắt đồng quy tại một điểm  $k$  nào đó trừ một thanh thì ta có thể tìm ngay được nội lực trong thanh không đồng quy từ một mặt cắt.

Ví dụ, với hệ trên hình 2.7, mặt cắt  $1-1$  đi qua năm thanh chưa biết nội lực trong đó có bốn thanh đồng quy ở điểm  $k$ , để tìm  $N_{a-b}$  trong thanh không đồng quy ta có thể sử dụng phương trình cân bằng  $\sum M_k = 0$ .



Hình 2.7

**2.2.4. Phương pháp mặt cắt phối hợp**

Phương pháp này được áp dụng để tính dàn khi không dùng được phương pháp mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Lúc này ta phải giải hệ phương trình. Tất nhiên số phương trình càng ít càng tốt.

Như đã biết, khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết. Bởi vậy:

- ◆ Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dàn thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp. Với hai mặt cắt ta có thể tìm ngay được hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:
- Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực. Hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ nhất phải khác biệt với hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ hai, nếu không thì hai mặt cắt sẽ trùng hợp.
- Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia. Như vậy, ta sẽ lập được hai phương trình chỉ chứa hai ẩn số cần tìm.

**Ví dụ 2.4.[6].** Xác định lực dọc trong thanh 2-5 và 5-3 của dàn cho trên hình 2.8.

Thực hiện mặt cắt I-I: mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2-5 và 5-3 đồng thời qua hai thanh chưa cần tìm nội lực là 1-2 và 4-3.

Để có được phương trình chỉ chứa  $N_{2-5}$  và  $N_{5-3}$  ta lập phương trình cân bằng hình chiếu của các lực bên trái mặt cắt lên phương thẳng đứng:

$$\sum Y^r = N_{2-5} \sin(\alpha/2) - N_{3-5} \sin(\alpha/2) + 3,5P - P - P - P = 0,$$

hay 
$$N_{2-5} \sin(\alpha/2) - N_{3-5} \sin(\alpha/2) + 0,5P = 0. \quad (a)$$

Thực hiện mặt cắt II-II (tách mắt). Mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2-5; 3-5 và hai thanh khác chưa cần tìm nội lực là 1-5; 5-4. Để thiết lập phương trình chỉ chứa  $N_{2-5}$  và  $N_{3-5}$  ta lập phương trình hình chiếu của các lực tác dụng bên trong mặt cắt lên phương ngang:

$$\sum X = N_{2-5} \cos(\alpha/2) + N_{3-5} \cos(\alpha/2) = 0. \quad (b)$$

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta được: 
$$N_{3-5} = -N_{2-5} = \frac{0,25P}{\sin(\alpha/2)}.$$

◆ Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua năm thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia hệ thành hai phần độc lập thì phải sử dụng ba mặt cắt phối hợp. Với ba mặt cắt phối hợp ta có thể tìm ngay được ba nội lực theo ba phương trình. Muốn vậy:

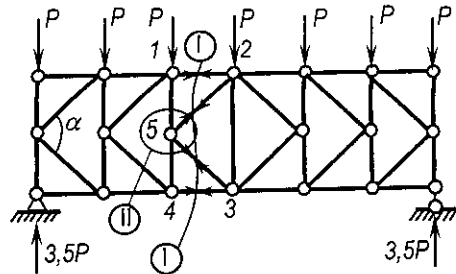
- Các mặt cắt phải đi qua ba thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt còn có thể đi qua hai thanh khác nữa chưa cần tìm nội lực.
- Trong mỗi mặt cắt ta thiết lập một phương trình chỉ chứa các ẩn số cần tìm. Giải hệ ba phương trình đó ta sẽ thu được ba nội lực cần tìm.

Cũng lý luận tương tự như vậy đối với các trường hợp cần dùng bốn mặt cắt phối hợp, năm mặt cắt phối hợp...

Đối với những hệ thông thường, chỉ cần dùng hai mặt cắt phối hợp là đủ.

### 2.2.5. Phương pháp họa đồ - Giản đồ Maxwell - Crémôna

Phương pháp họa đồ là phương pháp vẽ để giải bài toán. Phương pháp này đơn giản, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc mức độ chính xác và quy mô của bản vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế.



Hình 2.8

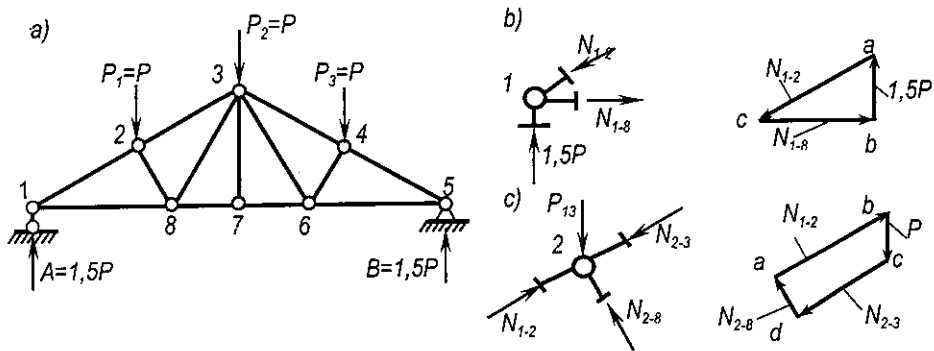
Có thể vận dụng phương pháp họa đồ để giải nhiều bài toán khác nhau của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cũng như vẽ biểu đồ nội lực trong các hệ tĩnh định. Trong mục này chỉ giới thiệu cách vận dụng phương pháp họa đồ để tính hệ dàn, đó là trường hợp thường được dùng trong thiết kế.

Trước khi đi vào nghiên cứu giản đồ nội lực ta cần tìm hiểu cách xác định nội lực trong các thanh của dàn bằng họa đồ. Giả sử các phản lực gối tựa đã biết, yêu cầu xác định nội lực trong các thanh của dàn.

Cách thực hiện cũng giống như trong phương pháp tách mắt, nhưng ở đây không dùng điều kiện cân bằng giải tích mà dùng điều kiện cân bằng dưới dạng họa đồ.

Ta gọi *đa giác lực* của hệ lực phẳng là đa giác có các cạnh lần lượt song song với các lực của hệ lực, mỗi cạnh có chiều dài biểu thị độ lớn của lực tương ứng theo cùng một tỷ lệ xích nào đó. Đối với hệ lực đồng quy ta thấy điều kiện cân bằng hình chiếu lên hai phương bất kỳ chỉ bằng không khi đa giác lực khép kín. Do đó ta có thể phát biểu: *điều kiện cân và đủ để cho hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực này phải khép kín.*

Lần lượt áp dụng điều kiện nêu trên cho từng mắt của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.



Hình 2.9

Đối với dàn trên hình 2.9a nếu tách mắt 1 ta thấy tại mắt này có ba lực: phản lực  $A$  đã biết, hai lực  $N_{1-2}$  và  $N_{1-8}$  chưa biết nhưng có phương xác định. Để vẽ đa giác lực, trên hình 2.9b ta vẽ vectơ  $\overline{ba}$  cùng phương và cùng chiều với phản lực  $A$  và có chiều dài biểu thị trị số của  $A$  theo một tỷ lệ xích nào đó. Từ ngọn và gốc của vectơ này, kẻ hai đường song song với hai



phương của thanh  $1-2$  và  $1-8$ , hai đường này cắt nhau tại  $c$ . Theo điều kiện cân bằng đã nêu ở trên đoạn  $ac$  và  $cb$  lần lượt biểu thị giá trị của lực  $N_{1-2}$  và  $N_{1-8}$ . Chiều của vectơ  $\overline{ac}$  hướng vào mắt  $1$  nên  $N_{1-2}$  là lực nén, còn chiều của vectơ  $\overline{cb}$  hướng ra ngoài mắt nên  $N_{1-8}$  là lực kéo.

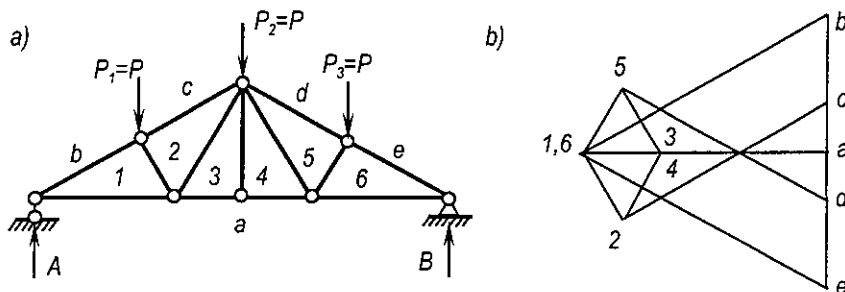
Tiếp đó chuyển sang mắt 2. Tại mắt này có bốn lực: hai lực đã biết là  $P$  và  $N_{1-2}$ , hai lực chưa biết nhưng có phương xác định là  $N_{2-3}$  và  $N_{2-8}$ . Hình 2.9c là đa giác lực của hệ lực này; sau khi vẽ hai vectơ  $\overline{ab}$  và  $\overline{bc}$  biểu thị phương chiều và trị số của hai lực đã biết là  $N_{1-2}$  và  $P$ , từ  $a$  và  $c$  kẻ hai đường song song với phương của thanh  $2-8$  và  $2-3$  cho tới khi cắt nhau tại  $d$ . Từ điều kiện cân bằng ta thấy hai lực cần tìm  $N_{2-3}$  và  $N_{2-8}$  được biểu thị bằng hai vectơ  $\overline{cd}$  và  $\overline{da}$ , những lực này hướng vào mắt 2 nên là lực nén.

Cũng tiến hành tương tự như vậy đối với các mắt khác theo thứ tự 8, 7, 3 ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

*Nếu gộp tất cả các đa giác lực vẽ cho từng mắt với cùng một tỷ lệ xích trên một hình vẽ chung thì ta sẽ được giản đồ nội lực hay giản đồ Maxwell – Cremona.*

Để vẽ giản đồ nội lực ta cần thống nhất một số điều kiện, quy ước và tiến hành theo thứ tự như sau:

- 1) Xác định các phản lực tựa (nên sử dụng phương pháp giải tích).
- 2) Ký hiệu các miền ngoài chu vi dàn bằng các chữ cái  $a, b, c, \dots$ . Mỗi miền được giới hạn trong phạm vi hai ngoại lực. Quy ước đọc tên các ngoại lực và phản lực bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên do lực đó phân giới.



Hình 2.10

Cần đọc hai chỉ số theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn. Ví dụ lực  $P_1$  đọc là  $b-c$ ; phản lực  $B$  đọc là  $e-a$ ... (hình 2.10a).

3) Vẽ đa giác lực cho các ngoại lực và phản lực theo một tỷ lệ xích nào đó. Khi vẽ đa giác lực ta không vẽ chiều mũi tên của lực mà ghi hai chỉ số tương ứng biểu thị lực. Chỉ số đầu biểu thị góc, chỉ số thứ hai biểu thị ngọn của vectơ lực tương ứng. Ví dụ, lực  $P_1$  (hình 2.10a) được biểu thị bằng đoạn  $b-c$  trên đa giác lực (hình 2.10b), vì  $P_1$  hướng xuống nên điểm ngọn  $c$  nằm dưới điểm gốc  $b$ . Đa giác lực của ngoại lực và phản lực đối với dàn trên hình 2.10a là đường khép kín  $abcdea$  (hình 2.10b).

4) Đánh số các miền ở trong dàn bằng các con số  $1, 2, 3...$  Lúc này nội lực trong mỗi thanh được đọc bằng hai con số biểu thị hai miền ở hai bên thanh. Khi cắt một thanh nào đó ta phải thay thế tác dụng của nó bằng hai lực ngược chiều có giá trị bằng nhau đặt tại hai mắt mà thanh đó nối.

Cách đọc hai lực này cũng có khác nhau, *muốn đọc nội lực đặt tại mắt  $i$  nào đó ta đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên thanh tương ứng theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh mắt  $i$* . Ví dụ với lực đọc trong thanh biên trên đầu tiên ở bên trái, khi lực này đặt tại mắt  $a$  ta đọc là  $b-1$  còn khi đặt tại mắt  $c$  có chịu lực  $P_1$  ta đọc là  $1-b$ .

5) Lần lượt vẽ đa giác lực cho từng mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai thanh chưa biết nội lực. *Khi vẽ cần chú ý sử dụng cách ký hiệu nói trên, không vẽ các mũi tên, lực đã biết vẽ trước rồi dựa vào điều kiện khép kín của đa giác lực để xác định lực chưa biết. Tất cả các đa giác lực vẽ cho mỗi mắt đều phải được thực hiện trên cùng một hình vẽ của đa giác lực đã vẽ ở bước ba, theo cùng một tỷ lệ xích.*

Ví dụ: xét mắt  $A$ , trên hình 2.10b, đoạn  $a-b$ , biểu thị phản lực  $A$  đã biết, từ  $b$  và  $a$  lần lượt vẽ các đường song song với các lực chưa biết  $b-1$  và  $1-a$ . Giao điểm của hai đường này xác định vị trí của điểm  $1$ . Đoạn  $b-1$  và  $1-a$  biểu thị giá trị của lực  $b-1$  và  $1-a$ . Chiều  $1-a$  hướng ra ngoài mắt đang xét nên lực  $1-a$  là kéo.

Tiếp tục xét mắt ở dưới lực  $P_1$  ta vẽ được đường khép kín  $1bc21$ . Đối với các mắt khác cũng tiến hành tương tự sẽ được giản đồ nội lực.

Ta thấy mỗi mắt của dàn tương ứng một đa giác lực khép kín, mỗi miền của dàn tương ứng với một điểm của giản đồ nội lực.

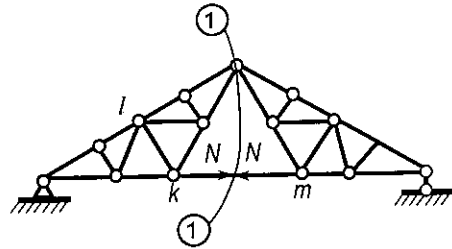
Để xác định giá trị của nội lực trong thanh  $i-k$  nào đó của dàn ta đo chiều dài của đoạn  $i-k$  tương ứng trên giản đồ nội lực theo tỷ lệ xích đã chọn khi vẽ giản đồ.

Để biết chiều hoặc dấu của nội lực, thực hiện như đã trình bày ở điểm 4.

**Chú ý:**

1. Khi gặp những dàn trong đó không thể thực hiện tách mắt để sao cho tại đó chỉ có hai nội lực chưa biết, ta cần kết hợp với cách tính giải tích để giải quyết.

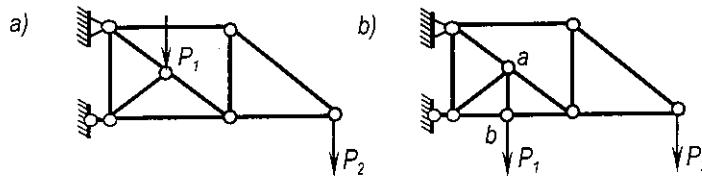
Ví dụ với dàn vẽ trên hình 2.11 khi tách đến mắt k và mắt l ta sẽ gặp phải khó khăn trên. Để giải quyết, trước khi vẽ giản đồ ta cần sử dụng phương pháp mặt cắt (mặt cắt 1-1) để xác định lực dọc N trong thanh k-m; sau đó vẽ giản đồ như thường lệ (vì lực N đã biết).



Hình 2.11

2. Nếu ngoại lực nằm trong chu vi dàn thì trước khi đặt tên các miến ngoài chu vi dàn ta đưa các ngoại lực ra ngoài chu vi bằng cách đặt thêm các thanh quy ước. Tất nhiên thanh quy ước phải đặt sao cho tính chất làm việc của dàn không thay đổi.

Ví dụ khi gặp trường hợp dàn vẽ trên hình 2.12a ta có thể đưa lực  $P_1$  ra ngoài chu vi dàn bằng cách đặt thêm thanh quy ước a-b như trên hình 2-12b.

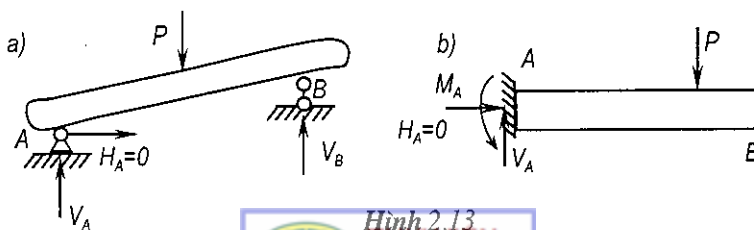


Hình 2.12

### 2.3. CÁCH TÍNH DẦM, KHUNG TỈNH ĐỊNH

#### 2.3.1. Định nghĩa và tính chất chịu lực của dầm, khung

Hệ dầm là hệ bất biến hình được cấu tạo từ một miếng cứng nối với Trái Đất bằng một gối cố định và một gối di động có phương thẳng đứng (hình 2.13a) hoặc bằng một liên kết ngàm (hình 2.13b).



Hình 2.13

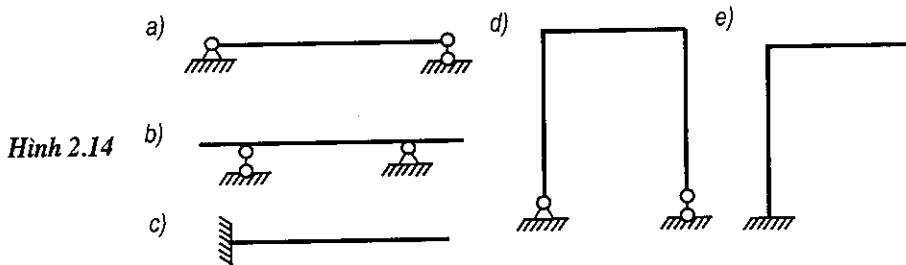


Dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, thành phần phản lực nằm ngang trong hệ luôn luôn bằng không.

Tùy theo sự cấu tạo của miếng cứng, hệ dầm được phân loại như sau:

a) *Dầm tĩnh định đơn giản*, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh thẳng, bao gồm:

- Dầm đơn giản không có đầu thừa (hình 2.14a).
- Dầm đơn giản có đầu thừa (hình 2.14b).
- Dầm côngxôn (hình 2.14c)



Dưới tác dụng của tải trọng bất kỳ, trong dầm phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc. Lực dọc bằng không khi phương của tải trọng vuông góc với trục dầm.

b) *Khung tĩnh định*, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh gãy khúc (hình 2.14d, e). Trong khung phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

### 2.3.2. Biểu đồ nội lực

Trong thực tế, tính dầm và khung là vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ nội lực là hình ảnh mô tả sự biến thiên của các thành phần nội lực trên các tiết diện dọc theo trục thanh. Để thực hiện điều đó ta cần thực hiện theo thứ tự như sau:

#### Thứ tự thực hiện:

- ◆ Xác định các phản lực theo các điều kiện cân bằng đã nêu trong mục 2.2 chương Mở đầu.
- ◆ Chia hệ thành các đoạn để sao cho nội lực và ngoại lực trong mỗi đoạn là liên tục.
- ◆ Quy định chiều nhìn của người quan sát cho mỗi đoạn thanh, người quan sát đứng vuông góc với trục các đoạn thanh.

- ♦ Tương ứng với mỗi đoạn:
- Thực hiện mặt cắt tại tiết diện có vị trí xác định theo tọa độ  $z$ . Tại mặt cắt, đặt người quan sát đứng vuông góc với trục đoạn thanh và vẽ các thành phần nội lực với giả thiết là mang dấu dương (xem mục 4.4 chương mở đầu).
- Xét cân bằng của một phần hệ để xác định hàm nội lực cần vẽ biểu đồ theo tọa độ chạy  $z$  trên cơ sở các điều kiện cân bằng đã nêu trong mục 2.2 chương mở đầu.
- Cho tọa độ  $z$  biến thiên, từ các hàm nội lực sẽ vẽ được biểu đồ cần tìm.

Các quy định khi vẽ biểu đồ nội lực:

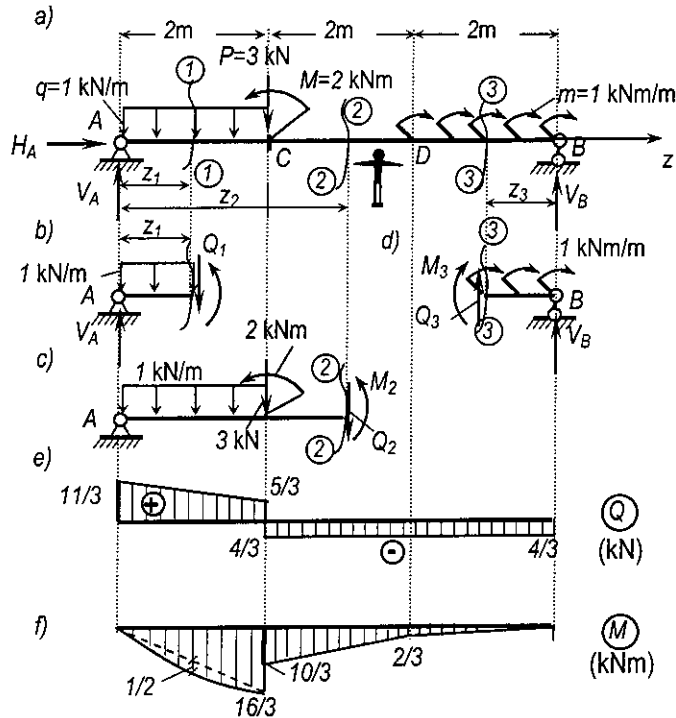
- ♦ Đường chuẩn chọn song song với trục các thanh.
- ♦ Các tung độ biểu đồ dựng vuông góc với đường chuẩn.
- ♦ Trên biểu đồ lực cắt và lực dọc: các tung độ dương dựng lên trên, các tung độ âm dựng xuống dưới so với vị trí của người quan sát. Cần ghi dấu trên các phần biểu đồ.
- ♦ Trên biểu đồ mômen uốn: biểu đồ được vẽ theo chiều thứ căng nên các tung độ dương dựng xuống dưới, các tung độ âm dựng lên trên so với vị trí của người quan sát. Không ghi dấu trên các phần biểu đồ.

**Ví dụ 2.5.** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ dầm trên hình 2.15a.

- ♦ *Xác định phản lực:*
- Từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương  $z$  ta dễ dàng nhận thấy thành phần phản lực  $H_A$  bằng không. Do đó, trong dầm không phát sinh lực dọc nên không cần vẽ biểu đồ  $N$ .
- Từ phương trình cân bằng mômen đối với điểm  $A$ , ta có:
 
$$\sum M_A = 6.V_B - 1.2.1 - 3.2 + 2 - 1.2 = 0; \quad \text{suy ra: } V_B = 4/3 \text{ kN.}$$
- Từ phương trình cân bằng mômen đối với điểm  $B$ , ta có:
 
$$\sum M_B = 6.V_A - 1.2.5 - 3.4 - 2 + 1.2 = 0; \quad \text{suy ra: } V_A = 11/3 \text{ kN.}$$
- ♦ *Vẽ các biểu đồ lực cắt và mômen uốn:* Hệ bao gồm ba đoạn. Chọn vị trí của người quan sát như trên hình 2.15a.
- *Đoạn AC:* Thực hiện mặt cắt 1-1 có hoành độ  $z_1$  và xét cân bằng phần bên trái (hình 2.15b) ta tìm được:

$$Q_I(z_I) = V_A - qz_I = \frac{11}{3} - 1 \cdot z_I; \quad \begin{cases} \text{khi } z_I = 0; & Q_I(0) = 11/3 \text{ kN}; \\ \text{khi } z_I = 2 \text{ m}; & Q_I(2) = 5/3 \text{ kN}. \end{cases}$$

$$M_I(z_I) = V_A z_I - q \frac{z_I^2}{2} = \frac{11}{3} z_I - \frac{z_I^2}{2}; \quad \begin{cases} \text{khi } z_I = 0; & M_I(0) = 0 \text{ kNm}; \\ \text{khi } z_I = 1 \text{ m}; & M_I(1) = 19/6 \text{ kNm}; \\ \text{khi } z_I = 2 \text{ m}; & M_I(2) = 16/3 \text{ kNm}. \end{cases}$$



Hình 2.15

- Đoạn CD: Thực hiện mặt cắt 2-2 có hoành độ  $z_2$  và xét cân bằng phần bên trái (hình 2.15c) ta tìm được:

$$Q_2(z_2) = V_A - q \cdot 2 - 3 = \frac{11}{3} - 2 - 3 = -\frac{4}{3} = \text{const};$$

$$M_2(z_2) = V_A z_2 - 1 \cdot 2 \cdot (z_2 - 1) - 3(z_2 - 2) - 2;$$

$$\begin{cases} \text{khi } z_2 = 2 \text{ m}; & M_2(2) = 10/3 \text{ kNm}; \\ \text{khi } z_2 = 4 \text{ m}; & M_2(4) = 2/3 \text{ kNm}. \end{cases}$$

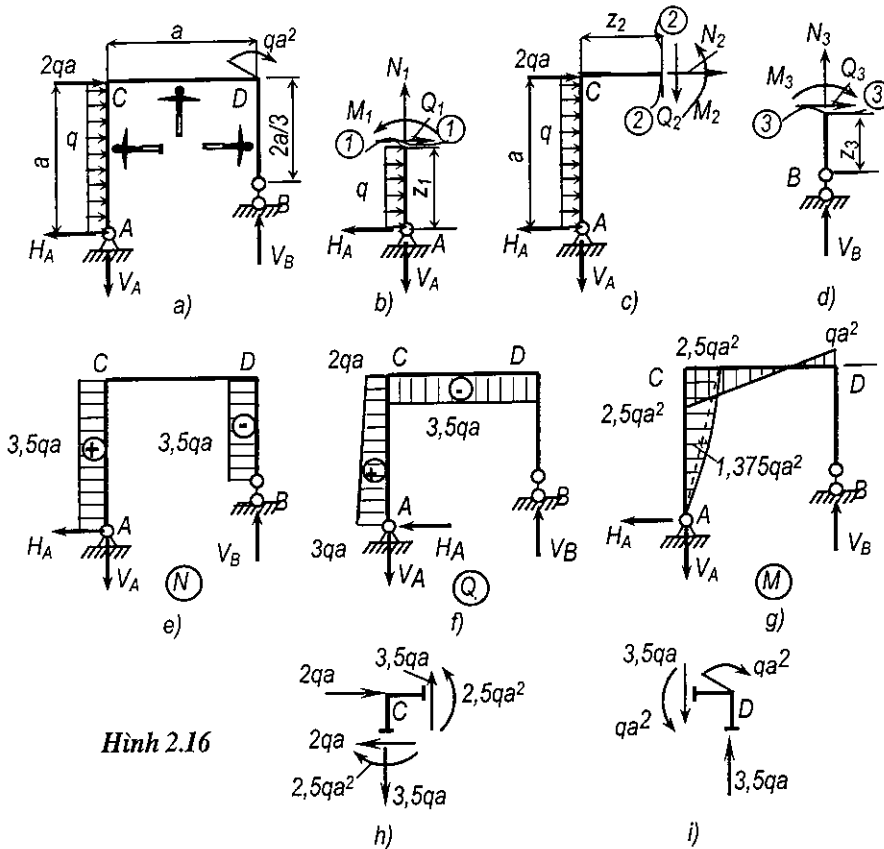
- Đoạn DB: Thực hiện mặt cắt 3-3 có hoành độ  $z_3$  và xét cân bằng phần bên phải (hình 2.15d) ta tìm được:

$$Q_3(z_3) = -V_B = -\frac{4}{3} = \text{const};$$

$$M_3(z_3) = V_B z_3 - m z_3 = \frac{1}{3} z_3; \begin{cases} \text{khi } z_2 = 2 \text{ m;} & M_3(2) = 2/3 \text{ kNm;} \\ \text{khi } z_2 = 0 \text{ m;} & M_3(0) = 0 \text{ kNm.} \end{cases}$$

Căn cứ vào các số liệu tìm được trong các đoạn thanh, ta vẽ được biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen uốn như trên các hình 2.15e, f.

**Ví dụ 2.6.** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ khung trên hình 2.16a.



Hình 2.16

◆ **Xác định phản lực:**

- Từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang ta có:

$$\sum X = 2qa + qa - H_A = 0; \quad \text{suy ra: } H_A = 3qa.$$

- Từ phương trình cân bằng mômen đối với điểm A, ta có:

$$\sum M_A = V_B \cdot a - qa^2 - 2qa^2 - \frac{qa^2}{2} = 0; \quad \text{suy ra: } V_B = 3,5qa.$$

- Từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương đứng ta có:

$$\sum Y = V_B - V_A = 0; \quad \text{suy ra: } V_A = V_B = 3,5qa.$$



♦ *Vẽ các biểu đồ nội lực:* Hệ bao gồm ba đoạn. Chọn vị trí của người quan sát như trên hình 2.16a.

• *Đoạn AC:* Thực hiện mặt cắt 1-1 có tọa độ  $z_1$  và xét cân bằng phần bên trái người quan sát (hình 2.16b) ta tìm được:

$$N_1(z_1) = V_A = 3,5qa = \text{const};$$

$$Q_1(z_1) = H_A - qz_1 = 3qa - 1 \cdot z_1; \quad \begin{cases} \text{khi } z_1 = 0; & Q_1(0) = 3qa; \\ \text{khi } z_1 = a; & Q_1(a) = 2qa. \end{cases}$$

$$M_1(z_1) = H_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}; \quad \begin{cases} \text{khi } z_1 = 0; & M_1(0) = 0; \\ \text{khi } z_1 = a/2; & M_1(a/2) = 1,375qa^2; \\ \text{khi } z_1 = a; & M_1(a) = 2,5qa^2. \end{cases}$$

• *Đoạn CD:* Thực hiện mặt cắt 2-2 có hoành độ  $z_2$  và xét cân bằng phần bên trái người quan sát (hình 2.16c) ta tìm được:

$$N_2(z_2) = H_A - 2qa - qa = 0;$$

$$Q_2(z_2) = -V_A = -3,5qa = \text{const};$$

$$M_2(z_2) = -V_A z_2 + H_A a - 1 \cdot \frac{a^2}{2}; \quad \begin{cases} \text{khi } z_2 = 0; & M_2(0) = 2,5qa^2; \\ \text{khi } z_2 = a; & M_2(a) = -qa^2. \end{cases}$$

• *Đoạn DB:* Thực hiện mặt cắt 3-3 có tọa độ  $z_3$  và xét cân bằng phần bên phải người quan sát (hình 2.16d) ta tìm được:

$$N_3(z_3) = -V_B = -3,5qa = \text{const};$$

$$Q_3(z_3) = 0;$$

$$M_3(z_3) = 0.$$

Căn cứ vào các số liệu tìm được trong các đoạn thanh, ta vẽ được biểu đồ lực dọc, lực cắt và biểu đồ mômen uốn như trên các hình 2.16e, f, g.

♦ *Kiểm tra cân bằng nút:* Hệ có hai nút  $C$  và  $D$ . Sau khi tách từng nút, thay thế các phần bị loại bỏ bằng các thành phần nội lực tìm được trên các biểu đồ nội lực, ta lập các điều kiện cân bằng để kiểm tra kết quả. Chú ý là nếu tại nút có tác dụng của ngoại lực thì các ngoại lực này cũng tham gia điều kiện cân bằng. Trên các hình 2.16h, i mô tả các nút  $C$  và  $D$  đã được tách ra khỏi hệ. Dễ dàng nhận thấy các lực đặt ở nút thỏa mãn các điều kiện cân bằng.

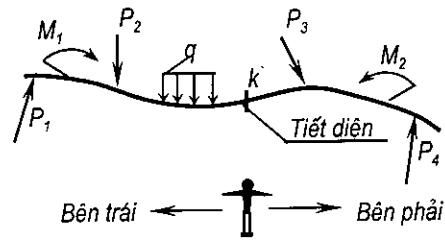
### 2.3.3. Cách vẽ thực hành các biểu đồ nội lực

Vẽ đúng và nhanh các biểu đồ nội lực là một yêu cầu rất cơ bản khi tính hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh. Bởi vậy trong mục này sẽ đề cập đến cách vẽ thực hành đáp ứng yêu cầu vẽ nhanh các biểu đồ nội lực trong những hệ gồm các thanh thẳng như dầm, khung.

Trong thực hành, khi vẽ biểu đồ nội lực trong những hệ thanh gồm các thanh thẳng, không cần thiết lập các phương trình nội lực (trừ trường hợp thật cần thiết) mà vẽ theo giá trị nội lực tại một số tiết diện đặc trưng cần thiết ở mức độ tối thiểu. Cách vẽ thực hành được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng và các liên hệ vi phân đã biết giữa ngoại lực và nội lực. Giá trị và dấu của các thành phần nội lực được xác định trực tiếp theo các ngoại lực.

Trước khi tìm hiểu cách vẽ biểu đồ ta cần biết cách xác định nội lực tại tiết diện  $k$  bất kỳ. Trên cơ sở định nghĩa và quy ước về dấu của các thành phần nội lực tại một tiết diện bất kỳ đã biết ở các mục 4.3, 4.4 chương mở đầu ta có thể xác định nội lực tại tiết diện  $k$  theo các ngoại lực như sau:

Thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$ . Đặt người quan sát tại  $k$  đứng vuông góc với tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh. Như vậy, mặt cắt sẽ chia hệ thành hai phần: phần bên trái và phần bên phải người quan sát (hình 2.17).

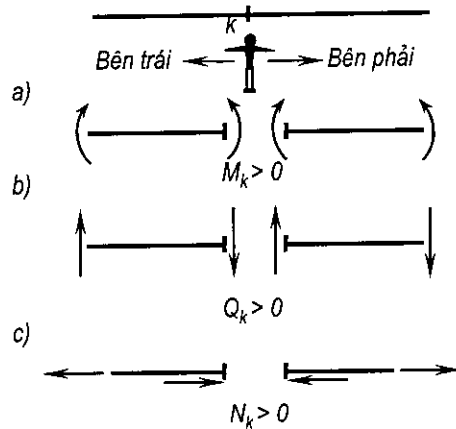


Hình 2.17

Giá trị và dấu của các thành phần nội lực tại  $k$  được xác định theo các ngoại lực như sau:

- \* Mômen uốn  $M$  tại tiết diện  $k$  có giá trị được xác định bằng tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lấy đối với trọng tâm của tiết diện  $k$ .

Vì mômen uốn được xem là dương khi có khuynh hướng làm căng thớ bên dưới nên ta có thể căn cứ chiều của ngoại lực để suy ra dấu của nội lực (hình 2.18a) như sau:



Hình 2.18

- ◆ Nếu khảo sát phần bên trái, các ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tiết diện  $k$  sẽ gây ra mômen uốn dương
- ◆ Nếu khảo sát phần bên phải, các ngoại lực quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tiết diện  $k$  sẽ gây ra mômen uốn dương.

\* Lực cắt  $Q$  tại tiết diện  $k$  có giá trị bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương vuông góc với tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh.

Vì lực cắt được coi là dương khi có khuynh hướng làm cho phần hệ có đặt lực cắt đó quay thuận chiều kim đồng hồ nên ta có thể căn cứ vào chiều tác dụng của ngoại lực để suy ra dấu của lực cắt (hình 2.18b):

- ◆ Nếu khảo sát phần bên trái, ngoại lực hướng lên phía trên người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.
- ◆ Nếu khảo sát phần bên phải, ngoại lực hướng xuống phía dưới người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.

\* Lực dọc  $N$  tại tiết diện  $k$  có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương tiếp tuyến tại  $k$  của trục thanh.

Vì lực dọc được xem là dương khi có khuynh hướng gây tác dụng kéo nên các ngoại lực gây tác dụng kéo đối với tiết diện  $k$  sẽ phát sinh lực dọc dương (hình 2.18c).

Sau khi biết cách xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ ta cần dựa vào các liên hệ vi phân đã biết (xem mục 4.6 chương Mở đầu) giữa cường độ tải trọng phân bố với các thành phần nội lực để xác định dạng biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh trong đó tải trọng tác dụng là liên tục. Trong trường hợp bài toán phẳng (trong mặt phẳng  $x, y$ ) ta có các liên hệ sau:

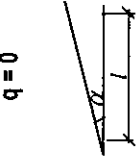
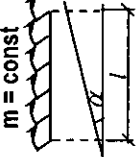
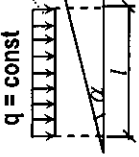
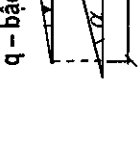
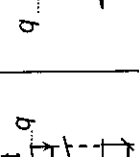
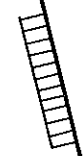


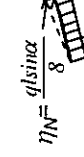
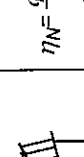



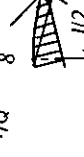
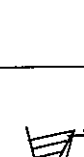



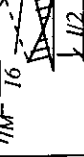
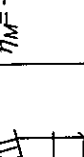
$$\frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0; \quad \frac{dN_z}{dz} + q_z = 0; \quad \frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x = 0;$$

Bảng 2.1 giới thiệu dạng biểu đồ  $N, Q, M$ , số tiết diện đặc trưng cần xác định nội lực (trong khuyên tròn) và các số liệu cần thiết khác khi vẽ biểu đồ nội lực tương ứng với các dạng tải trọng cơ bản tác dụng trên một đoạn thanh bất kỳ. Các số liệu này tạo điều kiện thuận lợi để vẽ biểu đồ nội lực khi hệ chịu các tải trọng thường gặp trong thực tế. Trường hợp hệ chịu tải trọng phức tạp hơn thì thường ta có thể xem tải trọng đó như là tập hợp của các tải trọng đơn giản đã giới thiệu trong bảng 2.1 và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để vẽ các biểu đồ nội lực.

Khi sử dụng bảng 2.1 cần chú ý:

- 1) Giá trị tung độ biểu đồ nội lực ở hai đầu mỗi đoạn thanh cần được xác định theo các định nghĩa và quy ước về dấu đã nêu ở trên. Ngoài ra ta có thể vận dụng các đặc điểm của biểu đồ nội lực tại vị trí chuyển đoạn (liên tục hoặc tồn tại bước nhảy) như trên bảng 2.2 để giảm bớt số lần xác định nội lực tại hai đầu mỗi đoạn thanh.

Bảng 2.1

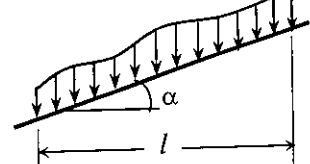
Sơ đồ tải trọng					
Dạng biểu đồ N					
Số tiết diện cần tìm	1	1	2	3	3
Dạng biểu đồ Q					
Số tiết diện cần tìm	1	1	2	3	3
Dạng biểu đồ M					
Số tiết diện cần tìm	2	2	3	3	3

**Bảng 2.2**

<b>N</b>				
<b>Q</b>				
<b>M</b>				

2) Đối với các đoạn biểu đồ cần xác định bằng ba tung độ, có thể xác định tung độ thứ ba ở giữa mỗi đoạn thanh như sau: Nối hai tung độ ở hai đầu đoạn thanh bằng đường đứt nét; từ chính giữa đường đứt nét dựng vuông góc với đường chuẩn một đoạn  $\eta$  có giá trị và chiều xác định theo bảng 2.1, ta sẽ được tung độ thứ ba; nối ba tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp sẽ được biểu đồ nội lực trong đoạn thanh đang xét.

3) Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh (hình 2.19) biểu đồ nội lực vẫn có dạng như trong bảng 2.1 nhưng tất cả các số liệu về  $\eta$  cần được chia cho  $\cos \alpha$ .



**Hình 2.19**

**Ví dụ 2.7.[6].** Vẽ biểu đồ nội lực trong dầm cho trên hình 2.20a.

a) Xác định phản lực- Xét cân bằng toàn hệ:

$$\sum Z = H_A = 0, \rightarrow H_A = 0.$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 2qa \cdot a - qa \cdot a + qa^2 - \frac{3qa}{2} \left( 3a + \frac{a}{3} \right) = 0, \rightarrow V_B = \frac{7}{3} qa.$$

$$\sum M_B = V_A \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - qa \cdot 2a - qa^2 + \frac{3qa}{2} \cdot \frac{a}{3} = 0, \rightarrow V_A = \frac{13}{6} qa.$$

b) Vẽ các biểu đồ nội lực

Trong trường hợp này, tải trọng vuông góc với trục dầm nên lực dọc tại mọi tiết diện đều bằng không, chỉ cần vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn.

Ký hiệu  $S_{ik}$  là nội lực tại tiết diện  $i$  thuộc đoạn thanh  $ik$ .

♦ **Đoạn AC**- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên:

• Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng xiên, tìm theo hai giá trị tại A và C

$$Q_{AC} = V_A = \frac{13}{6} qa; \quad Q_{CA} = V_A - qa = \frac{7}{6} qa.$$

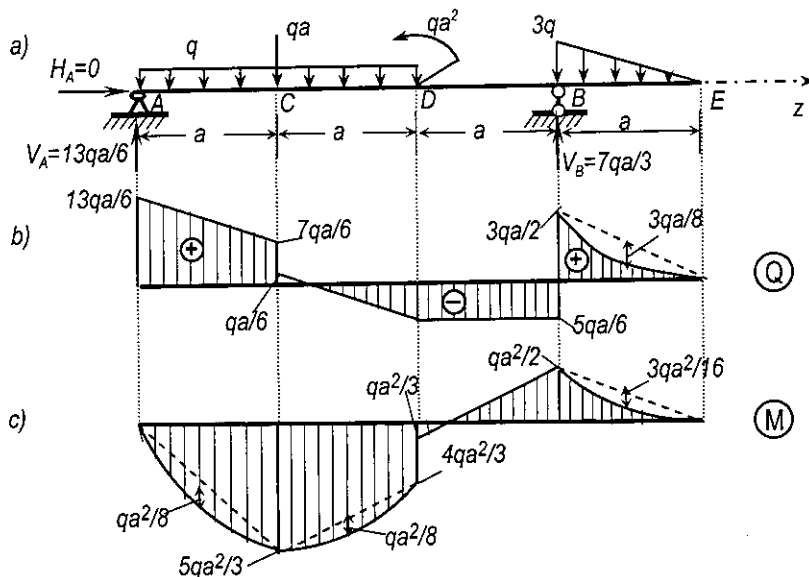
• Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có:

$$M_{AC} = 0; \quad M_{CA} = V_A \cdot a - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{5}{3} qa^2; \quad \eta_M = \frac{1}{8} qa^2.$$

♦ **Đoạn CD**- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên:

• Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng xiên,

$$Q_{CD} = \frac{7}{6} qa - qa = -\frac{1}{6} qa; \quad Q_{DC} = V_A - 2qa - qa = -\frac{5}{6} qa.$$



Hình 2.20

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có:

$$M_{CD} = \frac{5}{3} qa^2 ; M_{DC} = V_A \cdot 2a - 2qa \cdot a - qa \cdot a = \frac{4}{3} qa^2 ; \eta_M = \frac{1}{8} qa^2.$$

- ♦ Đoạn  $DB$  - Trong đoạn này không có tải trọng phân bố nên:

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn với:

$$Q_{DB} = -\frac{5}{6} qa.$$

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường thẳng xiên với:

$$M_{DB} = \frac{4}{3} qa^2 - qa^2 = \frac{1}{3} qa^2 ; M_{BD} = -3q \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} a = -\frac{1}{2} qa^2.$$

- ♦ Đoạn  $BE$  - Trong đoạn này có tải trọng phân bố theo luật bậc nhất nên

- Biểu đồ  $Q$  có dạng đường cong bậc hai với:

$$Q_{BE} = \frac{1}{2} 3q \cdot a = \frac{3}{2} qa ; Q_{EB} = 0 ; \eta_Q = \frac{1}{8} 3qa = \frac{3}{8} qa \text{ (hướng xuống).}$$

- Biểu đồ  $M$  có dạng đường cong bậc ba với:

$$M_{BE} = -\frac{1}{2} qa^2 ; M_{EB} = 0 ; \eta_M = \frac{1}{16} 3qa^2 = \frac{3}{16} qa^2.$$

**Ví dụ 2.8.**[6]. Vẽ các biểu đồ nội lực cho hệ thanh trên hình 2.21a. Cho biết:

$$q_1 = 1 \text{ kN/m}; q_2 = 2 \text{ kN/m}; P = 2 \text{ kN}; M = 1 \text{ kNm}; a = 2 \text{ m}; e = 0,4 \text{ m}.$$

Để thuận tiện trong tính toán, ta quy đổi tải trọng  $q_1$  phân bố dọc trục thanh  $AB$  về hai thành phần: tải trọng tác dụng đúng tâm phân bố đều dọc trục thanh  $AB$  với cường độ  $q_1 = 1 \text{ kN/m}$  và mômen phân bố đều với cường độ  $m = q_1 \cdot e = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ kNm/m}$ .

- a) *Xác định các phản lực*- Xét cân bằng toàn hệ, ta có:

$$\sum X = H_E - q_1 a = 0, \text{ suy ra: } H_E = 2 \text{ kN};$$

$$\sum M_E = V_D \cdot 2a - Pa + Pa - M - q_2 a \cdot 1,5a - q_1 a \cdot a - ma = 0, \text{ suy ra: } V_D = 4,7 \text{ kN};$$

$$\sum M_D = V_E \cdot 2a + H_E \cdot a - P \cdot 3a + M - Pa - 0,5q_2 a^2 + ma = 0, \text{ suy ra: } V_E = 3,3 \text{ kN}.$$

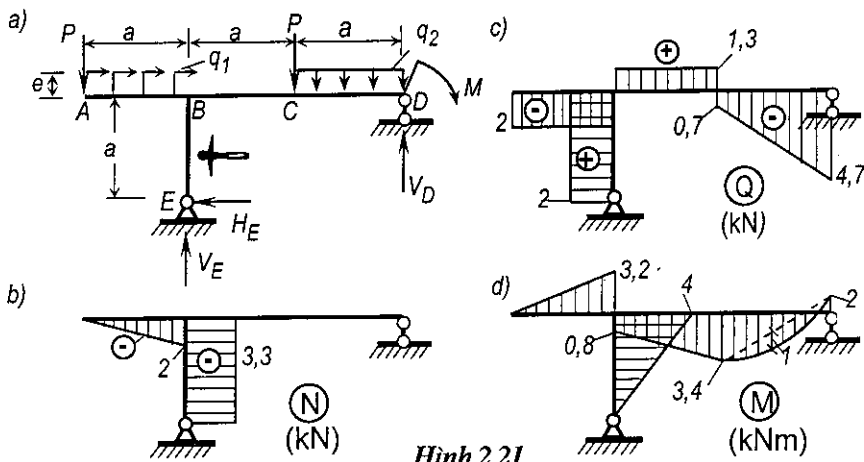
- b) Vẽ các biểu đồ nội lực (hình 2.21 b, c, d).

♦ *Đoạn AB*: Trong đoạn này không có lực phân bố pháp tuyến nhưng có lực phân bố tiếp tuyến và mômen phân bố  $m$ . Do đó:



- Biểu đồ lực dọc có dạng đường thẳng xiên, được xác định theo giá trị tại hai đầu đoạn:

$$N_{AB} = 0; \quad N_{BA} = -q_1 \cdot a = -2 \text{ kN}.$$



Hình 2.21

- Biểu đồ lực cắt có dạng song song với đường chuẩn, được xác định theo giá trị tại một tiết diện; chẳng hạn tại tiết diện A:

$$Q_{AB} = -P = -2 \text{ kN}.$$

- Biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo giá trị tại hai đầu đoạn:

$$M_{AB} = 0; \quad M_{BA} = -Pa + ma = -3,2 \text{ kNm}.$$

- ♦ Đoạn EB: Đặt người quan sát như trên hình 2.21a. Các biểu đồ nội lực được xác định theo các giá trị sau:

$$N_{EB} = -V_E = -3,3 \text{ kN}; \quad Q_{EB} = H_E = 2 \text{ kN}; \quad M_{EB} = 0; \quad M_{BE} = H_E \cdot a = 4 \text{ kNm}.$$

- ♦ Đoạn BC: Các biểu đồ nội lực được xác định theo các giá trị sau:

$$N_{BC} = -q_1 a + H_E = 0; \quad Q_{BC} = -P + V_E = 1,3 \text{ kN};$$

$$M_{BC} = -Pa + H_E \cdot a + ma = 0,8 \text{ kNm};$$

$$M_{CB} = -P \cdot 2a + H_E \cdot a + V_E \cdot a + m = 3,4 \text{ kNm}.$$

- ♦ Đoạn CD: Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều, vuông góc với trục thanh. Do đó:

- Biểu đồ lực dọc có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn, được xác định theo giá trị lực dọc tại tiết diện D. Ta có:  $N_{DC} = 0$ .
- Biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng xiên, được xác định theo hai giá trị tại tiết diện C và D. Nếu dùng phần phải ta có:

$Q_{CD} = -V_D + q \cdot a = -0,7 \text{ kN}$  (cũng có thể xác định theo giá trị lực cắt tại  $C$  thuộc đoạn  $BC$  nếu dựa vào tính chất của bước nhảy);

$$Q_{DC} = -V_D = -4,7 \text{ kN}.$$

- Biểu đồ mômen uốn có dạng đường cong parabol bậc hai và được xác định theo các giá trị sau:

$$M_{CD} = 3,4 \text{ kNm (vì tại } C \text{ không có bước nhảy); } M_{DC} = -M = -2 \text{ kNm}.$$

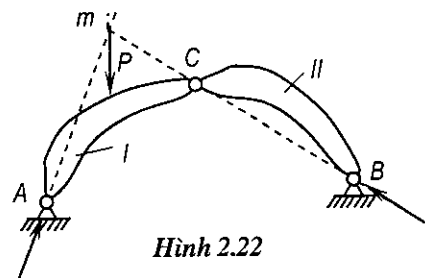
Nối hai tung độ biểu đồ mômen uốn ở hai đầu đoạn  $CB$  bằng đường đứt nét. Từ giữa đường đứt nét, dóng vuông góc với đường chuẩn theo chiều của tải trọng  $q$  một đoạn  $\eta_M = q \cdot a^2 / 8 = 1 \text{ kNm}$ , ta được tung độ thứ ba. Nối ba tung độ đó với nhau bằng đường cong ta được biểu đồ mômen uốn trên đoạn  $CD$ .

## 2.4. CÁCH TÍNH HỆ BA KHỚP

### 2.4.1. Định nghĩa và tính chất chịu lực của hệ ba khớp

Hệ ba khớp (hình 2.22) là hệ được cấu tạo từ hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp (khớp  $C$ ) và nối với trái đất bằng hai gối tựa bất động ( $A$  và  $B$ ). Ba khớp  $A$ ,  $B$  và  $C$  không cùng nằm trên một đường thẳng.

Nếu xem trái đất là một miếng cứng thì hệ sẽ gồm ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ không thẳng hàng  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Như vậy hệ ba khớp là hệ bất biến hình, đủ liên kết.



Hình 2.22

Hệ ba khớp là hệ có lực xô, nghĩa là trong hệ phát sinh thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng chỉ tác dụng thẳng đứng. Đó là điều khác nhau cơ bản giữa hệ ba khớp và hệ dầm.

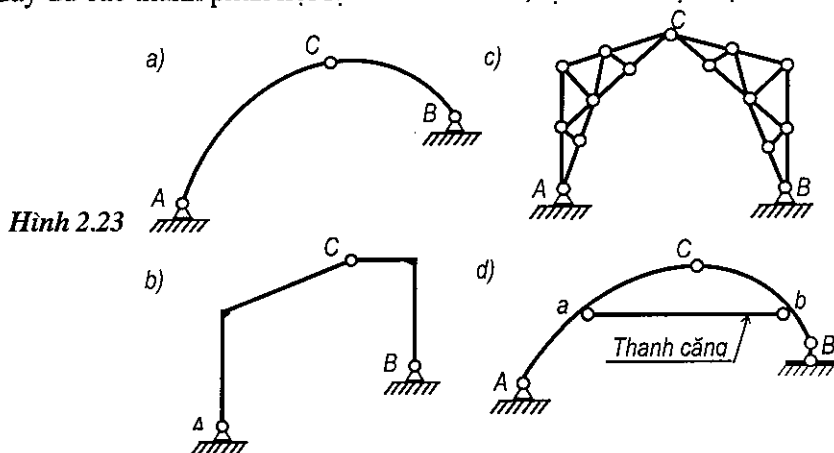
Để xác nhận điều đó ta xét hệ trên hình 2.22. Khi tải trọng thẳng đứng  $P$  tác dụng trên miếng cứng bên trái  $I$  của hệ, phản lực tại gối  $B$  phải đi qua khớp  $C$ . Thật vậy, lúc này trên miếng cứng  $II$  chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại  $B$  và  $C$ , muốn cho miếng cứng  $II$  cân bằng thì hai lực đó phải trực đối, do đó phản lực tại  $B$  có phương  $BC$ .

Mặt khác, khi xét cân bằng của toàn hệ ta thấy trên hệ có ba lực tác dụng: lực  $P$ , phản lực tại  $B$  và phản lực tại  $A$ . Điều kiện để cho hệ cân bằng là ba lực này phải đồng quy, do đó phản lực tại  $A$  buộc phải đi qua giao điểm  $m$  của hai lực  $P$  và  $B$ .

Như vậy, khi tải trọng thẳng đứng, các phản lực  $A$  và  $B$  nói chung có thành phần nằm ngang tức là có *lực xô* (trừ trường hợp đặc biệt khi khớp  $C$  và  $B$  cùng trên đường thẳng đứng, lúc này hệ trở thành hệ dầm).

Hệ ba khớp được sử dụng rộng rãi trong thực tế dưới nhiều hình thức:

- *Vòm ba khớp* (hình 2.23a), khi các miếng cứng của hệ là các thanh cong, trong vòm ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.
- *Khung ba khớp* (hình 2.23b), khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc hoặc thẳng. Trong khung ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt, lực dọc.
- *Dàn vòm ba khớp* (hình 2.23c), khi mỗi miếng cứng của hệ là dàn phẳng bất biến hình và tĩnh định. Trong các thanh của dàn vòm ba khớp chỉ phát sinh lực dọc.
- *Hệ ba khớp có thanh căng* (hình 2.23d). Hệ này gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng khớp  $C$  và thanh căng  $ab$ , tiếp đó liên kết với Trái Đất bằng một gối cố định  $A$  và một gối di động  $B$ . Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô, chịu lực dọc. Trong các miếng cứng  $AC$  và  $CB$ , nói chung phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

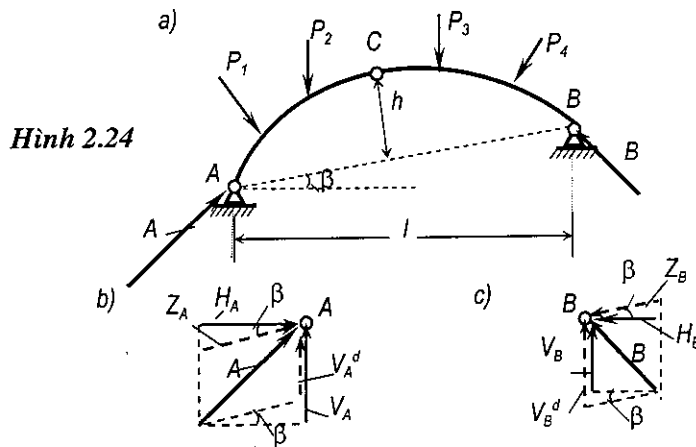


Hệ ba khớp có ưu điểm là có thể vượt qua được các nhịp khá lớn so với hệ dầm. Thật vậy, như dưới đây sẽ thấy, mômen uốn và lực cắt trong vòm ba khớp thường rất nhỏ so với mômen uốn và lực cắt trong dầm có điều kiện làm việc như nhau về nhịp và tải trọng. Hơn nữa, nếu khéo chọn dạng của trục vòm thì mômen uốn và do đó lực cắt tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không hoặc xấp xỉ bằng không, vòm chỉ chịu lực nén là chủ yếu. Lúc

này có thể sử dụng được các loại vật liệu chịu nén tốt như gạch, đá là những loại vật liệu dễ kiếm để xây dựng.

Đối với những nhịp nhỏ, sử dụng kết cấu vòm sẽ không kinh tế bằng kết cấu dầm vì chế tạo kết cấu vòm thường phức tạp hơn.

Một nhược điểm nữa cần chú ý khi sử dụng kết cấu vòm ba khớp là phải xây dựng kết cấu bên dưới gối tựa A và B khá lớn để chịu thành phần lực xô. Có thể khắc phục nhược điểm này bằng cách sử dụng vòm ba khớp có thanh căng. Lúc này dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, các phản lực ở gối tựa chỉ có thành phần thẳng đứng còn thanh căng tiếp nhận lực xô, do đó kết cấu bên dưới gối sẽ đơn giản và nhẹ nhàng hơn.



## 2.4.2. Cách tính hệ ba khớp

### \* Xác định phản lực

Xét hệ ba khớp với các kích thước đã biết và chịu tải trọng bất kỳ như trên hình 2.24a. Gọi A và B là phản lực tại các gối tựa A, B. Các phản lực này có phương chưa biết nên được phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ như sau:

Nếu phân tích theo phương AB và phương đứng (hình 2.24b, c) ta có:

$$\vec{A} \begin{vmatrix} \vec{Z}_A \\ \vec{V}_A^d \end{vmatrix}; \quad \vec{B} \begin{vmatrix} \vec{Z}_B \\ \vec{V}_B^d \end{vmatrix}.$$

Nếu phân tích theo phương ngang và phương đứng (hình 2.24b,c), ta có:

$$\vec{A} \begin{vmatrix} \vec{H}_A \\ \vec{V}_A \end{vmatrix}; \quad \vec{B} \begin{vmatrix} \vec{H}_B \\ \vec{V}_B \end{vmatrix}.$$

Như vậy, muốn xác định các phản lực  $A, B$  ta chỉ cần lần lượt xác định các thành phần của chúng.

### 1. Xác định các thành phần $V_A^d$ và $V_B^d$

Để xác định các phản lực  $V_A^d$  và  $V_B^d$  nên vận dụng các phương trình cân bằng mômen đối với các gối  $A$  và  $B$  vì lúc này các thành phần lực  $Z_A$  và  $Z_B$  không tham gia phương trình cân bằng.

Từ phương trình  $\sum M_B = 0$ , suy ra  $V_A^d$ .

Từ phương trình  $\sum M_A = 0$ , suy ra  $V_B^d$ .

Cách tìm phản lực  $V_A^d$  và  $V_B^d$  trong hệ ba khớp giống như cách tìm phản lực trong dầm tĩnh định nên các phản lực này được gọi là *phản lực dầm* và đọc ký hiệu  $V_A^d$  là  $V_A^{dầm}$ .

### 2. Xác định các thành phần $Z_A$ và $Z_B$

Các lực này được xác định theo điều kiện mômen uốn tại khớp  $C$  bằng không.

Nếu khảo sát phần vòm bên trái ta có:  $M_C = -Z_A h + M_C^{tr} = 0$ ,

trong đó:

$M_C^{tr}$  – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên trái đối với điểm  $C$  (không kể lực  $Z_A$ );

$h$  – khoảng cách từ khớp  $C$  đến đường nối  $AB$ .

Từ đó suy ra:  $Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h}$ . (2.1)

Tương tự, nếu khảo sát phần vòm bên phải, ta có:

$$Z_B = \frac{M_C^{ph}}{h}, \quad (2.2)$$

$M_C^{ph}$  – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên phải đối với điểm  $C$  (không kể lực  $Z_B$ ).

Các thành phần  $Z_A$  và  $Z_B$  thường chỉ tồn tại trong các hệ ba khớp nên được gọi là các *lực vòm*.

### 3. Xác định các thành phần $H_A$ và $H_B$

Từ hình 2.24b, c ta dễ dàng xác định được các thành phần  $H_A$  và  $H_B$  theo  $Z_A$  và  $Z_B$  như sau:

$$H_A = Z_A \cos\beta; \quad H_B = Z_B \cos\beta. \quad (2.3)$$

Khi hệ chỉ chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng, sau khi viết điều kiện cân bằng hình chiếu của các lực lên trục nằm ngang, ta có:

$$H_A = H_B = H.$$

Từ (2.3) ta suy ra:  $Z_A = Z_B = Z$ .

Như vậy, trong trường hợp hệ ba khớp chỉ chịu tải trọng thẳng đứng thì lực vòm, lực xô ở hai gối cũng bằng nhau về giá trị.

#### 4. Xác định thành phần $V_A$ và $V_B$

Từ hình 2.29b, c ta dễ dàng xác định được:

$$V_A = V_A^d + Z_A \sin\beta; \quad V_B = V_B^d - Z_B \sin\beta.$$

Chú ý đến (2.3) ta có:

$$V_A = V_A^d + H_A \operatorname{tg}\beta; \quad V_B = V_B^d - H_B \operatorname{tg}\beta. \quad (2.4)$$

#### 5. Xác định các phản lực toàn phần $A$ và $B$

Phản lực toàn phần  $A$  và  $B$  là tổng hình học của các thành phần phản lực tương ứng:

$$\vec{A} = \vec{V}_A^d + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A; \quad \vec{B} = \vec{V}_B^d + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B.$$

Do đó, độ lớn của phản lực  $A$  và  $B$  được xác định theo công thức sau

$$A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; \quad B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}.$$

#### \* Xác định nội lực

Sau khi biết các thành phần phản lực ta có thể xác định nội lực trong hệ theo phương pháp đã trình bày trong 2.3 và 2.4 tùy theo hệ là dàn ba khớp hoặc vòm, khung ba khớp.

Trong trường hợp *tải trọng tác dụng thẳng đứng hoặc song song với phương trục y*, ta lập được các biểu thức cụ thể, tiện lợi cho việc xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ trong hệ vòm hoặc khung ba khớp.

#### 1. Biểu thức mômen uốn

Giả sử cần thiết lập biểu thức mômen uốn  $M_k(z)$  tại tiết diện  $k$  có hoành độ  $z$  trên vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng như trên hình 2.25a.

Tưởng tượng thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$  và xét cân bằng của một phần vòm, chẳng hạn phần bên trái, ta có:

$$M_k(z) = V_A^d \cdot z - P_1 a_1 - P_2 a_2 - Z_A y_k^*.$$

Đối chiếu với *dầm đơn giản tương ứng* nghĩa là dầm đơn giản có nhịp bằng nhịp của vòm và chịu tải trọng tác dụng như trên vòm (hình 2.25b) ta thấy đại lượng:

$V_A^d \cdot z - P_1 a_1 - P_2 a_2$   
chính là mômen uốn  $M_k^d(z)$   
trong dầm tại tiết diện  $k$   
tương ứng có hoành độ  $z$ .

Do đó có thể viết:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - Z_A y_k^*.$$

Từ hình 2.25 ta thấy:

$$y_k^* = y_k \cos \beta,$$

đồng thời theo (2.3):

$$H_A = Z_A \cos \beta,$$

nên ta có:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H_A y_k.$$

Vì tải trọng tác dụng thẳng đứng, nên  $H_A = H_B = H$ , do đó ta có:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H y_k. \quad (2.5)$$

trong đó:

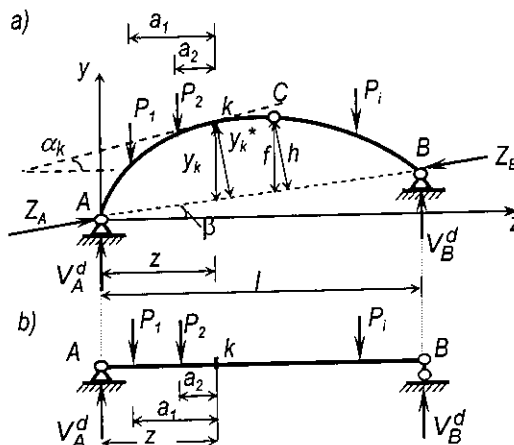
$M_k(z)$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  trên vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$M_k^d(z)$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng tác dụng như trên vòm;

$H$  – lực xô của vòm;

$y_k$  – khoảng cách theo phương thẳng đứng từ tiết diện  $k$  đến đường thẳng  $AB$  nối hai gối của vòm.

Qua công thức (2.5) ta có thể giải thích được tính ưu việt của kết cấu vòm so với kết cấu dầm như sau: mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ của vòm bằng mômen uốn tương ứng trong dầm có cùng nhịp và có cùng tải trọng trừ đi tích số  $H y_k$ . Tích số  $H y_k$  làm cho mômen uốn trong vòm nhỏ hơn mômen uốn trong dầm. Nếu khéo chọn được hình dạng của vòm sao cho tích số  $H y_k$



Hình 2.25



luôn luôn bằng đúng đại lượng  $M_k^d(z)$  thì mômen uốn tại mọi tiết diện của vòm đều bằng không, lúc đó vòm hoàn toàn không chịu uốn và không chịu cắt mà chỉ chịu nén. Như vậy không những sẽ tiết kiệm được vật liệu mà còn có thể sử dụng được những vật liệu chỉ chịu được nén như gạch, đá.

## 2. Biểu thức lực cắt

Giả sử cần thiết lập biểu thức lực cắt  $Q_k(z)$  tại tiết diện bất kỳ  $k$  có hoành độ  $z$  trên vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng (hình 2.25).

Từ định nghĩa về lực cắt, ta có:

$$Q_k(z) = V_A^d \cos \alpha_k - P_1 \cos \alpha_k - P_2 \cos \alpha_k + Z_A \sin \beta \cos \alpha_k - Z_A \cos \beta \sin \alpha_k.$$

Chú ý đến biểu thức (2.3):  $Z_A = \frac{H_A}{\cos \beta},$

ta có thể viết:

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos \alpha_k + \frac{H_A}{\cos \beta} \sin \beta \cos \alpha_k - \frac{H_A}{\cos \beta} \cos \beta \sin \alpha_k.$$

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos \alpha_k + H_A \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k - H_A \sin \alpha_k.$$

Đối chiếu với dầm đơn giản có cùng nhịp và có cùng tải trọng ta thấy đại lượng  $V_A^d - P_1 - P_2$  trong biểu thức trên chính là lực cắt  $Q_k^d(z)$  trong dầm tại tiết diện  $k$  tương ứng có hoành độ  $z$ , cho nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H_A (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k).$$

Nhưng do tải trọng tác dụng thẳng đứng  $H_A = H_B = H$  nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_k). \quad (2.6)$$

trong đó:

$Q_k(z)$  – lực cắt tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  trong vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$Q_k^d(z)$  – lực cắt tại tiết diện  $k$  tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng thẳng đứng tác dụng như trong vòm;

$\alpha_k$  – góc hợp giữa phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện  $k$  và phương nằm ngang;

$\beta$  – góc hợp giữa phương nằm ngang với phương  $AB$  nối liền hai gối;

$H$  – lực xô của vòm.

### 3. Biểu thức lực dọc

Tương tự như trên, nếu quy ước *lực dọc kéo là dương* thì biểu thức lực dọc  $N_k(z)$  tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  của vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng có dạng:

$$N_k(z) = -Q_k^d(z) \sin \alpha_k - H (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \sin \alpha_k). \quad (2.7)$$

Trường hợp đặc biệt nếu hai gối cố định  $A, B$  có cùng cao độ (nghĩa là nếu góc  $\beta = 0$ ) thì các công thức (2.5), (2.6), (2.7) sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

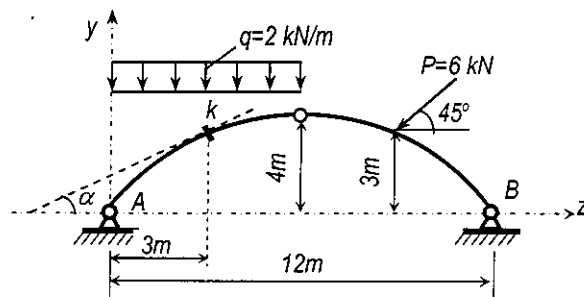
$$\begin{aligned} M_k(z) &= M_k^d(z) - H y_k; \\ Q_k(z) &= Q_k^d(z) \cos \alpha_k - H \sin \alpha_k; \\ N_k(z) &= -Q_k^d(z) \sin \alpha_k - H \cos \alpha_k. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Ví dụ 2.9.**[6] Cho vòm ba khớp có trục biến thiên theo phương trình đường parabol  $y = \frac{1}{9}(12-z)z$  và chịu tải trọng như trên hình 2.26. Xác định nội lực tại tiết diện  $k$  có hoành độ  $z = 3$  m.

Các số liệu của bài toán:

Tại hoành độ  $z_k = 3$  m, ta xác định được tung độ theo công thức:

$$y_k = \frac{(12-3)3}{9} = 3 \text{ m.}$$



Hình 2.26

Góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện  $k$  so với đường nằm ngang được xác định như sau:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = y'_k = \frac{1}{9} (12 - 2 \cdot z_k) = \frac{1}{9} (12 - 2 \cdot 3) = \frac{2}{3}.$$

Từ đó suy ra: 
$$\sin \alpha_k = \frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + (2/3)^2}} = 0,555;$$

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2/3)^2}} = 0,832.$$

Trong trường hợp này hai gối  $A, B$  có cùng cao độ nên góc  $\beta = 0$ , do đó:

$$V_A^d = V_A; \quad V_B^d = V_B; \quad Z_A = H_A; \quad Z_B = H_B.$$

Từ các phương trình cân bằng:

$$\sum M_B = V_A^d \cdot 12 - 2.6.9 - (P \cos 45^\circ) \cdot 3 - (P \sin 45^\circ) \cdot 3 = 0,$$

suy ra  $V_A^d = V_A = 11,12 \text{ kN}$ .

$$\sum M_A = -V_B^d \cdot 12 + 2.6.3 - (P \cos 45^\circ) \cdot 3 + (P \sin 45^\circ) \cdot 9 = 0,$$

suy ra  $V_B^d = V_B = 5,12 \text{ kN}$ .

Theo công thức (2.1) và (2.2) ta tính được các lực vòm:

$$Z_A = H_A = M_C^{tr} / h = (V_A^d \cdot 6 - 2.6.3) / 4 = 7,68 \text{ kN};$$

$$Z_B = H_B = M_C^{ph} / h = [V_B^d \cdot 6 - (P \cos 45^\circ) \cdot 1 - (P \sin 45^\circ) \cdot 3] / 4 = 3,44 \text{ kN}.$$

Sau khi xác định được các phản lực tựa ta tìm nội lực tại một tiết diện bất kỳ bằng cách thực hiện mặt cắt đi qua tiết diện đó và xét cân bằng của một phần vòm bị cắt. Ví dụ, xét cân bằng của phần bên trái ta có:

$$M_k = V_A \cdot 3 - 2.3 \cdot (3/2) - H_A \cdot 3 = 11,12 \cdot 3 - 2.3 \cdot (3/2) - 7,68 \cdot 3 = 1,32 \text{ kNm};$$

$$Q_k = V_A \cos \alpha_k - H_A \sin \alpha_k - 2.3 \cos \alpha_k = 11,12 \cdot 0,832 - 7,68 \cdot 0,555 - 2.3 \cdot 0,832 = 0;$$

$$N_k = -V_A \sin \alpha_k - H_A \cos \alpha_k + 2.3 \sin \alpha_k = -11,12 \cdot 0,555 - 7,68 \cdot 0,832 + 2.3 \cdot 0,555 = -9,23 \text{ kN (lực nén)}.$$

**Ví dụ 2.10.[6].** Cũng cho vòm như trong ví dụ 2.9 nhưng chịu tải trọng thẳng đứng (hình 2.27). Xác định nội lực tại tiết diện  $k$ .

Xác định các phản lực:

Từ phương trình  $\sum M_B = 0$ ,

suy ra  $V_A^d = V_A = 12 \text{ kN}$ .

Từ phương trình  $\sum M_A = 0$ , suy ra  $V_B^d = V_B = 12 \text{ kN}$ .

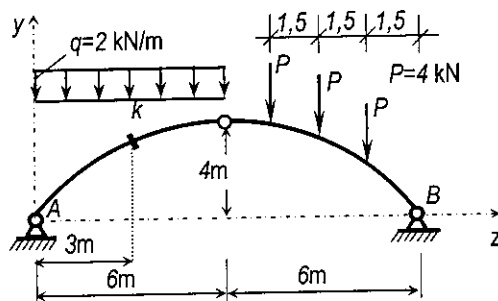
$$Z_A = Z_B = Z = H_A = H_B = H = M_C^{tr} / h = (12 \cdot 6 - 2.6.3) / 4 = 9 \text{ kN}.$$

Vì tải trọng tác dụng thẳng đứng và hai gối cố định có cùng cao độ nên góc  $\beta = 0$ , do đó ta có thể vận dụng công thức (2.8) để tính các nội lực:

$$M_k = M_k^d - H y_k = 12 \cdot 3 - 2(3^2/2) - 9 \cdot 3 = 0;$$

$$Q_k = Q_k^d \cos \alpha_k - H \sin \alpha_k = (12 - 2.3) \cdot 0,832 - 9 \cdot 0,555 = 0;$$

$$N_k = -Q_k^d \sin \alpha_k - H \cos \alpha_k = -(12 - 2.3) \cdot 0,555 - 9 \cdot 0,832 = -10,81 \text{ kN}.$$



Hình 2.27

### 2.4.3. Khái niệm về trục hợp lý của vòm ba khớp

Về mặt kết cấu, *trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho thể tích vòm có giá trị nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo được điều kiện bền.*

Thường thì các nội lực thay đổi khi trục vòm biến đổi cho nên bài toán xác định trục vòm hợp lý ứng với điều kiện  $V_{min}$  là bài toán phức tạp. Thực tế thiết kế cho thấy: *với những vòm có kích thước thông thường, khi biến đổi trục mà vẫn giữ nguyên nhịp và đường tên vông thì chiều dài trục vòm và lực dọc biến đổi ít, còn mômen uốn và lực cắt biến đổi nhiều.* Từ những nhận xét đó, ta có thể xem gần đúng là *thể tích vòm do mômen uốn và lực cắt quyết định.* Do đó, *thể tích của vòm nhỏ nhất khi mômen uốn trong vòm bằng không và lực cắt là đạo hàm của mômen uốn cũng bằng không.*

Dựa vào lập luận gần đúng như trên ta có định nghĩa gần đúng về trục hợp lý của vòm như sau:

*Trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không (do đó lực cắt cũng bằng không).*

Khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm cũng thay đổi theo. Lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng thay đổi phụ thuộc dạng của vòm.* Đôi khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm thay đổi không đáng kể, lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng không phụ thuộc dạng của vòm.* Thực ra trọng lượng bản thân của vòm là một đại lượng phụ thuộc vào hình dạng của vòm. Tuy nhiên, khi tính gần đúng ta có thể ước đoán trọng lượng bản thân vòm, lúc đó tải trọng tác dụng trên vòm (gồm cả trọng lượng bản thân vòm) được xem là độc lập với hình dạng vòm.

Dưới đây trình bày kết quả tìm trục hợp lý của vòm ba khớp cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế.

#### **1. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm**

Trong trường hợp này, biểu thức mômen uốn trong dầm tương ứng cũng không phụ thuộc dạng vòm, do đó ta có thể sử dụng công thức (2.5) để xác định trục hợp lý của vòm:

$$y(z) = \frac{M^d(z)}{H}. \quad (2.9)$$



Ta thấy lực xô  $H$  không phụ thuộc  $z$  nên *trục hợp lý của vòm có dạng biểu đồ mômen uốn trong dầm tương ứng* (có nhịp và tải trọng như của vòm) với tỷ lệ các tung độ nhỏ hơn  $H$  lần.

**Ví dụ 2.11.**[6]. Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài nhịp với cường độ  $q$ , cho biết vòm có chiều dài là  $l$ , đường tên  $f$ , khớp  $C$  ở chính giữa nhịp.

Biểu thức mômen uốn trong dầm chịu tải trọng phân bố đều:

$$M^d(z) = \frac{q}{2} z(l-z).$$

Tương tự như ở ví dụ 2.9, ta xác định được:  $H = \frac{M_C^{tr}}{f} = \frac{ql^2}{8f}$ .

Do đó, theo (2.9) ta có:  $y(z) = \frac{q}{2} z(l-z) \frac{8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} z(l-z)$ .

Như vậy, trục hợp lý có dạng đường parabol bậc hai.

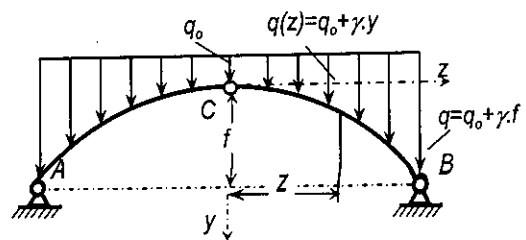
## 2. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp này, không thể xuất phát từ biểu thức (2.9) để xác định trục hợp lý được vì bản thân hàm  $M^d(z)$  cũng phụ thuộc tải trọng. Nếu lấy vi phân hai lần biểu thức (2.9) ta sẽ được phương trình vi phân trục hợp lý biểu thị trực tiếp theo hàm tải trọng  $q$ .

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H}} \quad (2.10)$$

trong đó hàm tải trọng  $q$  không những phụ thuộc biến số  $z$  mà còn phụ thuộc hàm  $y$  cần tìm.

Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.10) bằng phương pháp giải tích chính xác, còn nói chung thì cách giải sẽ gặp nhiều khó khăn và chỉ có thể giải quyết bằng các phương pháp đúng đắn.



Hình 2.28

Trong tài liệu [6] đã trình bày cách giải bằng phương pháp giải tích bài toán vòm chịu tải trọng như trên hình (2.28) với tải trọng thay đổi theo quy luật:

$$q(z) = q_0 + \gamma y,$$

trong đó:

$q_0$  – cường độ tải trọng tại đỉnh vòm;

$\gamma$  – hệ số tỷ lệ;

$y$  – tung độ của tiết diện có hoành độ  $z$  trong vòm ứng với hệ trục  $Czy$ .

Kết quả tìm được trục hợp lý của vòm là đường dây xích dưới dạng:

$$y = \frac{f}{m-1} (ch kz - 1).$$

Trong đó:  $k = \frac{2}{l} \operatorname{arg ch} m = \frac{2}{l} \ln \left( m + \sqrt{m^2 - 1} \right)$  với  $m = \frac{q_0 + \gamma f}{q_0}$ .

Nếu cho biết trị số  $m$  thì ta có thể xác định được hệ số  $k$  và tiếp đó tìm được trục hợp lý của vòm ba khớp.

### 3. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng vuông góc với trục vòm

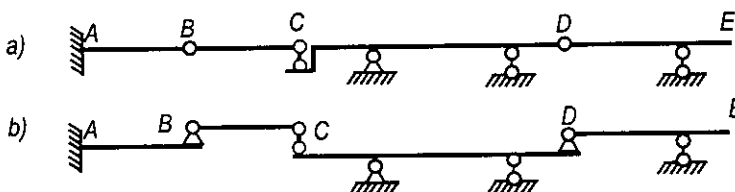
Các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng hoặc chất khí thường chịu áp lực vuông góc với trục. Trường hợp đặc biệt, khi áp lực  $q = \text{const}$ , trục hợp lý của vòm ba khớp là đường tròn (xem [6]).

## 2.5. CÁCH TÍNH HỆ GHÉP TĨNH ĐỊNH

### 2.5.1. Định nghĩa và tính chất chịu lực của hệ ghép

Hệ ghép tĩnh định là hệ gồm nhiều hệ tĩnh định đơn giản nối với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh và nối với Trái Đất bằng các liên kết tựa sao cho hệ là bất biến hình và đủ liên kết.

Trên hình 2.29a giới thiệu một hệ ghép gồm bốn dầm đơn giản nối với nhau, hệ này còn được gọi là hệ dầm tĩnh định nhiều nhịp. Cũng dễ dàng xác nhận được là hệ bất biến hình và đủ liên kết.



Hình 2.29



Từ cách cấu tạo của hệ trên hình 2.29, ta có nhận xét sau: nếu loại bỏ dầm  $BC$  thì dầm  $AB$  vẫn bất biến hình, ngược lại, nếu loại bỏ dầm  $AB$  thì dầm  $BC$  trở thành biến hình. Vì thế ta gọi hệ  $BC$  là hệ phụ của hệ  $AB$  và gọi hệ  $AB$  là hệ chính của dầm  $BC$ .

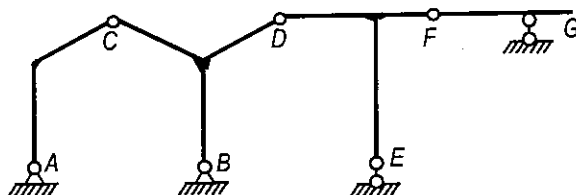
Như vậy, hệ chính là hệ vẫn bất biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận, hệ phụ là hệ sẽ biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận.

Trong hệ này, hệ  $CD$  là chính của hệ  $DE$ ,  $DE$  là phụ của hệ  $CD$ .

Các hệ phụ muốn đứng vững được thì phải tựa vào hệ chính của nó. Do đó có thể biểu diễn hệ đã cho theo sơ đồ cấu tạo về tính chất chịu lực như trên hình 2.29b, trong đó các hệ phụ được đặt trên các hệ chính tương ứng.

Hệ ghép trên hình 2.30 gồm khung ba khớp  $ACBD$ , khung  $DEF$  và dầm đơn giản  $FG$  nối với nhau bằng các khớp  $D, F$ . Trong đó:  $ACBD$  là hệ chính,  $DEF$  là hệ phụ của  $ACBD$  và là hệ chính của  $FG$ , còn  $FG$  là hệ phụ.

Hình 2.30



Về tính chất truyền lực, ta có nhận xét sau:

\* Tải trọng tác dụng trên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính, không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không bị biến dạng nên không phát sinh nội lực.

\* Tải trọng tác dụng trên hệ phụ thì trong cả hệ phụ lẫn hệ chính của nó cũng phát sinh nội lực. Tải trọng truyền áp lực từ hệ phụ vào hệ chính qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

### 2.5.2. Cách tính hệ ghép

Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động thông qua hệ trên hình 2.31.

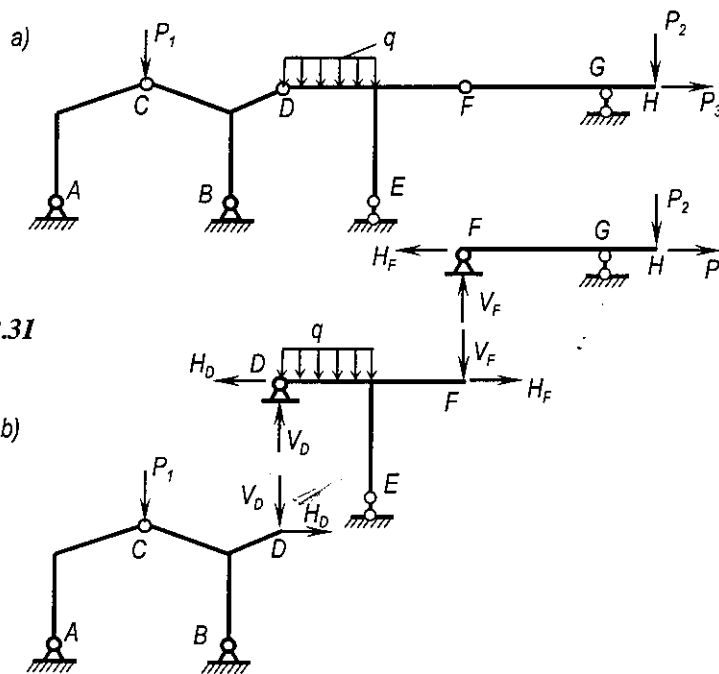
#### Thứ tự thực hiện:

♦ Phân tích cấu tạo của hệ ghép, tức là phân biệt hệ chính và hệ phụ theo quy cách đã nêu trong mục 2.5.1. Ta thấy  $ACBD$  là hệ chính;  $DEF$  là hệ phụ của  $ACBD$  và là hệ chính của  $FGH$ ;  $FGH$  là hệ phụ.



- ◆ Căn cứ vào tính chất chịu lực của hệ chính và hệ phụ đã nêu trong 2.5.1 đưa hệ ghép về sơ đồ tính tách biệt từng hệ đơn giản như trên hình 2.31b.
- ◆ Thực hiện tính toán riêng biệt từng hệ đơn giản theo thứ tự: tính hệ phụ trước rồi chuyển sang tính hệ chính. Khi tính hệ chính, ngoài tải trọng tác dụng trên hệ, cần phải xét đến các áp lực truyền từ hệ phụ.

Đối với hệ trên hình 2.31 trước hết cần tính hệ phụ  $FGH$  chịu tác dụng của các lực  $P_2, P_3$  và xác định phản lực  $V_F, H_F$ . Tiếp đó xét hệ  $DEF$  chịu tải trọng tác dụng trên hệ đó (tải trọng phân bố  $q$ ) và các áp lực truyền từ hệ phụ  $FGH$ : Những áp lực này có giá trị bằng  $V_F$  và  $H_F$  đã biết khi tính hệ phụ  $FGH$  nhưng đặt tại  $F$  với chiều ngược lại. Thực hiện tính toán hệ  $DEF$  với các lực đã biết và xác định được các phản lực  $V_D, H_D$  tại khớp  $D$ . Sau cùng tính hệ chính  $ACBD$  chịu tải trọng tác dụng trên hệ đó (lực  $P_1$ ) và các áp lực đặt tại  $D$  truyền từ  $DEF$  tới. Những áp lực này có giá trị bằng  $V_D$  và  $H_D$  như đã biết nhưng với chiều ngược lại.



Hình 2.31

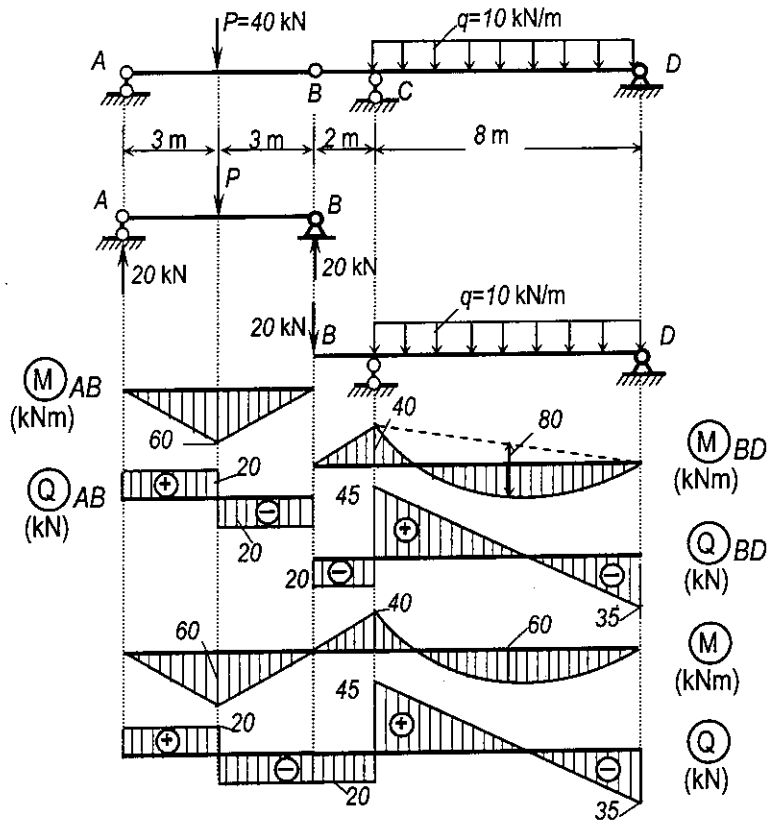
Ví dụ 2.12.[6]. Vẽ biểu đồ nội lực trong hệ dầm ghép cho trên hình 2.32.

Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình bày như trên hình 2.32.

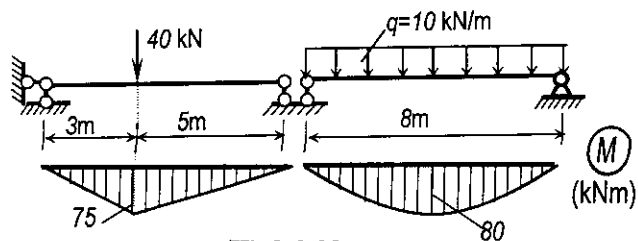
**Chú thích**

So sánh biểu đồ mômen uốn trên hình 2.32 của dầm ghép hai nhịp với biểu đồ mômen uốn trên hình 2.33 của hai dầm đơn giản có cùng nhịp và chịu tải trọng tương đương ta thấy mômen uốn lớn nhất trong dầm ghép là 60 kNm còn mômen uốn lớn nhất trong dầm đơn giản là 80 kNm.

Điều đó cho ta thấy: dùng dầm ghép có khả năng tiết kiệm vật liệu hơn so với dùng dầm đơn giản có điều kiện làm việc tương đương.



Hình 2.32



Hình 2.33

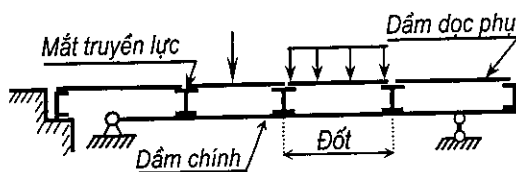
## 2.6. CÁCH TÍNH HỆ CỐ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

### 2.6.1. Định nghĩa và tính chất chịu lực của hệ cố hệ thống truyền lực

Trong thực tế thường gặp những hệ trong đó tải trọng không tác dụng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính mà truyền áp lực vào kết cấu chịu lực qua một hệ thống dầm gọi là hệ thống truyền lực.

Trên hình 2.34 giới thiệu dầm cố hệ thống truyền lực. Trong hệ này, tải trọng chỉ đặt trên các dầm dọc phụ và truyền áp lực từ dầm dọc phụ xuống dầm dọc chịu lực chính (gọi là dầm dọc chính) qua các điểm tựa của dầm dọc phụ trên dầm dọc chính.

Những điểm tựa này được gọi là *mắt truyền lực*. Trong thực tế các mắt truyền lực thường là hệ thống dầm ngang đặt vuông góc với dầm dọc phụ và chính. Khoảng cách giữa hai mắt truyền lực gọi là *đốt*.



Hình 2.34

Hệ cố hệ thống truyền lực thường được dùng trong kết cấu sàn nhà, mái nhà và kết cấu mặt cầu... nhằm mục đích: giảm nhẹ trọng lượng kết cấu chịu lực chính, bảo vệ kết cấu chịu lực chính khỏi bị hư hỏng trong quá trình chịu tải, cố định vị trí đặt lực trên kết cấu chịu lực chính.

Kết cấu chịu lực chính có thể là bất kỳ (dầm, dàn, vòm, khung...) tĩnh định hoặc siêu tĩnh.

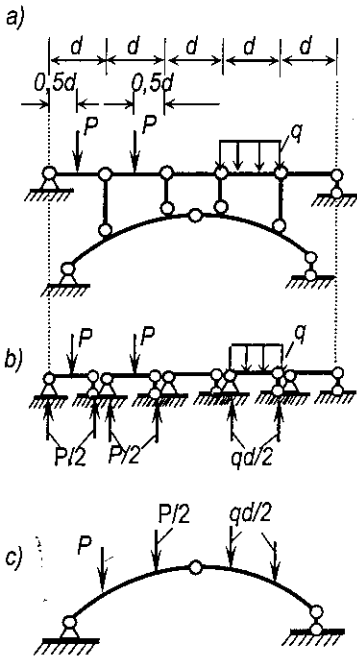
### 2.5.2. Cách tính hệ cố hệ thống truyền lực

Nhiệm vụ chủ yếu của việc tính các hệ cố hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động là xác định nội lực hoặc vẽ các biểu đồ nội lực trong kết cấu chịu lực chính. Thực chất của vấn đề là phải phân tích cách truyền lực từ dầm dọc phụ xuống kết cấu chịu lực chính.

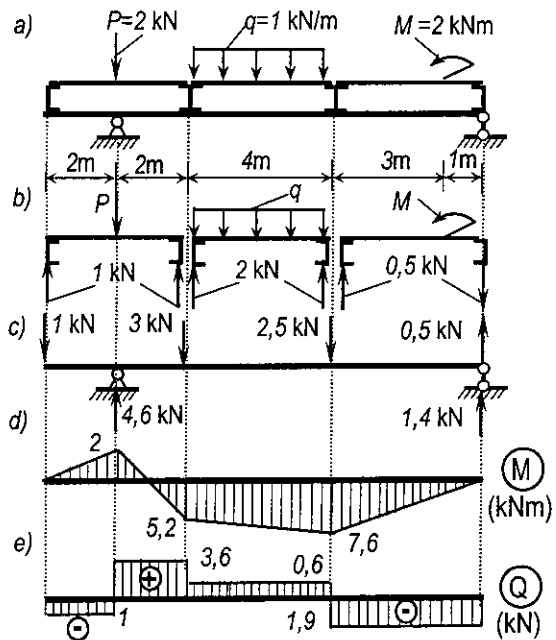
Xét hệ cố hệ thống truyền lực như trên hình 2.35a. Ta thấy các dầm dọc phụ làm việc như những dầm đơn giản kê trên các gối tựa đặt tại vị trí các mắt truyền lực (hình 2.35b). Dưới tác dụng của tải trọng, trong dầm dọc phụ sẽ phát sinh các phản lực và nội lực xác định theo quy tắc đã biết. Để tính kết cấu chính ta cần thay thế tác dụng của tải trọng trên dầm dọc phụ bằng những áp lực đặt tại vị trí các mắt truyền lực. Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, những áp lực này có giá trị bằng các phản lực tương ứng đã

được xác định khi tính dầm dọc phụ nhưng có chiều ngược lại. Sơ đồ tính kết cấu chính như trên hình 2.35c. Như vậy các lực đặt trên kết cấu chịu lực chính đều đã biết và ta có thể xác định nội lực trong kết cấu chịu lực chính theo quy tắc chung đã biết.

Ta nhận thấy các lực đặt trên kết cấu chịu lực chính của hệ có hệ thống truyền lực là những lực tập trung có vị trí xác định đặt tại các mắt truyền lực. Do đó nếu kết cấu chịu lực chính là hệ gồm các thanh thẳng thì biểu đồ lực dọc và lực cắt luôn có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn còn biểu đồ mômen uốn có dạng hình đa giác.



Hình 2.35



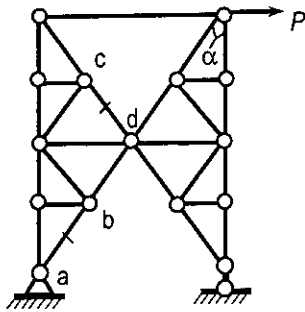
Hình 2.36

**Ví dụ 2.13.** Vẽ biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực cắt trong dầm chính của hệ có hệ thống truyền lực cho trên hình 2.36a.

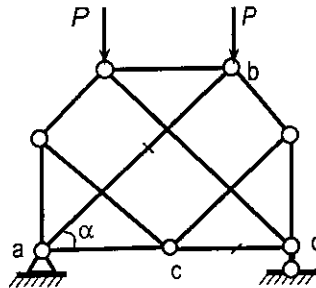
Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình bày trên hình 2.36.

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

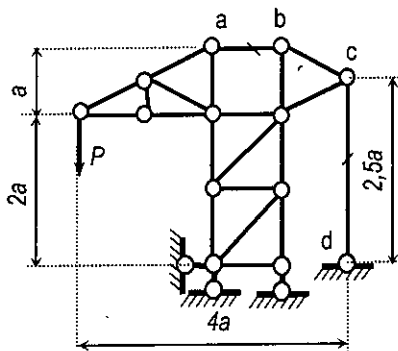
II.1 - II.5.[7]. Vận dụng phương pháp giải tích, xác định lực dọc trong các thanh  $a-b$ ;  $c-d$  của dàn (hình II.1-II.5).



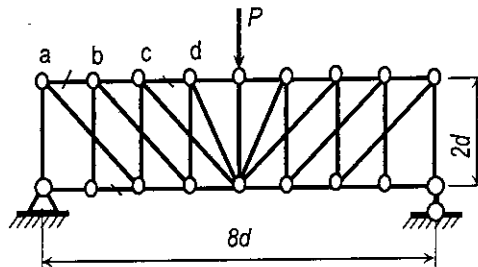
Hình II.1



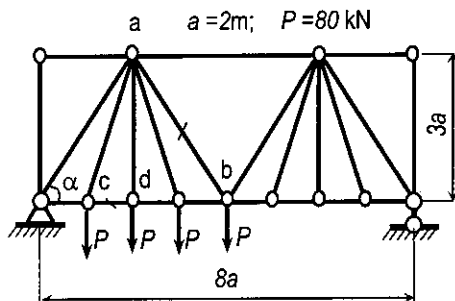
Hình II.2



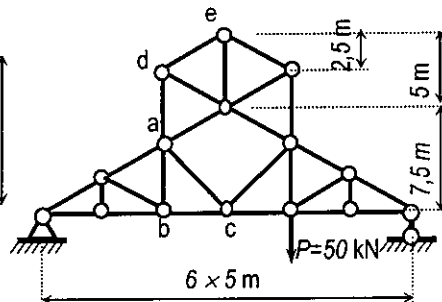
Hình II.3



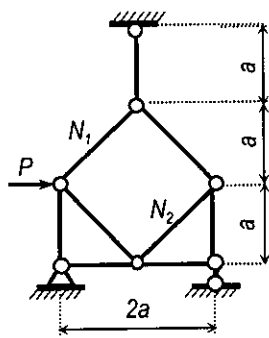
Hình II.4



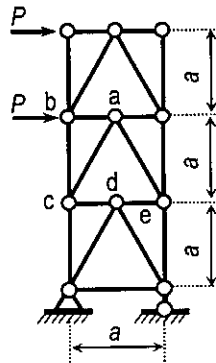
Hình II.5



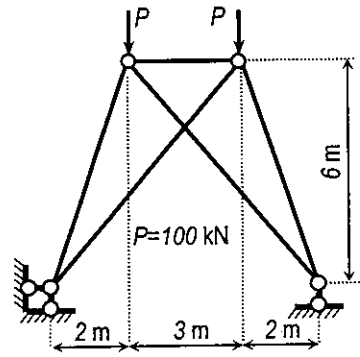
Hình II.6



Hình II.7



Hình II.8



Hình II.9

II.6 - II.8.[7]. Vận dụng các phương pháp thích hợp để xác định lực dọc trong các thanh:

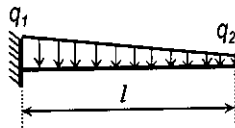
II.6.  $ab$ ;  $ac$  và  $de$  (hình II.6).

II.7.  $N_1$  và  $N_2$  (hình II.7).

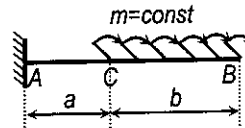
II.8.  $ab$ ;  $bc$ ;  $ac$  và  $ae$  (hình II.8).

II.9.[7]. Vẽ giản đồ nội lực cho hệ dàn trên hình II.9.

II.10 - II.11.[7]. Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt cho các hệ dầm công xôn trên hình II.10 và II.11.

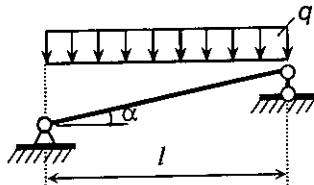


Hình II.10

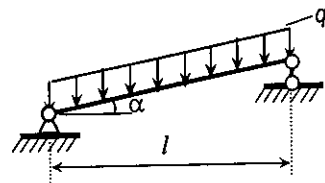


Hình II.11

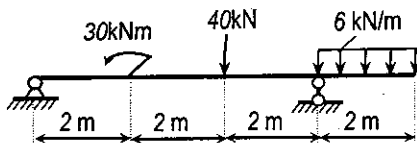
II.12 - II.15.[7]. Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt cho các dầm đơn giản trên các hình II.12 - II.15.



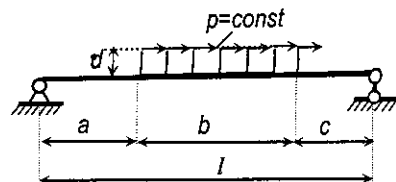
Hình II.12



Hình II.13

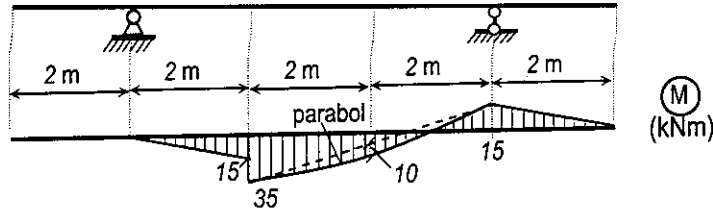


Hình II.14



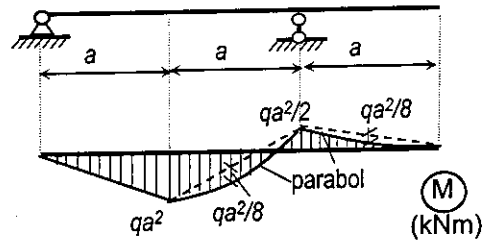
Hình II.15

II.16 - II.17.[7]. Cho biết sơ đồ dầm và biểu đồ mômen uốn (hình II.16 và II.17). Yêu cầu tìm sơ đồ hệ và biểu đồ lực cắt tương ứng.

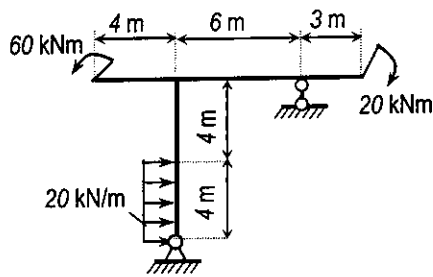


Hình II.16

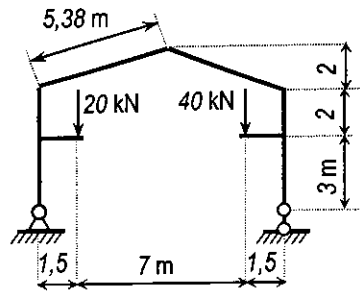
II.18 - II.21.[7]. Vẽ các biểu đồ nội lực trong khung cho trên các hình II.17 - II.20.



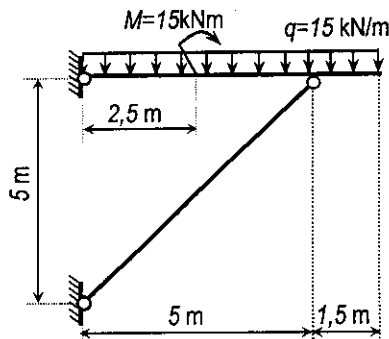
Hình II.17



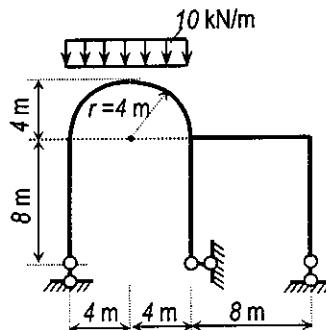
Hình II.18



Hình II.19



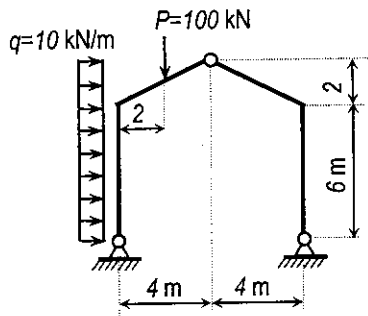
Hình II.20



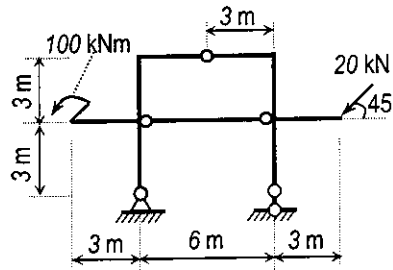
Hình II.21



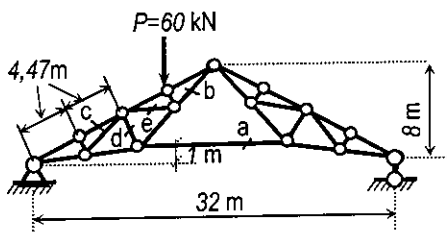
**II.22 - II.23.[7].** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ ba khớp trên các hình II.22 - II.23.



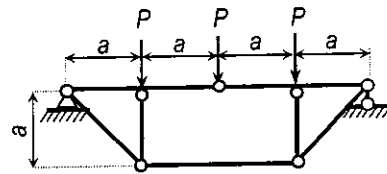
Hình II.22



Hình II.23



Hình II.24

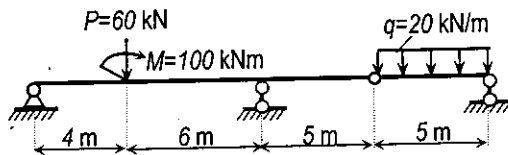


Hình II.25

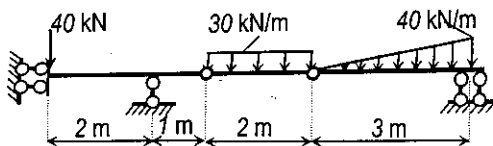
**II.24.[7].** Xác định lực dọc trong các thanh  $a, b, c, d, e$  của hệ dàn vòm ba khớp trên hình II.24.

**II.25.[7].** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ liên hợp trên hình II.25.

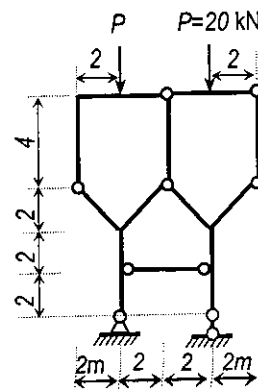
**II.26 - II.27.[7].** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ dầm ghép tĩnh định trên hình II.26 và II.27.



Hình II.26



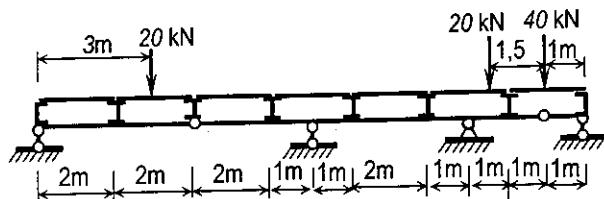
Hình II.27



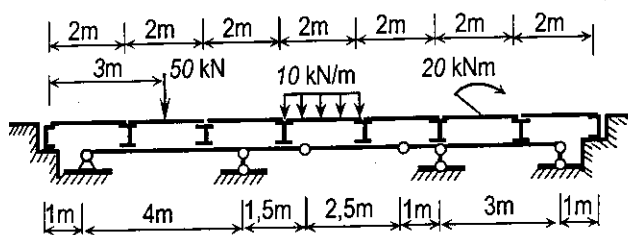
Hình II.28

**II.28.[7].** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ khung ghép tĩnh định trên hình II.28.

**I.29 - II.30.[7].** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ dầm có hệ thống truyền lực trên các hình II.29 - II.30.



**Hình II.29**



**Hình II.30**

# 3

## CÁCH TÍNH THANH CHỊU KÉO HOẶC NÉN ĐÚNG TÂM

Ta gặp trường hợp thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trong thanh chỉ tồn tại thành phần lực dọc  $N$ . Lực dọc dương thì thanh chịu kéo, lực dọc âm thì thanh chịu nén.

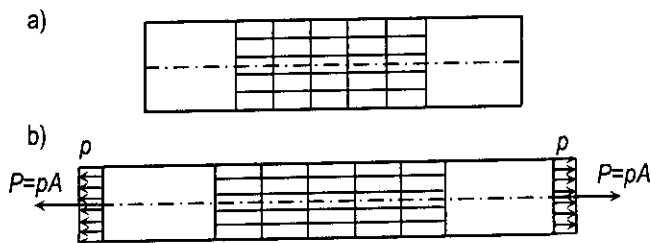
Trong thực tế, dạng chịu lực này của thanh là khá phổ biến và đơn giản nhất. Dây cáp trong cần trục, dây văng trong cầu treo là các thanh chịu kéo; kết cấu dạng cột, trụ là các thanh chịu nén; các thanh trong dàn có thể là chịu kéo hoặc nén.

Để kiểm tra điều kiện bền, điều kiện cứng cho bài toán này ta cần nghiên cứu trạng thái phân bố ứng suất - biến dạng trong thanh.

### 3.1. ỨNG SUẤT TRÊN THANH CHỊU KÉO, NÉN

#### 3.1.1. Quan sát thực nghiệm và các giả thiết

Trên bề mặt của một thanh thẳng có tiết diện không đổi ta kẻ một mạng gồm các đường thẳng như trên hình 3.1a: các đường vuông góc với trục thanh biểu thị các tiết diện ngang; các đường song song với trục thanh biểu thị các thớ dọc của thanh. Cho thanh chịu kéo bởi hai lực ngược chiều nhau với cường độ  $p$  phân bố đều trên diện tích  $A$  của tiết diện ở hai đầu thanh như trên hình 3.1b. Hợp lực  $P = pA$  của các lực phân bố sẽ nằm dọc theo trục thanh và lực dọc trong thanh là  $N = P$ .



Hình 3.1

Sau khi chịu lực ta thấy (hình 3.1b):

- ◆ Các đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vẫn vuông góc với trục thanh nhưng khoảng cách xa nhau hơn.
- ◆ Các đường kẻ song song với trục thanh vẫn thẳng và song song với trục thanh.

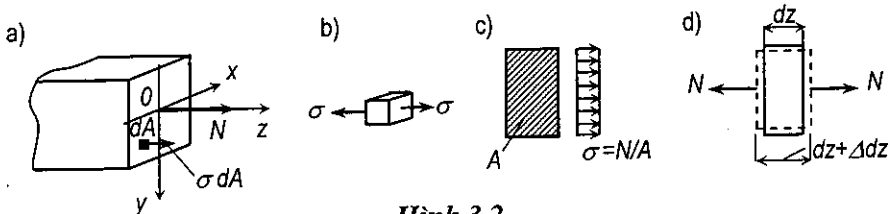
Trên cơ sở quan sát đó ta có thể đề xuất các giả thiết về biến dạng của thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm:

- 1) *Giả thiết tiết diện phẳng (Bernoulli)*: trước và sau khi chịu biến dạng kéo hoặc nén, tiết diện vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh.
- 2) *Giả thiết về thứ dọc*: trong quá trình biến dạng kéo hoặc nén, các thứ dọc tức là các lớp vật liệu dọc trục thanh không chèn ép, xô đẩy nhau và có biến dạng dài như nhau.

### 3.1.2. Ứng suất trên tiết diện ngang

Khi thanh chỉ chịu lực dọc  $N$  ta có các nhận xét sau:

- \* Theo giả thiết tiết diện phẳng, các góc vuông không đổi nên ứng suất tiếp trên tiết diện ngang bằng không.
- \* Theo giả thiết các thứ dọc không chèn ép và có biến dạng dài như nhau nên trên các mặt song song với trục thanh không có ứng suất pháp; trên tiết diện ngang chỉ có ứng suất pháp phân bố đều (hình 3.2.b)



Hình 3.2

Theo công thức (5), trong mục (4.5) chương ở đầu ta có sự liên hệ giữa thành phần lực dọc  $N$  với ứng suất pháp  $\sigma$  (hình 3.2.a):

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A.$$

Từ đó ta suy ra công thức xác định ứng suất pháp:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad (3.1)$$

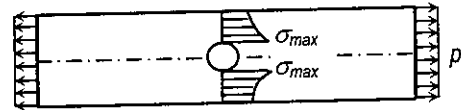
với  $A$  là diện tích tiết diện ngang.

Biểu đồ phẳng của ứng suất pháp như trên hình 3.2c.

**Chú ý:**

\* Khi lực đặt tại hai đầu thanh không phải là hệ lực phân bố mà là lực tập trung chẳng hạn thì các tiết diện ở hai đầu thanh sẽ không phẳng. Theo nguyên lý Saint-Venant, các tiết diện ở xa hai đầu thanh vẫn phẳng nên được phép chấp nhận giả thiết tiết diện phẳng.

\* Trường hợp trên thanh có tiết diện bị giảm yếu cục bộ, chẳng hạn khi thanh tiết diện chữ nhật có lỗ khuyết hình tròn như trên hình 3.3 thì tại tiết diện bị giảm yếu sẽ phát sinh hiện tượng tập trung ứng suất : ứng suất pháp không phân bố đều mà phân bố theo luật đường cong với giá trị lớn nhất tại mép lỗ khuyết.



Hình 3.3

### 3.1.3. Ứng suất trên tiết diện nghiêng

Thực hiện mặt cắt nghiêng có pháp tuyến ngoài u hợp với trục thanh theo góc  $\alpha$  (hình 3.4a). Ứng suất trên mặt cắt này phân bố đều và bằng:

$$p_z = \frac{N}{A_\alpha} \quad (3.2)$$

với  $A_\alpha$  là diện tích mặt cắt nghiêng  $A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}$  (3.3)

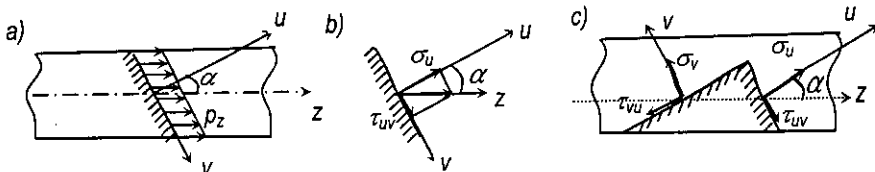
Phân tích  $p_z$  thành hai thành phần theo hai phương u và v, theo cách ký hiệu và quy ước về dấu đã nêu trong mục 4.2 chương mở đầu, ta được:

$$\sigma_u = p_z \cos\alpha; \quad \tau_{uv} = p_z \sin\alpha. \quad (3.4)$$

Thay (3.3) vào (3.2), tiếp đó thay vào (3.4) và chú ý tới (3.1), ta được các công thức ứng suất trên mặt cắt nghiêng:

• ứng suất pháp:  $\sigma_u = \frac{N}{A} \cos^2\alpha = \sigma \cos^2\alpha;$  (3.5)

• ứng suất tiếp:  $\tau_{uv} = \frac{N}{A} \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$  (3.6)



Hình 3.4

Nhận xét:

- ◆ Ứng suất pháp bằng không khi  $\alpha = 90^\circ$ ; đạt cực đại khi  $\alpha = 0^\circ$  với giá trị bằng  $\sigma$ .
- ◆ Ứng suất tiếp bằng không khi  $\alpha = 0^\circ$ ; đạt cực đại khi  $\alpha = 45^\circ$  với giá trị bằng  $\sigma/2$ .

Xét mặt cắt nghiêng có pháp tuyến ngoài v vuông góc với mặt cắt nghiêng có pháp tuyến ngoài u như trên hình 3.4c. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến ngoài v được xác định theo (3.5) và (3.6) nếu thay góc  $\alpha$  bằng  $(\alpha + 90^\circ)$ :

$$\bullet \text{ ứng suất pháp: } \sigma_v = \sigma \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha; \quad (3.7)$$

$$\bullet \text{ ứng suất tiếp: } \tau_{vu} = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.8)$$

Từ công thức (3.5) và (3.7) ta thấy:

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sigma = \text{const}. \quad (3.9)$$

Như vậy, tổng ứng suất pháp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau là một bất biến.

Từ công thức (3.6) và (3.8) ta thấy: ứng suất tiếp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau có giá trị bằng nhau nhưng ngược dấu:

$$\tau_{uv} = -\tau_{vu}. \quad (3.10)$$

Đó là tính chất đối ứng của các ứng suất tiếp.

## 3.2. BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ CỦA THANH

### 3.2.1. Biến dạng dài dọc trục

Theo giả thiết về thớ dọc và giả thiết tiết diện phẳng đã nêu trong mục 3.1.1, nếu tách từ thanh một đoạn có chiều dài  $dz$  (hình 3.2d) thì các thớ dọc của đoạn đó có độ giãn bằng nhau:  $\Delta dz = \text{const}$ . Do đó:

$$\text{Biến dạng dài tỷ đối theo phương } z: \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \text{const} \quad (3.11)$$

Khi thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi, theo định luật Robert Hooke giữa ứng suất và biến dạng có sự liên hệ bậc nhất:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} \text{ nhưng } \sigma = \frac{N}{A}; \text{ nên } \varepsilon_z = \frac{N}{EA} \quad (3.12)$$

với  $E$  là môđun đàn hồi hay môđun Young của vật liệu (xem bảng 3.1).

Đối chiếu (3.11) và (3.12) ta tìm được biến dạng dài của đoạn thanh  $dz$ :

$$\Delta dz = \frac{N dz}{EA}$$

Như vậy, biến dạng dài dọc trục của thanh có chiều dài  $l$  bằng:

$$\Delta l = \int_l \Delta dz = \int_l \frac{N}{EA} dz \quad (3.13)$$

Trường hợp đặc biệt, khi  $N$  và  $EA$  không đổi trên toàn chiều dài thanh thì biến dạng dài dọc trục của thanh bằng:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (3.14)$$

Khi tỷ số  $N/EA$  không đổi trên từng đoạn có chiều dài  $l_i$ , biến dạng dài dọc trục trên toàn chiều dài thanh bằng:

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \quad (3.15)$$

Tích số  $EA$  được gọi là độ cứng trên đơn vị chiều dài của thanh khi chịu kéo hoặc nén.

### 3.2.2. Biến dạng dài theo phương ngang

Khi thanh chịu biến dạng tỷ đối dọc trục  $z$  là  $\varepsilon_z$  thì theo phương  $x, y$  vuông góc với trục  $z$  sẽ phát sinh các biến dạng ngang tỷ đối  $\varepsilon_x$  và  $\varepsilon_y$  ngược dấu với  $\varepsilon_z$ . Các nghiên cứu bằng thực nghiệm và lý thuyết cho thấy độ lớn của hai loại biến dạng tỷ đối này tỷ lệ với nhau. Hệ số tỷ lệ này được gọi là hệ số *Poisson*, ký hiệu là  $\mu$ , phụ thuộc loại vật liệu:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z \quad (3.16)$$

Trong bảng (3.1) cung cấp giá trị của hệ số  $\mu$  tương ứng với một số loại vật liệu thường gặp.

**Bảng 3.1**

Vật liệu	E [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\mu$
Thép cán	$(2 \div 2,1) \cdot 10^4$	0,3 ÷ 0,33
Hợp kim nhôm	$0,72 \cdot 10^4$	0,26 ÷ 0,36
Gang xám	$(1,15 \div 1,6) \cdot 10^4$	0,23 ÷ 0,27
Đồng	$(1 \div 1,3) \cdot 10^4$	0,31 ÷ 0,34
Bê tông	$(0,15 \div 0,23) \cdot 10^4$	0,16 ÷ 0,18
Gạch	$7,0 \cdot 10^2$	0,25
Gỗ dọc thớ	$1 \cdot 10^3$	0,48
Gỗ ngang thớ	$4 \cdot 10^1$	0,02
Cao su	$0,7 \div 0,8$	0,5

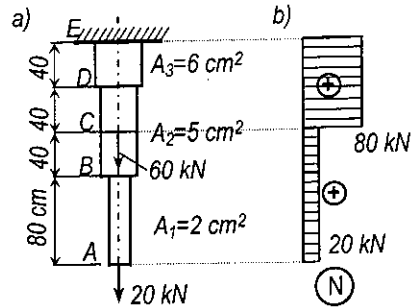
### 3.2.3. Chuyển vị của tiết diện

Khi chịu kéo, nén đúng tâm, trục thanh vẫn thẳng, các tiết diện không có chuyển vị xoay mà chỉ có chuyển vị thẳng dọc trục thanh.

Sau khi biết biến dạng có thể dễ dàng tìm chuyển vị theo phương dọc trục thanh theo các liên hệ hình học (xem ví dụ 3.1).

**Ví dụ 3.1.** Cho thanh có tiết diện thay đổi, chịu lực như trên hình 3.5a.

Vẽ biểu đồ lực dọc trong thanh; xác định ứng suất và biến dạng tương ứng trong từng đoạn thanh; tìm chuyển vị tại đầu A. Cho biết: thanh được chế tạo từ vật liệu có môđun đàn hồi  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 3.5

Biểu đồ lực dọc tìm được như trên hình 3.5b. Cách xác định ứng suất và biến dạng trong từng đoạn thanh được trình bày như trong bảng 3.2.

Bảng 3.2

Đoạn thanh	Ứng suất [kN/cm <sup>2</sup> ]	Biến dạng [cm]
AB	$\sigma_{AB} = 20 / 2 = 10$	$\Delta l_{AB} = (20 \cdot 80) / (2 \cdot 10^4 \cdot 2) = 0,0400$
BC	$\sigma_{BC} = 20 / 5 = 4$	$\Delta l_{BC} = (20 \cdot 40) / (2 \cdot 10^4 \cdot 5) = 0,0080$
CD	$\sigma_{CD} = 80 / 5 = 16$	$\Delta l_{DC} = (80 \cdot 40) / (2 \cdot 10^4 \cdot 5) = 0,0320$
DE	$\sigma_{DE} = 80 / 6 = 13,33$	$\Delta l_{CE} = (80 \cdot 40) / (2 \cdot 10^4 \cdot 6) = 0,0267$

Chuyển vị tại đầu A bằng tổng các biến dạng trong từng đoạn thanh:

$$\Delta_A = 0,0040 + 0,0080 + 0,0320 + 0,0267 = 0,1067 \text{ cm.}$$

### 3.3. CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Để nghiên cứu khả năng chịu lực của vật liệu nhằm xác định độ bền, độ cứng của công trình ta cần tiến hành các thí nghiệm kéo, nén đúng tâm đối với các loại vật liệu khác nhau qua các mẫu thử với các thiết bị chuyên dụng. Vật liệu tuy đa dạng song căn cứ vào tính chất làm việc và khả năng biến dạng ta có thể phân thành hai loại chủ yếu:

- Vật liệu dẻo như thép, nhôm..., chỉ bị phá hỏng khi biến dạng lớn.
- Vật liệu giòn như gang, bê tông, đá ... bị phá hỏng khi biến dạng nhỏ, quá trình phá hỏng xảy ra đột ngột.

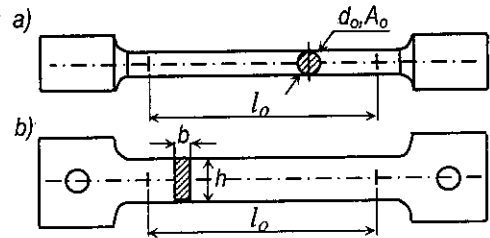


Dưới đây lần lượt mô tả các thí nghiệm kéo và nén đối với hai loại vật liệu nói trên.

### 3.3.1. Thí nghiệm kéo

#### 1. Mẫu thí nghiệm kéo.

Mẫu được chế tạo theo dạng thanh hình trụ tròn (hình 3.6a) hoặc thanh hình lăng trụ tiết diện chữ nhật (hình 3.6b), tiết diện ở hai đầu mẫu được gia cường để kẹp trong các mâm kẹp của máy vạn năng và để cho khi mẫu bị phá hủy thì vết đứt chỉ xảy ra ở phần giữa. Chiều dài chuẩn ban đầu  $l_0$  trên phần giữa được quy định chung là:

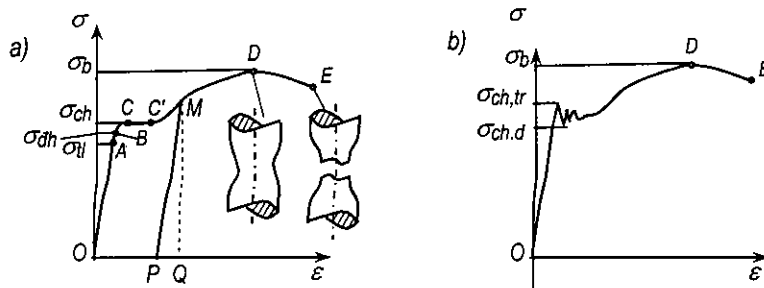


Hình 3.6

- $l_0 = (5-10)d_0$  với các mẫu hình trụ tròn có đường kính tiết diện là  $d_0$ ;
- $l_0 = (5,65-11,3)\sqrt{A_0}$  với các mẫu hình lăng trụ tiết diện chữ nhật có diện tích là  $A_0$  khi tỷ số cạnh dài trên cạnh ngắn nằm trong phạm vi từ 1 đến 5.

#### 2. Kết quả thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Mẫu thí nghiệm được làm bằng thép. Sau khi đặt mẫu vào bộ phận gây lực kéo của máy vạn năng, ta tăng lực kéo với tốc độ rất chậm bảo đảm không phát sinh lực quán tính, từ không cho đến khi mẫu bị phá hoại. Trong quá trình thí nghiệm, lực kéo  $P$  và độ giãn dài  $\Delta l$  của đoạn  $l_0$  được xác định liên tục. Với giả thiết ứng suất pháp phân bố đều trên tiết diện ngang, ta tính được ứng suất trên tiết diện ngang  $\sigma = P/A_0$  và biến dạng dọc tương ứng  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ ; từ đó vẽ được đồ thị kéo trong hệ tọa độ  $(\sigma-\varepsilon)$  như trên hình 3.7a. Trên máy thí nghiệm, đồ thị kéo được vẽ tự động bằng các thiết bị tương ứng. Ta thấy đồ thị bao gồm ba giai đoạn:



Hình 3.7

\* **Giai đoạn tỷ lệ OA:** Đồ thị là đường thẳng, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là bậc nhất, tuân theo định luật Hooke, biến dạng trong giai đoạn này nói chung rất nhỏ. Trong giai đoạn này vật liệu có tính đàn hồi nên được gọi là *giai đoạn đàn hồi*, kết thúc tại *A* tương ứng với giá trị ứng suất kéo là  $\sigma_{el}$ . Thực ra trên giới hạn tỷ lệ một chút vật liệu vẫn còn tính đàn hồi, ứng suất lớn nhất mà vật liệu còn đàn hồi gọi là giới hạn đàn hồi  $\sigma_{dh}$ .

Trong thực tế, một số vật liệu có đoạn OA hơi cong, không đàn hồi mà có biến dạng dư khi bỏ hết lực. Khi đó ta dùng *giới hạn đàn hồi quy ước*  $\sigma_{0,05}$ , tức là ứng suất khi bỏ hết lực thì biến dạng dư tỷ đối bằng 0,05%.

\* **Giai đoạn chảy BCC':** Sau một đoạn cong ngắn chuyển tiếp từ *A* đến *B*, đồ thị là đường thẳng nằm ngang. Lúc này, ứng suất kéo không tăng nhưng biến dạng vẫn tăng nên được gọi là *giai đoạn chảy*. Ứng suất tương ứng với giai đoạn này được gọi là *giới hạn chảy*  $\sigma_{ch}$ . Đôi khi trong thí nghiệm không hình thành đoạn cong *AB*. Do tốc độ kéo không đủ chậm, bút ghi sẽ vạch đường thẳng *OA* vượt quá *B* rồi hạ xuống, tạo nên một đường zích zắc trong cả độ dài *BCC'* (hình 3.7b). Khi đó ta có hai điểm: giới hạn chảy trên và giới hạn chảy dưới. Giới hạn chảy dưới thể hiện tính chất thực của vật liệu nên được quy ước xem là giới hạn chảy của vật liệu.

Trong thực tế, một số vật liệu không có giai đoạn chảy rõ ràng. Khi đó ta dùng *giới hạn chảy quy ước*  $\sigma_{0,2}$ , tương ứng với ứng suất khi bỏ hết lực thì biến dạng dư tỷ đối bằng 0,2%.

\* **Giai đoạn củng cố C'DE:** Qua giai đoạn chảy, vật liệu được khôi phục, quan hệ ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) có dạng đường cong, khi lực tăng, thanh dài thêm, các tiết diện nhỏ dần. Khi ứng suất đạt tới  $\sigma_b$  tương ứng với điểm *D* trên đồ thị, trong đoạn giữa của mẫu phát sinh một tiết diện giảm yếu nhất bị thắt nhỏ lại đột ngột gọi là "cổ thắt" như trình bày trên hình 3.7a. Ứng suất tại tiết diện ở cổ thắt tăng nhanh, tốc độ tăng lực của máy không tăng kịp với tốc độ biến dạng nên đồ thị đi xuống và mẫu bị đứt tương ứng với điểm *E* trên đồ thị.

### 3. Các đặc trưng của vật liệu khi chịu kéo

Ba trị số giới hạn  $\sigma_{el}$ ,  $\sigma_{ch}$  và  $\sigma_b$  là các đặc trưng cơ học của vật liệu. Môđun đàn hồi *E* của vật liệu có thể được xác định bằng hệ số góc của đồ thị trong giai đoạn tỷ lệ.

Để đánh giá tính dẻo của vật liệu ta sử dụng hai đặc trưng sau:

- Độ giãn dài tỷ đối tính theo phần trăm:  $\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%$ .
- Độ thắt tỷ đối tính theo phần trăm:  $\psi = \frac{A_1 - A_0}{A_0} 100\%$ .

trong đó:  $l_1$  – chiều dài chuẩn của mẫu được chấp lại sau khi bị đứt;  
 $A_1$  – diện tích tiết diện bị đứt của mẫu (diện tích bị thắt).

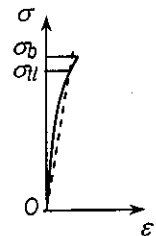
#### 4. Hiện tượng biến cứng nguội

Trong quá trình kéo mẫu vật liệu dẻo, khi ứng suất kéo còn thấp hơn  $\sigma_{th}$ , nếu giảm lực thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng vẫn là đường  $OA$  trên đồ thị 3.7a. Điều đó có nghĩa là khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, nếu cất bỏ lực thì biến dạng cũng mất đi, biến dạng được gọi là đàn hồi.

Khi ứng suất kéo vượt quá  $\sigma_{th}$ , giả sử tới điểm  $M$  tương ứng với biến dạng tỷ đối là đoạn  $OQ$ , nếu giảm lực thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không trở về theo đường cũ  $MC'BAO$  trên đồ thị 3.7a mà theo đường  $MP$  hầu như song song với  $AO$ . Sau khi cất bỏ lực thì thanh vẫn tồn tại biến dạng tỷ đối là đoạn  $OP$ . Biến dạng đó được gọi biến dạng dư hoặc biến dạng dẻo. Sau đó, nếu lại tăng lực kéo thì đồ thị mới sẽ theo sát đường  $PMDE$ . Như vậy, giới hạn tỷ lệ của vật liệu được gia tăng, hiện tượng này được gọi là *hiện tượng biến cứng nguội*, được dùng trong kỹ thuật như một biện pháp công nghệ nhằm nâng cao giới hạn tỷ lệ.

#### 5. Kết quả thí nghiệm kéo vật liệu giòn

Đồ thị kéo ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) của vật liệu giòn như trên hình 3.8. Đồ thị có dạng hơi cong, không hình thành giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy. Giới hạn bền rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu dẻo. Biến dạng rất nhỏ, bị phá hủy đột ngột, không hình thành cổ thắt. Để áp dụng được định luật Hooke, ta giả định giai đoạn là đoạn thẳng và sử dụng giới hạn tỷ lệ quy ước.

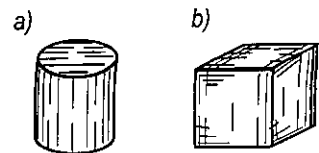


Hình 3.8

### 3.3.2. Thí nghiệm nén

#### 1. Mẫu thí nghiệm nén.

Mẫu được chế tạo theo dạng hình trụ tròn (hình 3.9a) hoặc khối lập phương (hình 3.9b). Chiều cao

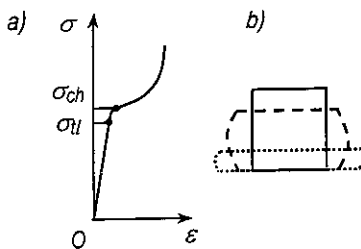


Hình 3.9

của mẫu nén thường bằng 1 đến 1,5 đường kính hay kích thước lớn nhất của đáy.

### 2. Kết quả thí nghiệm nén vật liệu dẻo

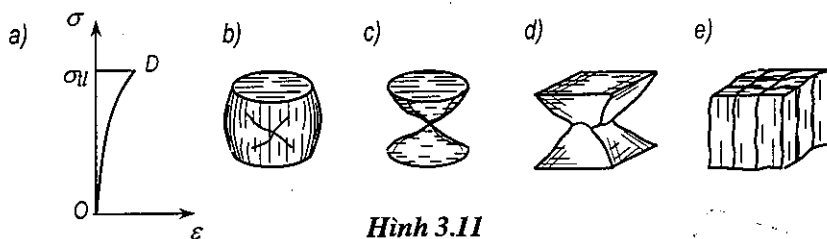
Mẫu thí nghiệm được làm bằng thép, thường có dạng hình trụ tròn. Sau khi đặt mẫu vào bộ phận gây lực nén của máy vạn năng ta được đồ thị nén ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) như trên hình 3.10a. Đồ thị cũng hình thành ba giai đoạn: giai đoạn tỷ lệ, giai đoạn chảy và giai đoạn cứng cố. Do đó, ta cũng có giới hạn tỷ lệ, giới hạn chảy còn giới hạn bền thì không



Hình 3.10

xác định được. Lực tăng, mẫu bị ngăn lại và nở rộng theo chiều ngang. Diện tích tiết diện ngang càng tăng thì khả năng chịu lực của mẫu cũng tăng lên. Mẫu thí nghiệm sau khi chịu nén có dạng hình trống như đường đứt nét trên hình 3.10b. Thí nghiệm chứng tỏ các giá trị giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy khi kéo và khi nén tương ứng bằng nhau nên có thể xem khả năng chịu kéo và chịu nén của vật liệu dẻo là như nhau.

### 3. Kết quả thí nghiệm nén vật liệu giòn



Hình 3.11

Đồ thị quan hệ ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) của mẫu chịu nén chỉ hình thành một giai đoạn là đường cong có độ cong nhỏ, gần thẳng như trên hình 3.11a. Đồ thị kết thúc tại điểm D khi mẫu bị vỡ. Nếu giữa mâm nén và mẫu không được bôi trơn thì mẫu cũng có dạng hình trống, hình thành các vết nứt nghiêng  $45^\circ$  so với phương nén (hình 3.11b); vật liệu sẽ bị bong dần quanh mẫu, cuối cùng còn lại hai hình chóp có đáy là mặt tiếp xúc với mâm nén (hình 3.11c, d). Nếu giữa mâm nén và mẫu được bôi trơn thì trên mẫu hình thành các vết nứt song song với phương nén như trên hình 3.11e.

#### 3.3.3. Các đặc trưng cơ học của một số vật liệu thường dùng

Bảng 3.3 cung cấp giới hạn chảy và giới hạn bền của một số vật liệu.

**Bảng 3.3**

Vật liệu	$\sigma_{ch}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_b$ (kéo) [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_b$ (nén) [kN/cm <sup>2</sup> ]
Thép CT 38 (CT3)	21 ÷ 25	38 ÷ 49	38 ÷ 49
Thép CT 51 (CT5)	26 ÷ 29	51 ÷ 64	51 ÷ 64
Thép hợp kim		80	80
Đuy ra		45 ÷ 50	45 ÷ 50
Gang xám		12 ÷ 38	50 ÷ 150
Bê tông		$(6,5 \div 13,5)10^{-2}$	$(78 \div 245)10^{-2}$
Gỗ		0,40	0,80

### 3.4. CÁC QUAN ĐIỂM TÍNH TOÁN KẾT CẤU

Để giải các bài toán kết cấu, các quy trình thiết kế đã đưa ra nhiều quan điểm tính toán, trong số đó có hai quan điểm cơ bản như sau:

- \* *Quan điểm tính theo ứng suất cho phép*
- \* *Quan điểm tính theo các trạng thái giới hạn*

#### 3.4.1. Quan điểm tính theo ứng suất cho phép

Theo quan điểm này, khả năng chịu lực của hệ thanh chỉ được bảo đảm khi giá trị ứng suất lớn nhất tại mỗi thanh chưa vượt quá một giá trị gọi là *ứng suất cho phép* được ký hiệu trong dấu móc vuông [ ]. Trị số của ứng suất cho phép phụ thuộc thể loại vật liệu và tìm được bằng thực nghiệm. Đối với thanh chịu kéo, nén đúng tâm, điều kiện bền được mô tả như sau:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (3.17)$$

Ứng suất cho phép được xác định theo công thức sau:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (3.18)$$

trong đó:

$\sigma_o$  – ứng suất nguy hiểm phụ thuộc loại vật liệu, tìm bằng thực nghiệm.

- Với vật liệu dẻo,  $\sigma_o$  được xác định theo giới hạn bền tương ứng với khi thanh chịu kéo hoặc nén.
- Với vật liệu giòn,  $\sigma_o$  được xác định theo giới hạn tỷ lệ hoặc giới hạn chảy không cần phân biệt thanh chịu kéo hay nén. Hai giá trị này rất gần nhau nên có thể lấy một trong hai giá trị  $\sigma_{tl}$  hoặc  $\sigma_{dh}$  làm  $\sigma_o$ .

$n$  – hệ số an toàn xét đến các yếu tố có ảnh hưởng đến độ bền. Giá trị của hệ số này được xác định trên cơ sở các yếu tố sau:

- Tính đồng nhất và chất lượng của vật liệu sử dụng.
- Mức độ tin cậy của các số liệu tải trọng.
- Mức độ chính xác của phương pháp tính và kết quả tính.
- Điều kiện làm việc của kết cấu.
- Ý nghĩa kinh tế, xã hội của công trình (tạm thời hay vĩnh cửu).

Như vậy, đối với thanh chịu kéo, nén đúng tâm, điều kiện bền (3.17) được mô tả cụ thể hơn như sau:

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (3.19)$$

Vế trái của bất đẳng thức biểu thị trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất trong hệ.

Từ điều kiện bền (3.19) ta có thể giải được ba bài toán cơ bản thường gặp:

**1. Bài toán kiểm tra:** kiểm tra xem thanh có thỏa mãn bất đẳng thức (3.19) tức là đủ khả năng bảo đảm điều kiện bền khi đã biết đầy đủ kích thước, vật liệu và tải trọng.

**2. Bài toán thiết kế:** tìm kích thước tiết diện thanh theo điều kiện:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

khi biết trước vật liệu và tải trọng.

**3. Bài toán trị số an toàn của tải trọng:** tìm trị số tải trọng tương ứng với khả năng chịu đựng của thanh theo điều kiện:  $N \leq A[\sigma]$  khi biết trước vật liệu và kích thước tiết diện thanh.

Tương tự điều kiện bền (3.19), điều kiện cứng cũng được mô tả theo một trong các dạng sau:

- Theo biến dạng tỷ đối:  $\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon]$ .
- Theo biến dạng tuyệt đối:  $\Delta l_{\max} \leq [\Delta l]$ .
- Theo chuyển vị  $w$ :  $w_{\max} \leq [w]$ .

Từ điều kiện cứng nêu trên ta cũng có thể giải được ba bài toán cơ bản tương tự như đối với điều kiện bền

Nhược điểm của cách kiểm tra điều kiện bền theo quan điểm ứng suất cho phép là:

- Đánh giá độ bền của toàn hệ chỉ tại những điểm nguy hiểm, không xét đến khả năng chịu lực tiếp sau của toàn hệ.
- Chỉ sử dụng một hệ số an toàn chung để đánh giá độ bền của kết cấu mà không xét một cách chặt chẽ về khả năng thay đổi đặc trưng cơ học và đặc biệt là tính dẻo của vật liệu, cũng như về khả năng thay đổi tải trọng.

Ưu điểm của cách kiểm tra điều kiện bền theo quan điểm ứng suất cho phép là đơn giản. Do tính đơn giản và cách tính thiên về an toàn nên quan điểm ứng suất cho phép vẫn được sử dụng, đặc biệt là trong các ngành chế tạo máy, công trình hàng hải, hàng không. Trong toàn bộ tài liệu này trình bày cách thực hiện theo quan điểm ứng suất cho phép là chủ yếu.

### 3.4.2. Quan điểm tính theo các trạng thái giới hạn

Để khắc phục các nhược điểm của quan điểm ứng suất cho phép, người ta đã xây dựng cách đánh giá khác về khả năng làm việc của kết cấu. Đó là cách tính kết cấu theo *trạng thái giới hạn*.

*Trạng thái giới hạn của kết cấu là trạng thái xảy ra do ứng suất hay do chuyển vị phát triển quá mức làm cho kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa.*

Trạng thái giới hạn của kết cấu không nhất thiết phải là trạng thái kết cấu bị phá hoại, mà chính là trạng thái kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa. Một kết cấu không thể làm việc bình thường có thể là do mất khả năng chịu lực (chẳng hạn không đủ độ bền, không đủ ổn định hay độ chịu mỏi), hoặc do biến dạng quá mức, hoặc do phát sinh các vết nứt. Do đó có thể chia ra hai nhóm trạng thái giới hạn:

\* *Trạng thái giới hạn về cường độ*, xác định theo khả năng chịu lực của kết cấu (về độ bền, độ ổn định và độ chịu mỏi).

\* *Trạng thái giới hạn về sử dụng*, xác định theo sự biến dạng quá mức của kết cấu (độ cứng), sự xuất hiện các dao động, vết nứt...

So sánh với cách tính theo ứng suất cho phép, cách tính kết cấu theo trạng thái giới hạn có xét đến tính dẻo của vật liệu, thường kinh tế hơn và trong khá nhiều trường hợp lại đơn giản hơn.

Theo cách tính này, có ba loại hệ số an toàn:

1. *Hệ số vượt tải  $n$* , kể đến khả năng thay đổi của tải trọng so với tải trọng tiêu chuẩn (quy định trong các văn bản *Tiêu chuẩn Kỹ thuật Nhà Nước*) tức là xét đến sự sai lệch ngẫu nhiên giữa tải trọng tác dụng và tải trọng tiêu chuẩn. Tải trọng tính toán  $P_t$  sẽ bằng tải trọng tiêu chuẩn  $P_{tc}$  nhân với hệ số vượt tải  $n$  lớn hơn đơn vị.

$$P_t = P_{tc} \cdot n.$$

Khi tính về độ chịu mỏi theo trạng thái giới hạn về cường độ và khi tính về độ cứng theo trạng thái giới hạn về sử dụng, tải trọng được lấy bằng tải trọng tiêu chuẩn ( $n=1$ ).

2. *Hệ số đồng chất  $k$  của vật liệu*, kể đến khả năng thay đổi tính chất và giảm độ bền của vật liệu do ảnh hưởng của hình dạng và kích thước của kết cấu gây ra. Hệ số  $k > 1$ .

3. *Hệ số điều kiện làm việc  $m$  của kết cấu*, kể đến ảnh hưởng của những yếu tố bất lợi cho sự liên kết không chính xác các cấu kiện v.v... Tùy từng trường hợp cụ thể, hệ số này có giá trị tương ứng khác nhau, lớn hơn hoặc nhỏ hơn đơn vị.

Đặc trưng độ bền của vật liệu là *sức chịu tính toán  $R_t$*  vừa phụ thuộc sự đồng chất của vật liệu vừa phụ thuộc điều kiện làm việc của kết cấu, được xác định bằng *sức chịu tiêu chuẩn  $R_{tc}$*  (tức giới hạn chảy, hoặc giới hạn bền hay giới hạn mỏi tùy từng trường hợp) chia cho hệ số đồng chất  $k$  và nhân với hệ số điều kiện làm việc  $m$  ( $m < 1$ ):

$$R_t = R_{tc} \frac{m}{k}.$$

Như vậy, điều kiện bền của thanh chịu kéo, nén đúng tâm theo trạng thái giới hạn về cường độ có dạng:

$$N \leq AR_{tc} \frac{m}{k}.$$

trong đó:  $N$  là lực dọc xác định theo tải trọng tính toán;  $A$  là diện tích tiết diện thanh.

Tương tự, điều kiện cứng cũng được mô tả theo dạng chung như sau:

$$\Delta l_{max} \leq [\Delta l].$$

trong đó:  $\Delta l_{max}$  là biến dạng hay chuyển vị tính toán, thường tính trong giới hạn đàn hồi;  $[\Delta l]$  là biến dạng hay chuyển vị quy định trong Tiêu chuẩn kỹ thuật.



Quan điểm tính theo trạng thái giới hạn được sử dụng phổ biến để tính các công trình xây dựng. Trong các giáo trình chuyên môn như kết cấu bê tông cốt thép, kết cấu thép sẽ đề cập chi tiết các nội dung này.

**Ví dụ 3.2.** Cho hệ thanh chịu lực như trên hình 3.12. Cho biết: thanh  $AB$  cứng tuyệt đối; thanh  $AC$  có diện tích tiết diện là  $3 \text{ cm}^2$ ; các thanh  $AB$  và  $BD$  có tiết diện tròn,  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ . Yêu cầu:

1. Kiểm tra điều kiện bền đối với thanh  $AC$ .
2. Xác định tiết diện thanh  $BD$  theo điều kiện bền.
3. Xác định biến dạng dài tuyệt đối của thanh  $AB$  và  $BD$  tương ứng.

♦ Xác định nội lực trong các thanh  $AC$  và  $BD$ :

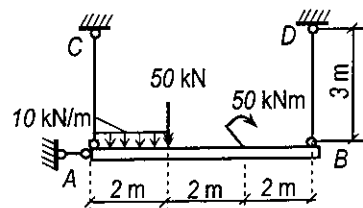
Từ các điều kiện cân bằng:

$$\sum M_B = N_{AC}.6 - 10.2.5 - 50.4 + 50 = 0;$$

$$\sum M_A = N_{BD}.6 - 10.2.1 - 50.2 - 50 = 0;$$

ta tìm được:  $N_{AC} = 41,6667 \text{ kN}$ ;

$$N_{BD} = 28,3333 \text{ kN}.$$



Hình 3.12

♦ Kiểm tra điều kiện bền thanh  $AC$ :

$$\sigma_{AC} = \frac{41,6667}{3} = 13,889 \text{ kN/cm}^2 < 14 \text{ kN/cm}^2 \text{ (đạt)}.$$

♦ Xác định tiết diện thanh  $BD$ : từ điều kiện bền ta có:

$$A_{BD} \geq \frac{N_{BD}}{[\sigma]} = \frac{28,3333}{14} = 2,024 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Đường kính của thanh } BD: d_{BD}^2 = \frac{4.2,024}{\pi} = 2,577 \text{ cm}.$$

Suy ra:  $d = 1,6053 \text{ cm}$ . Chọn:  $d = 1,6 \text{ cm}$ .

♦ Xác định biến dạng dài tuyệt đối của các thanh:

$$\bullet \text{ Thanh } AC: \Delta l_{AC} = \frac{41,6667.300}{2.10^4.3} = 0,208 \text{ cm}.$$

$$\bullet \text{ Thanh } BD: \Delta l_{BD} = \frac{28,3333.300.4}{2.10^4.\pi.1,6^2} = 0,2114 \text{ cm}.$$

**Ví dụ 3.3.** Cho hệ thanh chịu lực  $P$  như trên hình 3.13a. Các thanh  $AB$  và  $AC$  có diện tích tiết diện là  $2 \text{ cm}^2$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = 14 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\Delta] = 0,10 \text{ cm}$ . Yêu cầu:

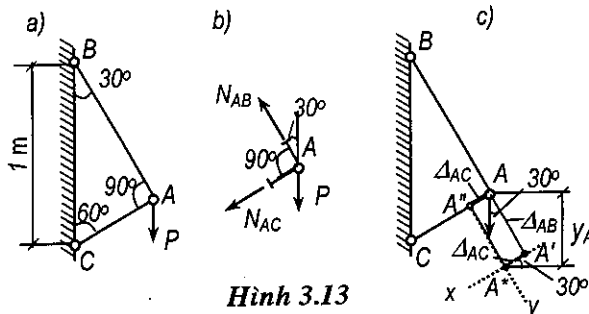
1. Xác định giá trị cho phép của lực  $P$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng.
2. Tìm chuyển vị theo phương thẳng đứng tại  $A$  tương ứng với giá trị tìm được của  $P$ .

◆ Xác định nội lực trong các thanh  $AB$  và  $AC$ :

Tách mắt  $A$  (hình 3.12b); từ các điều kiện cân bằng hình chiếu lên phương  $AB$  và  $AC$  ta tìm được:

$$N_{AB} = P \cos 30^\circ = 0,866P$$

$$N_{AC} = -P \cos 60^\circ = -0,5P.$$



Hình 3.13

◆ Xác định  $P$ :

- Điều kiện bền với thanh  $AB$ :  $N_{AB} = 0,866P \leq [\sigma] A = 14,2 = 28 \text{ kN}$ .

Suy ra:  $P \leq 28/0,866 = 32,33 \text{ kN}$ .

- Điều kiện bền với thanh  $AC$ :  $N_{AC} = 0,5P \leq [\sigma] A = 14,2 = 28 \text{ kN}$ .

Suy ra:  $P \leq 28/0,5 = 56 \text{ kN}$ .

- Điều kiện cứng với thanh  $AB$ :  $\Delta_{AB} = \frac{0,866P \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot 10^4 \cdot 2} \leq [0,15] \text{ cm}$ ;

Suy ra:  $P \leq \frac{0,15 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2}{0,866 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ} = 80 \text{ kN}$ .

- Điều kiện cứng với thanh  $AC$ :  $\Delta_{AC} = \frac{0,5P \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ}{2 \cdot 10^4 \cdot 2} \leq [0,15] \text{ cm}$ ;

Suy ra:  $P \leq \frac{0,15 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2}{0,5 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ} = 240 \text{ kN}$ .

Chọn giá trị nhỏ nhất là trị số cho phép của lực  $P = 32,33 \approx 32 \text{ kN}$ .

◆ Xác định chuyển vị theo phương thẳng đứng tại  $A$ :

Khi  $P = 32 \text{ kN}$ , biến dạng dài dọc trục của các thanh  $AB$  và  $AC$  là:

$$\Delta_{AB} = \frac{0,866 \cdot 32 \cdot 100 \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot 10^4 \cdot 2} = 0,0599 \approx 0,06 \text{ cm};$$

$$\Delta_{AC} = -\frac{0,5 \cdot 32 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ}{2 \cdot 10^4 \cdot 2} = -0,0200 \text{ cm}.$$

Khi điểm  $A$  chỉ thuộc thanh  $AB$ , do biến dạng dài dọc trục  $\Delta_{AB}$  nên điểm  $A$  chuyển dời tới  $A'$  (hình 3.13c). Tiếp đó, thanh  $AB$  chỉ cho phép  $A'$  chuyển

dịch theo cung tròn tâm  $B$ , bán kính  $BA$ . Trong phạm vi chuyển vị nhỏ chuyển dịch này được xem là chuyển dịch theo phương vuông góc với thanh  $AB$ , tức là theo trục  $x$  trên hình 3.13c.

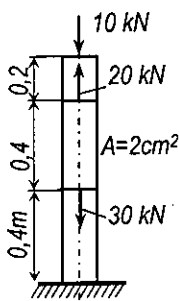
Khi điểm  $A$  chỉ thuộc thanh  $AC$ , do biến dạng dài dọc trục  $\Delta_{AC}$  nên điểm  $A$  chuyển dời tới  $A''$  (hình 3.13c). Tiếp đó, tương tự như trên, thanh  $AC$  chỉ cho phép  $A''$  chuyển dịch theo phương vuông góc với thanh  $AC$ , tức là theo trục  $y$  trên hình 3.13c.

Khi điểm  $A$  cùng thuộc thanh  $AB$  và  $AC$  thì điểm  $A$  chuyển dời tới vị trí mới là  $A^*$  là giao điểm của hai trục  $x, y$  (hình 3.13c). Từ hình vẽ ta dễ dàng tìm được thành phần thẳng đứng của chuyển vị tại  $A$ :

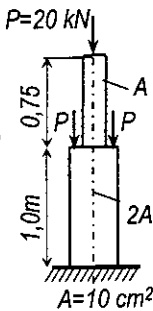
$$\Delta_y = \Delta_{AB} \cos 30^\circ + \Delta_{AC} \cos 60^\circ = 0,06 \cdot 0,866 + 0,02 \cdot 0,5 = 0,062 \text{ cm.}$$

### BÀI TẬP CHƯƠNG III

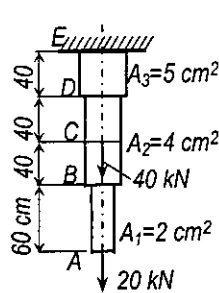
**III.1 - III.3.** Vẽ biểu đồ ứng suất dọc theo chiều dài trục và xác định biến dạng dài tuyệt đối của thanh (hình III.1-III.3).  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



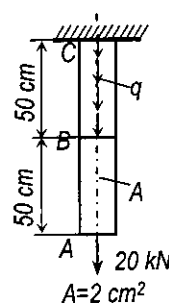
Hình III.1



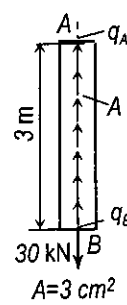
Hình III.2



Hình III.3



Hình III.4



Hình III.5

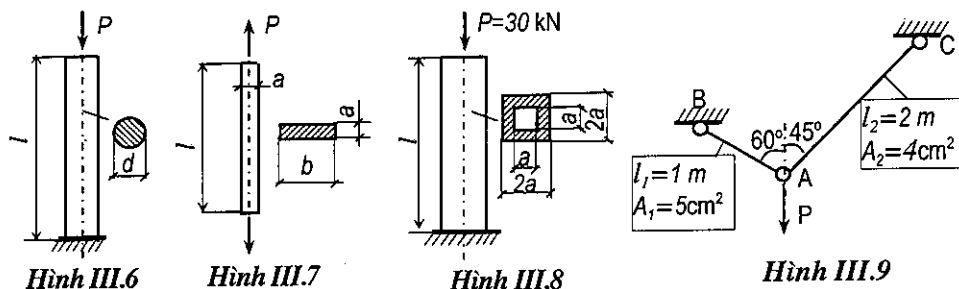
**III.4.** [12]. Vẽ biểu đồ ứng suất dọc theo chiều dài trục và xác định biến dạng dài tuyệt đối của thanh (hình III.4). Cho biết: thanh chịu lực tập trung 20 kN tại  $A$  và chịu lực phân bố đều dọc theo trục thanh trên đoạn  $BC$  với cường độ  $q = 10 \text{ kN/m}$ .  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

**III.5.** [12]. Vẽ biểu đồ ứng suất dọc theo chiều dài trục thanh và xác định biến dạng dài tuyệt đối của thanh (hình III.5). Cho biết: thanh chịu lực tập trung 30 kN tại  $A$  và chịu lực phân bố theo luật bậc nhất dọc trục thanh với cường độ  $q_B = 0 \text{ kN/m}$  tại  $B$  và  $q_A = 20 \text{ kN/m}$  tại  $A$ .  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

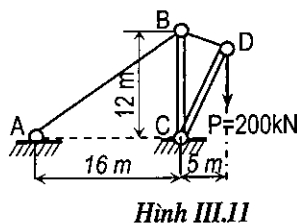
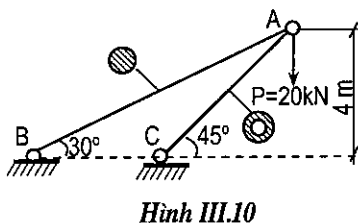
**III.6 - III.7.** [12]. Xác định biến dạng dài tuyệt đối theo phương dọc và phương ngang trục thanh. Cho biết: môđun đàn hồi  $E$  và hệ số biến dạng ngang  $\mu$ .

**III.8.** [12]. Xác định biến dạng dài tỷ đối theo phương dọc và biến dạng dài tuyệt đối theo phương ngang trục thanh. Cho biết:  $P = 30$  kN;  $a = 10$  mm; môđun đàn hồi  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>; hệ số biến dạng ngang  $\mu = 0,3$ .

**III.9.** [12]. Cho hệ như trên hình III.9. Xác định giá trị cho phép của lực  $P$  theo điều kiện bền. Tìm biến dạng dài tuyệt đối dọc trục các thanh  $AB$ ,  $AC$ . Cho biết:  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma] = 14$  kN/cm<sup>2</sup>.



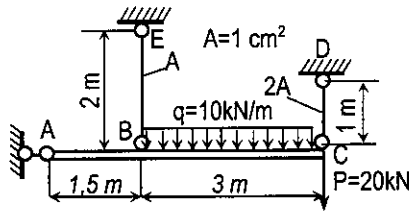
**III.10.** Cho hệ như trên hình III.10. Kiểm tra thanh  $AB$  về điều kiện bền khi thanh được làm bằng thép tròn với đường kính 2,5 cm. Chọn kích thước tiết diện thanh  $AC$  khi thanh được làm bằng thép ống với tỷ số đường kính ngoài và đường kính trong là  $D/d = 1,3$ . Cho biết:  $[\sigma]_k = 14$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma]_n = 10$  kN/cm<sup>2</sup>.



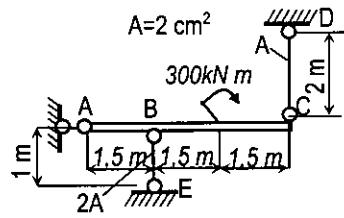
**III.11.**[2]. Cho hệ như trên hình III.11. Chọn đường kính tiết diện dây neo  $AB$ . Cho biết:  $[\sigma]_k = 15$  kN/cm<sup>2</sup>.

**III.12.**[2]. Cho hệ như trên hình III.12. Tìm độ võng tại  $B$  và  $C$ . Cho biết: thanh  $ABC$  cứng tuyệt đối; các dây treo có  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>.

**III.13.**[2]. Cho hệ như trên hình III.13. Tìm góc nghiêng của thanh tuyệt đối cứng  $ABC$ . Cho biết: các thanh  $BE$ ,  $CD$  có  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>.

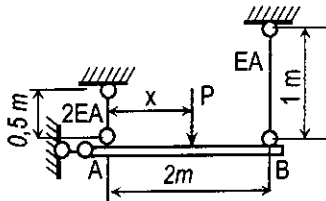


Hình III.12

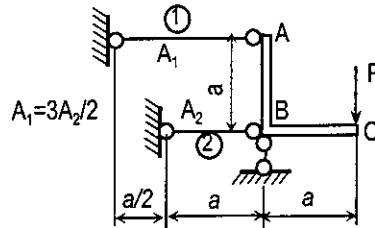


Hình III.13

III.14.[2]. Cho hệ chịu lực như trên hình III.14. Tìm khoảng cách  $x$  của lực  $P$  sao cho thanh tuyệt đối cứng  $AB$  nằm ngang.



Hình III.14

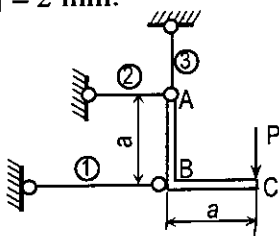


Hình III.15

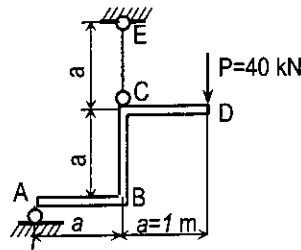
III.15.[12]. Cho hệ như trên hình III.15. Cho biết: thanh  $ABC$  cứng tuyệt đối đối; các thanh 1, 2 có mô đun đàn hồi là  $E$ . Tìm ứng suất trong các thanh 1, 2 và các thành phần chuyển vị tại  $C$ .

III.16.[12]. Cho hệ như trên hình III.16. Cho biết: thanh  $ABC$  cứng tuyệt đối đối. Xác định diện tích tiết diện của các thanh 1, 2, 3 theo điều kiện bền khi  $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ .

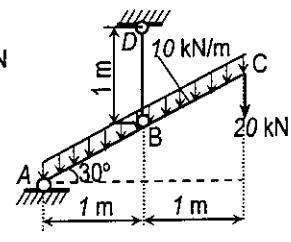
III.17.[12]. Cho hệ như trên hình III.17. Cho biết: thanh  $ABCD$  cứng tuyệt đối đối. Xác định diện tích tiết diện của thanh  $EC$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng khi thanh  $EC$  có  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ; độ dẫn tuyệt đối cho phép  $[\delta] = 2 \text{ mm}$ .



Hình III.16



Hình III.17

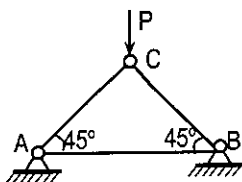


Hình III.18

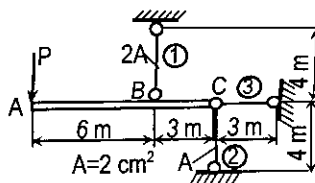
II.18.[12]. Cho hệ như trên hình III.18, thanh  $ABCD$  cứng tuyệt đối đối. Xác định diện tích tiết diện của thanh  $BD$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng

khi thanh  $BD$  có  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ; độ dẫn tuyệt đối cho phép  $[\delta] = 1,5 \text{ mm}$ ;  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

**III.19.**[12]. Cho hệ như trên hình III.19. Xác định giá trị cho phép của lực  $P$  theo điều kiện bền. Cho biết:  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình III.19



Hình III.20

**III.20.**[12]. Cho hệ như trên hình III.20. Xác định giá trị cho phép của lực  $P$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng. Cho biết: các thanh 1, 2, 3 có:  $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$ ; độ dẫn tuyệt đối cho phép  $[\delta] = 1,5 \text{ mm}$ ;  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

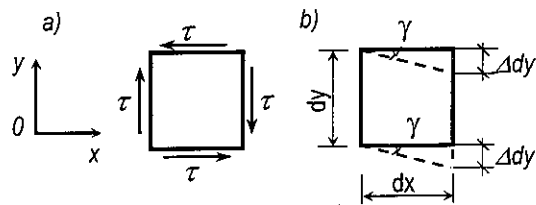
# 4

## CÁCH TÍNH THANH CHỊU CẮT, CHỊU XOẮN THUẦN TÚY

### 4.1. KHÁI NIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG TRƯỢT (CẮT)

Một phân tử trong trạng thái ứng suất phẳng bị trượt thuần túy khi trên bốn mặt vuông góc chỉ có ứng suất tiếp  $\tau$  (hình 4.1a). Hiện tượng trượt thuần túy xảy ra khi các thanh chỉ chịu lực cắt ở các mối nối ghép bằng bu lông, đinh tán hoặc hàn (xem mục 4.2) và trong các thanh chịu xoắn thuần túy (xem mục 4.3).

Dưới tác dụng của các ứng suất tiếp, phân tử bị biến dạng trượt như trên hình 4.1b nếu xem cạnh đứng bên trái cố định.



Với các biến dạng nhỏ, góc trượt tỷ đối  $\gamma$  được xác định như sau:

$$\gamma = \text{tg} \gamma = \frac{\Delta dy}{dx} \quad (4.1)$$

Giữa ứng suất  $\tau$  và biến dạng trượt tỷ đối  $\gamma$  có quan hệ bậc nhất nếu ứng suất chưa vượt quá một giới hạn nhất định. Đó là định luật Hooke khi trượt, được mô tả theo biểu thức sau:

$$\tau = G \gamma \quad (4.2)$$

$G$  là môđun đàn hồi của vật liệu khi trượt, đặc trưng cho khả năng chống biến dạng trượt của vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm với đơn vị đo thường dùng là  $\text{kN/cm}^2$ . Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh được là giữa môđun  $G$  với môđun đàn hồi  $E$  khi kéo hoặc nén có sự liên hệ như sau:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}; \quad (4.3)$$

với  $\mu$  là hệ số biến dạng ngang Poisson.

## 4.2. CÁCH TÍNH THANH CHỊU CẮT

Bài toán thanh chịu cắt thường gặp khi tính các mối nối ghép bằng bu lông, đinh tán hoặc hàn.

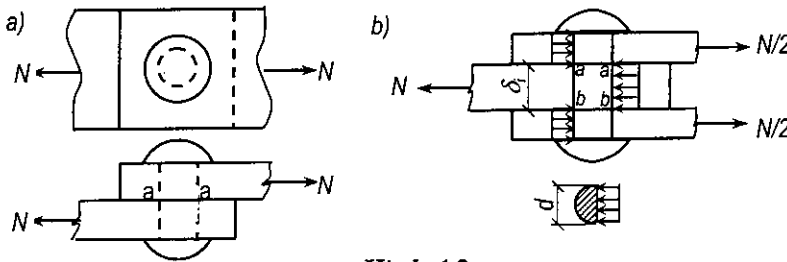
### 4.2.1. Tính mối nối ghép bằng bu lông, đinh tán [3, 4]

#### ◆ Hiện tượng cắt

Xét hai tấm kim loại được nối ghép bằng một đinh tán như trên hình 4.2a. Khi chịu các lực  $N$ , đinh tán bị cắt theo mặt a-a. Giả thiết ứng suất phân bố đều trên mặt cắt, ta có công thức ứng suất tiếp như sau:

$$\tau = \frac{N}{A} \quad \text{với} \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \quad (4.4)$$

$d$  – đường kính của tiết diện đinh tán hoặc bu lông.



Hình 4.2

Trường hợp tổng quát, khi mối nối có  $m$  mặt cắt (trên hình 4.2b mối nối có 2 mặt cắt a-a và b-b) và có  $n$  đinh tán hoặc bu lông, nếu giả thiết lực  $N$  phân bố đều cho các đinh tán hoặc bu lông thì diện tích chịu cắt sẽ là  $mnA$  và ta có điều kiện bền khi cắt như sau:

$$\tau = \frac{N}{m.n.A} \leq [\tau] \quad (4.5)$$

$[\tau]$  – ứng suất tiếp cho phép khi cắt.

#### ◆ Hiện tượng dập (ép mặt)

Khi mối nối chịu lực, để có thể cắt được đinh, các tấm kim loại sẽ ép vào thân đinh trên một nửa mặt bên của hình trụ (hình 4.2b). đó là hiện tượng *dập hoặc ép mặt*. Sự phân bố ứng suất ép mặt trên thân đinh khá phức tạp. Để đơn giản, ta giả thiết ứng suất này là ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt chứa trục đinh và vuông góc với lực ép. Như vậy, trong trường hợp mối nối có nhiều tấm ta có thể tìm ứng suất dập và thể hiện điều kiện về khả năng chống dập như sau:



$$\sigma_d = \frac{N}{d \cdot \sum \delta_i} \leq [\sigma]_d \quad (4.6)$$

trong đó:

$d$  – đường kính của lỗ đinh tán;

$\delta_i$  – bề dày của tấm thứ  $i$ ; chỉ số  $i$  tính theo số tấm chịu lực ở về một phía có tổng bề dày nhỏ nhất;

$[\sigma]_d$  – ứng suất cho phép khi ép mặt, phụ thuộc vật liệu và phương pháp gia công lỗ (thô hay tinh), tìm theo thực nghiệm hoặc theo Tiêu chuẩn thiết kế, thường lấy như sau:  $[\sigma]_d = (2 \div 2,5)[\tau]$ .

Trên cơ sở các điều kiện (4.5) và (4.6) ta có thể giải được ba bài toán cơ bản thường gặp: bài toán kiểm tra; bài toán xác định kích thước, số lượng đinh; bài toán xác định trị số an toàn của tải trọng tương tự như đã nêu trong chương 3.

#### **Chú thích:**

- Khi tính toán các mối nối ghép bằng đinh, ngoài việc kiểm tra theo các điều kiện về bền, về dập, cần phải kiểm tra lại độ bền của các tấm ghép tại các tiết diện bị giảm yếu do khoét lỗ đinh.
- Mũi đinh tán ép chặt vào các tấm nên khi lực  $N$  tác dụng, giữa các tấm phát sinh lực ma sát rất lớn. Trong tính toán thường bỏ qua lực ma sát.
- Lực do các tấm tác dụng vào hai phần của thân đinh tạo thành ngẫu lực có khuynh hướng làm bật mũi đinh. Trong tính toán cũng thường bỏ qua hiện tượng này.
- Giả thiết lực phân bố đều trên mặt cắt của các đinh chỉ là gần đúng, thực ra các đinh tiếp nhận lực không đồng đều. Tuy nhiên, khi tăng lực  $N$ , đinh chịu lực cắt lớn bị chảy dẻo trước, tiếp đó các đinh còn lại lần lượt chảy dẻo cho đến khi mối nối ở trạng thái giới hạn chịu lực thì có thể xem như lực cắt ở các đinh bằng nhau. Do đó, để đảm bảo cho giả thiết này được thỏa mãn ta thường chế tạo đinh bằng thép có độ dẻo cao.
- Chi tiết cấu tạo các mối nối sẽ được đề cập trong các giáo trình về kết cấu kim loại.

**Ví dụ 4.1.** Xét mối nối bằng đinh tán có cấu tạo như trên hình 4.3. Cho biết: lực  $N = 80$  kN; các giá trị cho phép của vật liệu  $[\sigma] = 14$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\tau] = 0,7[\sigma] = 10,5$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma]_d = 2[\sigma] = 30$  kN/cm<sup>2</sup>. Yêu cầu: xác định các kích thước  $d$ ,  $\delta$ ,  $a$ ,  $b$  ghi trên hình 4.3.

- ◆ Đường kính  $d$  của đinh tán xác định theo điều kiện cắt. Theo (4.5) với số mặt cắt  $m=2$ , số đinh  $n=2$  ta có:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N}{2.2.[\tau]}$$

Suy ra:

$$d \geq \sqrt{\frac{4N}{2.2.\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4.80}{2.2.\pi 10,5}} = 1,557 \text{ cm} \approx 1,6 \text{ cm}$$

- ◆ Bề dày  $\delta$  của tấm xác định theo điều kiện dập. Từ (4.6), trong trường hợp này ta có:

$$\delta \geq \frac{N}{d[\sigma]_d} = \frac{80}{2.1.6.30} = 0,833 \text{ cm} \approx 0,84 \text{ cm}.$$

- ◆ Bề rộng  $a$  của tấm xác định theo điều kiện bền khi kéo tại tiết diện bị giảm yếu:

$$(a - d)\delta \geq \frac{P}{[\sigma]}; \text{ suy ra: } a = \frac{80}{15.0,84} + 1,6 = 7,95 \text{ cm} \approx 8 \text{ cm}.$$

- ◆ Chiều dài  $b$  ở đầu tấm xác định theo điều kiện bền khi trượt trên hai mặt với chiều dài chịu trượt là  $m-n$  và  $m'-n'$ , tức là  $(b-d/2)$ :

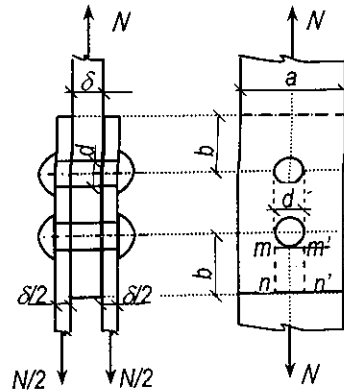
$$2(b - \frac{d}{2})\delta \geq \frac{P}{2[\tau]}; \text{ suy ra: } b = \frac{80}{4.0,84.10,5} + \frac{1,6}{2} = 3,07 \text{ cm}.$$

#### 4.2.2. Tính mối nối ghép bằng hàn [4]

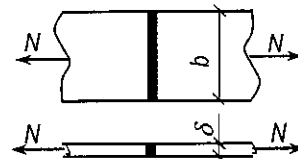
Mối nối ghép bằng hàn được sử dụng phổ biến trong các công trình. Tuy có một số nhược điểm như tại mối hàn phát sinh ứng suất cục bộ, vật liệu tại chỗ ghép bị dòn ... song mối ghép bằng hàn có nhiều ưu điểm như: trọng lượng mối nối nhẹ nhàng; tiết kiệm được vật liệu, nhân công và thời gian.

◆ **Mối hàn đối đầu:** dùng để ghép hai tấm trên cùng một mặt phẳng, cấu tạo như trên hình 4.4a. Khi kiểm tra độ bền ta bỏ qua phần lồi của mối hàn, xem bề dày của mối hàn bằng bề dày của tấm nối. Do đó, ứng suất pháp ở mối hàn được xem như phân bố đều và bằng:

$$\sigma = \frac{N}{b\delta}$$

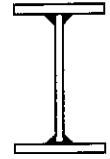


Hình 4.3

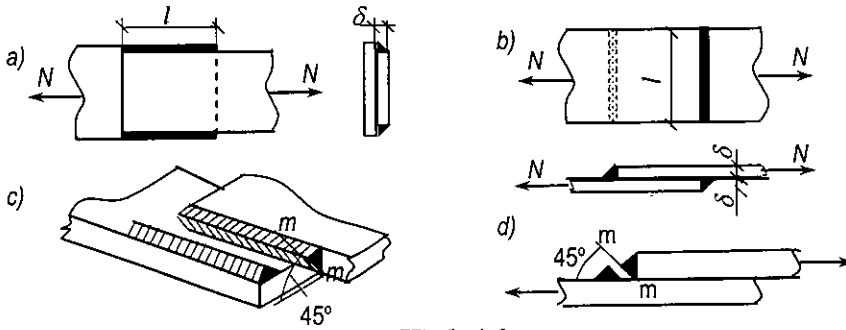


Hình 4.4

♦ **Mối hàn mép:** dùng để chế tạo các thanh ghép bằng thép tấm (hình 4.5 trình bày cách ghép các tấm thành hình chữ I) hoặc để ghép chồng hai tấm lên nhau như trên hình 4.6a, b.



Hình 4.5



Hình 4.6

Khi kiểm tra độ bền của mối hàn mép dọc theo phương của lực tác dụng (hình 4.6a, c) ta xem mặt cắt mối hàn là hình tam giác cân. Khi chịu lực, mối hàn bị cắt theo đường cao m-m vì hướng này có diện tích chịu cắt bé nhất. Nếu gọi  $\delta$  là chiều cao mối hàn thì bề rộng mặt chịu cắt bằng  $\delta\sqrt{2}/2 \approx 0,7\delta$ .

Khi kiểm tra độ bền của mối hàn mép vuông góc với phương của lực tác dụng (hình 4.6b, d) thì ở mặt chịu cắt m-m có cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp. Tuy nhiên, ta quy ước kiểm tra độ bền mối nối này như ở mối hàn mép dọc theo phương của lực tác dụng.

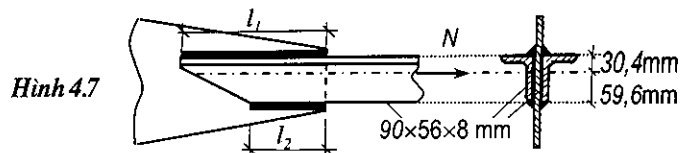
Do đó, công thức chung để tính ứng suất của các mối hàn mép như sau:

$$\tau = \frac{N}{0,7\delta \sum l_i}; \quad (4.7)$$

trong đó  $\delta$  và  $\sum l_i$  là chiều cao và tổng chiều dài của các mối hàn.

**Ví dụ 4.2.** [4]. Tìm chiều dài  $l_1$  và  $l_2$  của các mối hàn mép dùng để ghép hai thanh thép góc  $90 \times 56 \times 8$  vào một tấm thép (hình 4.7).

Cho biết:  $N = 400$  kN;  $[\tau] = 13$  kN/cm<sup>2</sup>; khoảng cách từ mép cạnh dài đến trọng tâm của thép góc bằng 30,4 mm (xem Phụ lục).



Hình 4.7

Trong trường hợp này, mỗi thép góc chịu lực bằng  $N/2 = 200$  kN, các đường hàn có chiều cao bằng bề dày thép góc là 0,8 cm với tổng chiều dài là  $l_1 + l_2$ . Theo (4.7), ta có thể tìm tổng chiều dài  $l_1 + l_2$  như sau:

$$(l_1 + l_2) \geq \frac{N}{2.0,7\delta[\tau]} = \frac{400}{2.0,7.0,8.13} = 28 \text{ cm} \quad (a)$$

Để hợp lực của nội lực trong các đường hàn nằm trên trục của thép góc ta cần lập điều kiện: khi chuyển các lực này về trục thép góc thì tổng mômen của các lực đó đối với trục thép góc phải bằng không. Các nội lực này tỷ lệ với chiều dài đường hàn nên từ hình 4.7 ta có điều kiện:

$$30,4.l_1 = 59,6.l_2 \quad (b)$$

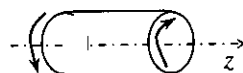
Từ (a) và (b) ta xác định được:  $l_1 = 18,5$  cm;  $l_2 = 9,5$  cm.

### 4.3. CÁCH TÍNH THANH TIẾT DIỆN TRÒN CHỊU XOẮN

#### 4.3.1. Định nghĩa – Liên hệ giữa các đại lượng

Một thanh được gọi là chịu xoắn thuần túy khi trên tiết diện ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là *mômen xoắn*  $M_z$  (hình 4.8a). Bài toán xoắn thuần túy xảy ra khi tính các trục chuyển động, các thanh trong hệ thanh không gian...

Từ liên hệ giữa thành phần nội lực và tải trọng đã trình bày trong chương mở đầu, công thức (7) ta có thể xác định thành phần nội lực mômen xoắn theo các tải trọng như sau:



Hình 4.8

$$M_z = - \sum M_z(P_i) - \sum \int m_z dz, \quad (4.8)$$

trong đó:

$M_z(P_i)$  – mômen của các ngoại lực tập trung tác dụng trên phần trái hoặc phần phải của tiết diện đối với trục  $z$ ;

$m$  – cường độ mômen xoắn ngoại lực phân bố tác dụng trên phần trái hoặc phần phải của tiết diện đối với trục  $z$ .

*Quy ước về dấu* của mômen xoắn ngoại lực cũng như nội lực như sau:

$M_z > 0$  khi nhìn vào tiết diện sẽ quay theo chiều kim đồng hồ (hình 4.8);

$M_z < 0$  khi nhìn vào tiết diện sẽ quay ngược chiều kim đồng hồ.

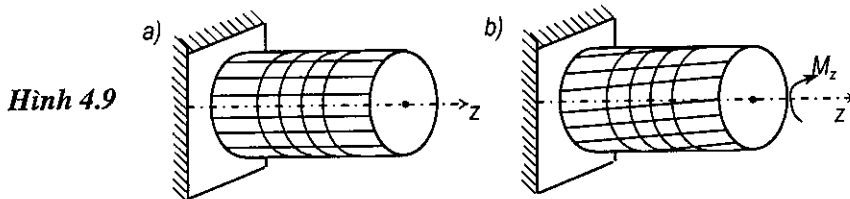
*Biểu đồ mômen xoắn* cũng thực hiện như đã trình bày trong chương 2.

### 4.3.2. Ứng suất trên thanh tiết diện tròn [2, 3]

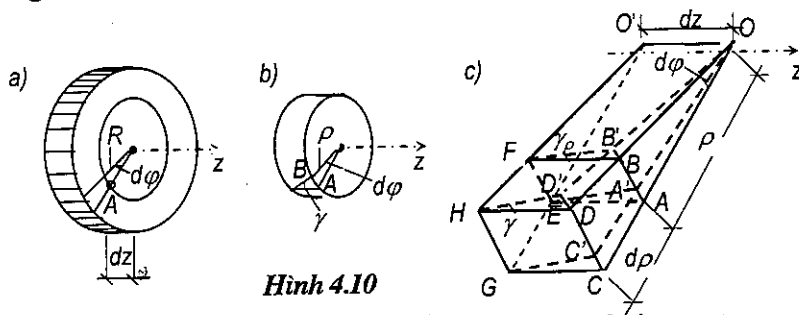
#### ♦ Quan sát thực nghiệm và các giả thiết

Trên mặt ngoài của thanh tròn có trục thẳng chịu xoắn thuần túy ta vạch các đường sinh song song và các đường tròn biểu thị các tiết diện vuông góc với trục thanh (hình 4.9a). Khi thanh chịu xoắn ta thấy các đường sinh trở thành đường xoắn ốc, trục thanh vẫn thẳng, đường tròn phẳng vuông góc với trục thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh (hình 4.9b). Như vậy, khi thanh bị xoắn các tiết diện xoay tương đối với nhau quanh trục thanh như những tấm tròn mỏng, cứng. Từ các nhận xét đó có thể đưa ra các giả thiết như sau:

- 1) Thanh không bị biến dạng dài dọc trục.
- 2) Các tiết diện phẳng vuông góc với trục thanh trước và sau khi chịu xoắn vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh (Giả thiết Bernoulli). Giả thiết này không phù hợp đối với các thanh có tiết diện không tròn.
- 3) Bán kính tiết diện trước và sau khi chịu xoắn vẫn thẳng và không thay đổi chiều dài
- 4) Các lớp vật liệu dọc trục thanh không có tác dụng tương hỗ nên không phát sinh ứng suất pháp trên các mặt song song với trục.



#### ♦ Công thức ứng suất tiếp trên tiết diện



Theo giả thiết đã nêu, ứng suất pháp bằng không, chỉ tồn tại ứng suất tiếp. Để lập công thức xác định ứng suất tiếp tại tiết diện có hoành độ  $z$ , ta khảo sát biến dạng của một đoạn thanh có chiều dài vô cùng bé  $dz$  (hình 4.10a).

Tiết diện bên trái có hoành độ  $z$ ; tiết diện bên phải có hoành độ  $z+dz$ . Hai tiết diện có góc xoắn tương đối là  $d\varphi$ ; bán kính của hai tiết diện này cũng có góc xoay tương đối là  $d\varphi$ .

Xét phân tố con tại điểm cần tìm ứng suất, tách ra từ hình trụ tròn nằm trong đoạn thanh nói trên, có bán kính  $\rho$  với  $\rho \leq R$  (hình 4.10b, c). Vì bán kính  $R$  thẳng nên góc xoay của bán kính  $\rho$  cũng là  $d\varphi$ . Biến dạng trượt  $\gamma$  ở mặt bên của phân tố con (hình 4.10c) bằng:

$$\gamma = \tan \gamma = \frac{AA'}{dz} = \rho \frac{d\varphi}{dz} = \rho \theta \quad \text{với} \quad \theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (4.9)$$

Giá trị  $\theta$  là góc xoắn tỷ đối biểu thị góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài, là hằng số trên tiết diện và là hàm theo tọa độ  $z$ .

Theo định luật Hooke khi trượt (4.2)

$$\tau = G \gamma = G \theta \rho = \rho \frac{d\varphi}{dz} G. \quad (4.10)$$

Theo định nghĩa, tổng mômen đối với trục  $z$  của các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện  $A$  của thanh chính là mômen xoắn  $M_z$ :

$$M_z = \int_A \tau \rho dA = \int_A G \theta \rho^2 dA.$$

Các đại lượng  $G$ ,  $\theta$  không phụ thuộc tiết diện. Do đó, nếu gọi:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (4.11)$$

là mômen quán tính cực, ta có:

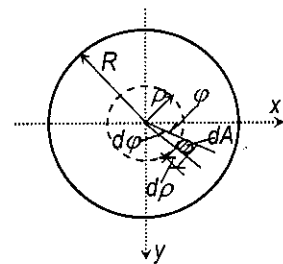
$$M_z = G \theta I_p. \quad (4.12)$$

Kết hợp với (4.10) ta suy ra công thức xác định ứng suất tiếp:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho. \quad (4.13)$$

• Đối với tiết diện tròn, mômen quán tính cực  $I_p$  được xác định như sau: Xét một phân tố diện tích  $dA$  giới hạn giữa hai đường tròn có bán kính  $\rho$  và  $\rho+d\rho$  và hai bán kính hợp với trục  $x$  các góc  $\varphi$  và  $\varphi+d\varphi$  (hình 4.11); như vậy,  $dA = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ ; do đó, theo (4.11) ta có:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A \rho^3 d\varphi \cdot d\rho = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$



Hình 4.11

Sau khi lấy tích phân ta tìm được:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4. \quad (4.14)$$

với  $R, D$  là bán kính và đường kính tiết diện.

- Đối với tiết diện hình tròn rỗng, nếu gọi  $d, D$  là đường kính trong và đường kính ngoài của tiết diện, mômen quán tính cực  $I_p$  bằng:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4(1 - \alpha^4) \quad \text{với } \alpha = \frac{d}{D}. \quad (4.15)$$

Ta thấy: ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính, cùng chiều với mômen xoắn và có trị số tỷ lệ với khoảng cách  $\rho$  từ trọng tâm tiết diện đến điểm tác dụng của ứng suất. Biểu đồ ứng suất tiếp là đường bậc nhất dọc theo bán kính như trên hình 4.12, đạt trị số lớn nhất khi  $\rho = R$ :

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} R = \frac{M_z}{W_p}. \quad (4.16)$$

$$W_p = I_p / R$$

là một đặc trưng hình học của tiết diện, gọi là mômen chống xoắn có thứ nguyên [chiều dài<sup>3</sup>].

- Đối với tiết diện tròn:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3. \quad (4.17)$$

- Đối với tiết diện hình tròn rỗng:

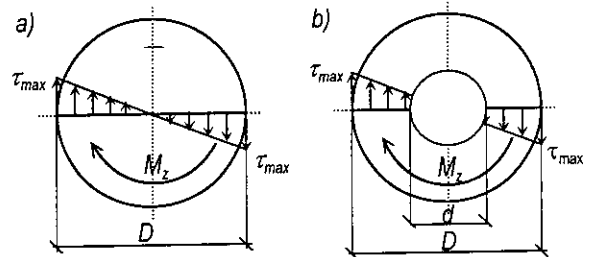
$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4) \quad \text{với } \alpha = \frac{d}{D}. \quad (4.18)$$

### 4.3.3. Biến dạng và chuyển vị của thanh chịu xoắn [2, 3]

#### ◆ Biến dạng

Từ công thức (4.12) ta suy ra công thức xác định góc xoay tỷ đối  $\theta$  (góc xoay tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài):

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p}. \quad (4.19)$$



Hình 4.12

Như vậy, góc xoay tương đối  $\varphi$  giữa hai tiết diện ở hai đầu đoạn thanh có chiều dài  $l$  gọi là góc xoắn của đoạn thanh được xác định như sau:

$$\varphi = \int_i \frac{M_z}{GI_p} dz. \quad (4.20)$$

Khi  $\frac{M_z}{GI_p}$  không đổi trên chiều dài  $l$ :  $\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}. \quad (4.21)$

Khi  $\frac{M_z}{GI_p}$  không đổi trên từng đoạn thanh:  $\varphi = \sum_i \left( \frac{M_z l}{GI_p} \right)_i. \quad (4.22)$

Các công thức (4.20), (4.21), (4.22) biểu thị định luật Hooke mô tả sự liên hệ giữa biến dạng và nội lực trong thanh chịu xoắn. Tích số  $GI_p$  được gọi là độ cứng chống xoắn của tiết diện thanh.

#### ♦ Chuyển vị của các tiết diện

Từ công thức (4.20) ta suy ra công thức xác định góc xoay  $\varphi$  tại tiết diện bất kỳ của thanh chịu xoắn:

$$\varphi = \int_i \frac{M_z}{GI_p} dz + C. \quad (4.23)$$

Hằng số tích phân  $C$  được xác định theo điều kiện liên kết tại tiết diện ở đầu đoạn thanh cần tìm góc xoay.

### 4.3.4. Điều kiện bền và điều kiện cứng của thanh chịu xoắn

#### ♦ Điều kiện bền

Từ công thức ứng suất tiếp (4.13) và biểu đồ ứng suất tiếp trên hình 4.11 ta thấy phân bố nguy hiểm là phân bố có  $\tau_{\max}$  ở mặt ngoài tiết diện. Do đó, theo (4.16) ta có điều kiện bền:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau]. \quad (4.24)$$

Trị số cho phép của ứng suất tiếp được lấy theo kết quả thực nghiệm hoặc theo các thuyết bền [3, 4]:

- Theo thuyết bền ứng suất tiếp:  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2};$

- Theo thuyết bền thế năng:  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}.$



♦ Điều kiện cứng

Theo điều kiện cứng: biến dạng, chuyển vị của thanh chịu xoắn không được vượt quá trị số cho phép. Từ công thức (4.19) ta có điều kiện cứng biểu thị theo góc xoay tỷ đối  $\theta$  như sau:

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \leq [\theta] \text{ (rad/m)}. \quad (4.25)$$

Trị số cho phép của góc xoay tỷ đối được lấy theo các yêu cầu công nghệ và được quy theo radian/m.

Từ các điều kiện bền và điều kiện cứng ta cũng có thể giải ba dạng bài toán tương tự như trong trường hợp thanh chịu kéo hoặc nén: bài toán kiểm tra; bài toán thiết kế tiết diện; bài toán xác định tải trọng cho phép.

**Ví dụ 4.3.** Xét thanh có tiết diện tròn rỗng với  $D$  và  $d$  là đường kính ngoài và đường kính trong, chịu tải trọng như trên hình 4.13a.

Cho biết:  $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$ ;  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\theta] = 1/4 \text{ o/m}$ . Yêu cầu:

- 1) Vẽ biểu đồ mômen xoắn.
- 2) Xác định các kích thước  $D$  và  $d$  của tiết diện khi  $\alpha = d/D = 0,7$ .
- 3) Vẽ biểu đồ góc xoắn tương ứng với tiết diện thanh chọn được.

Biểu đồ mômen xoắn:

• Đoạn AB:

$$M_z = 50 - 1(100 - z_1) = -50 + z_1 \text{ kNcm}.$$

• Đoạn BC:  $M_z = 50 \text{ kNcm}$ .

Kết quả như trên hình 4.13b.

Xác định  $D$  và  $d$ :

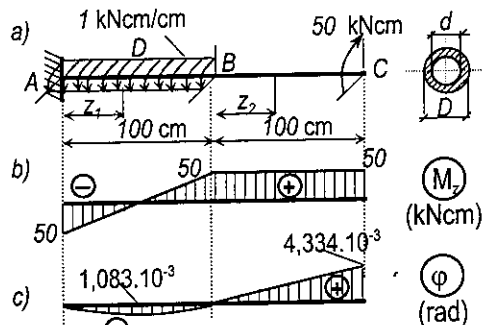
• Điều kiện bền:

Theo (4.24) và (4.18):

$$W_p = 0,2D^3(1 - \alpha^4) \geq \frac{M_{\max}}{[\tau]}.$$

$$\text{Suy ra: } D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,2(1 - \alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{50}{0,2(1 - 0,7^4)5}} = 4,04 \text{ cm}.$$

• Điều kiện cứng: Theo (4.25) và (4.15):  $I_p = 0,1(1 - \alpha^4)D^4 \geq \frac{M_{\max}}{G[\theta]}$ .



Hình 4.13

Trong trường hợp này ta có:  $[\theta] = 1/4 \text{ o/m} = \pi / 4.180 = \pi / 720 \text{ (rad/m)}$ .

$$\text{Do đó: } D \geq \sqrt[4]{\frac{M_{max}}{0,1(1-\alpha^4)G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{50.720}{0,1(1-0,7^4)8.10^3.\pi}} = 6,59 \text{ cm.}$$

Chọn:  $D = 6,6 \text{ cm}$ ;  $d = 0,7.6,6 = 4,6 \text{ cm}$ .

*Biểu đồ góc xoắn:*

Tích số:  $GI_p = 8.10^3 \cdot 1,6,6^4 \cdot (1-0,7^4) = 1153664 \text{ kN.cm}^2$ .

• Đoạn AB:

$$\varphi(z_1) = \int_b^{100} \frac{M(z_1)}{GI_p} dz_1 + C_1 = \int_b^{100} \frac{-50 + z_1}{GI_p} dz_1 + C_1 = \frac{1}{GI_p} \left(-50z_1 + \frac{z_1^2}{2}\right) + C_1$$

$$\text{Khi } z_1=0; \varphi(0) = 0; \text{ do đó: } C_1 = 0 \text{ nên: } \varphi(z_1) = \frac{1}{GI_p} \left(-50z_1 + \frac{z_1^2}{2}\right).$$

$$\text{Khi } z_1=50 \text{ cm; } \varphi_D = -\frac{1250}{1153664} = -1,08.10^{-3} \text{ rad;}$$

Khi  $z_1=100 \text{ cm}$ ;  $\varphi_B = 0$ .

• Đoạn BC: mômen xoắn không đổi trên toàn đoạn, nếu chọn gốc tọa độ tại B, ta có:

$$\varphi(z_2) = \int_b^{100} \frac{50}{GI_p} dz_2 + C_2 = \frac{50z_2}{GI_p} + C_2.$$

$$\text{Khi } z_2=0; \varphi(0) = \varphi_B = 0; \text{ do đó: } C_2 = 0 \text{ nên: } \varphi(z_2) = \frac{50z_2}{GI_p}.$$

$$\text{Khi } z_2=100 \text{ cm; } \varphi_C = \frac{5000}{1153664} = 4,33.10^{-3} \text{ rad.}$$

Biểu đồ góc xoắn tìm được như trên hình 4.13c.

#### 4.4. CÁCH TÍNH THANH CÓ TIẾT DIỆN CHỮ NHẬT CHỊU XOẮN

Thực nghiệm chứng tỏ là giả thiết về tiết diện phẳng không phù hợp đối với các thanh có tiết diện không tròn. Khi đó, tiết diện thanh bị vênh khỏi mặt phẳng ban đầu. Để giải bài toán cho trường hợp này cần vận dụng Lý thuyết đàn hồi. Trong [5], trình bày kết quả tính đối với các tiết diện có dạng hình elip, hình tam giác đều, hình chữ nhật. Trong tài liệu này chỉ giới thiệu cách xác định các đại lượng cần thiết đối với thanh có tiết diện chữ nhật.

Biểu đồ phân bố ứng suất trên tiết diện có kích thước  $a \times b$  như trên hình 4.14. Ta thấy:

- Tại trọng tâm tiết diện, ứng suất tiếp bằng không
- Tại trung điểm cạnh dài, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2} \quad (4.26)$$

$\alpha$  – hệ số phụ thuộc tỷ số  $a/b$ .

- Tại trung điểm cạnh ngắn, ứng suất tiếp có trị số khá lớn:

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (4.27)$$

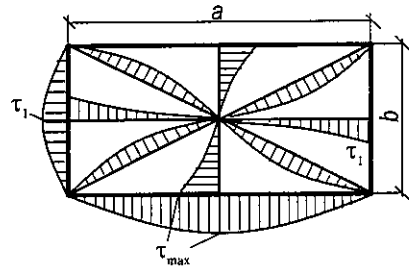
$\gamma$  – hệ số phụ thuộc tỷ số  $a/b$ .

- Góc xoắn tỷ đối:  $\theta = \frac{M_z}{G\beta ab^3}$ . (4.28)

Các hệ số  $\alpha$ ,  $\beta$  và  $\gamma$  tìm được theo bảng 4.1 tương ứng với các tỷ số  $a/b$ .

**Bảng 4.1**

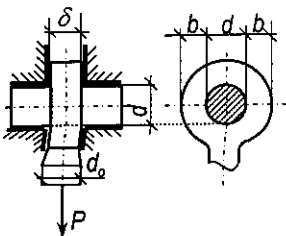
a/b	1	1,50	1,75	2,0	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,000	0,850	0,820	0,796	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742



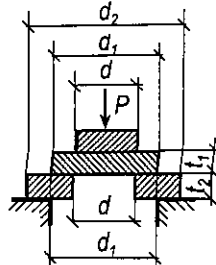
**Hình 4.14**

## BÀI TẬP CHƯƠNG IV

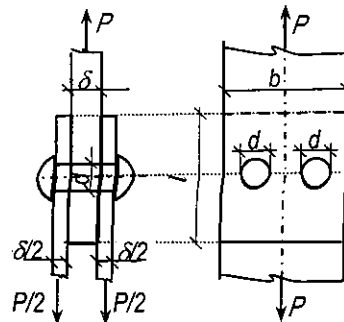
**IV.1.** [12]. Xác định các kích thước  $d$ ,  $d_o$ ,  $\delta$ ,  $b$  của mối nối trên hình IV.1. Cho biết:  $P=32$  kN; các giá trị ứng suất cho phép: khi kéo  $[\sigma] = 16$  kN/cm<sup>2</sup>, khi cắt  $[\tau] = 0,7[\sigma] = 11,2$  kN/cm<sup>2</sup>, khi dập  $[\sigma]_d = 2[\sigma] = 32$  kN/cm<sup>2</sup>.



**Hình IV.1**



**Hình IV.2**

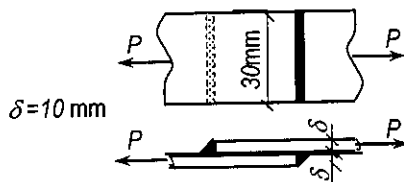


**Hình IV.3**

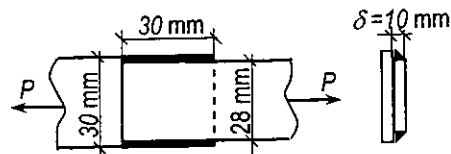
**IV.2. [12].** Xác định các kích thước  $d, d_1, d_2, t_1, t_2$  của hệ thống các vành tròn trên hình IV.2. Cho biết:  $P=20$  kN; các giá trị về ứng suất cho phép: khi cắt  $[\tau] = 8$  kN/cm<sup>2</sup>, khi dập  $[\sigma]_d = 16$  kN/cm<sup>2</sup>.

**IV.3. [12].** Xác định các kích thước  $d, \delta, b, l$  của mối nối trên hình IV.3. Cho biết:  $P=480$  kN; các giá trị ứng suất cho phép: khi kéo  $[\sigma] = 16$  kN/cm<sup>2</sup>, khi cắt  $[\tau] = 12$  kN/cm<sup>2</sup>, khi dập  $[\sigma]_d = 32$  kN/cm<sup>2</sup>.

**IV.4 – IV.5.** Xác định giá trị cho phép của lực  $P$  tại các mối nối trên hình IV.4, 5. Cho biết: các giá trị ứng suất cho phép: khi kéo  $[\sigma] = 16$  kN/cm<sup>2</sup>, khi cắt  $[\tau] = 12$  kN/cm<sup>2</sup>, khi dập  $[\sigma]_d = 32$  kN/cm<sup>2</sup>.



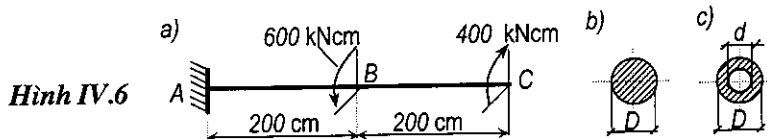
Hình IV.4



Hình IV.5

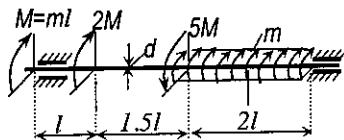
**IV.6.** Cho hệ như trên hình IV.6a. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>, xác định giá trị ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại C. tương ứng với hai trường hợp:

- Thanh có tiết diện hình tròn đặc với đường kính  $D=8$  cm (hình IV.6b).
- Thanh có tiết diện hình tròn rỗng với  $D=8$  cm;  $d=4,8$  cm (hình IV.6c).

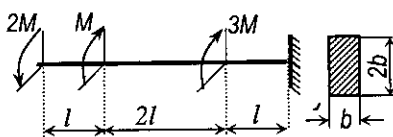


Hình IV.6

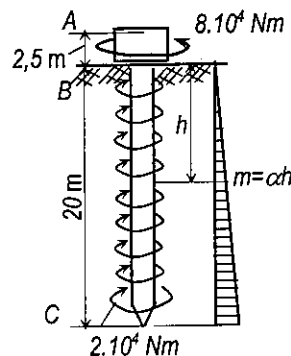
**IV.7.** Cho hệ như trên hình IV.7. Cho biết các đại lượng:  $G; d; m, l$ . Vẽ biểu đồ mômen xoắn; biểu đồ góc xoắn và tìm giá trị ứng suất tiếp lớn nhất.



Hình IV.7



Hình IV.8



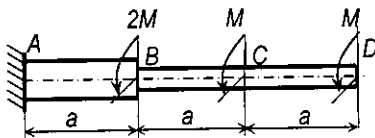
Hình IV.9

**IV.8.** Cho hệ như trên hình IV.8. Cho biết các đại lượng:  $M, b$ . Vẽ biểu đồ mômen xoắn; biểu đồ góc xoắn và tìm giá trị ứng suất tiếp lớn nhất.

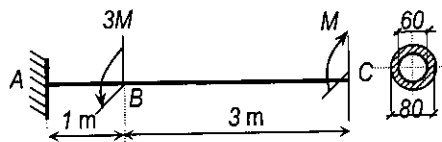
**IV.9.[5]** Mũi khoan thăm dò chịu tác dụng bởi mômen xoắn  $8 \cdot 10^4$  Nm tại đầu A (hình IV.9). Lực cản của đất tạo thành các mômen xoắn phân bố theo quy luật bậc nhất với cường độ ở độ sâu  $h$  là  $m = \alpha h$  với  $\alpha = 0,03 \cdot 10^4$  Nm/m<sup>2</sup>. Mômen xoắn tác dụng tại lưỡi định hướng ở đầu C là  $2 \cdot 10^4$  Nm. Độ cứng chịu xoắn của phần BC là  $GI_p$  với  $G = 8 \cdot 10^6$  N/cm<sup>2</sup>;  $I_p = 0,1d^4$ ;  $d = 0,2$  m. Độ cứng chịu xoắn của phần AB là  $2GI_p$ . Vẽ biểu đồ mômen xoắn; xác định góc xoắn tương đối giữa hai đầu khoan.

**IV.10.** Cho hệ như trên hình IV.10. Thanh có tiết diện hình tròn đặc. Xác định đường kính  $D$  của tiết diện theo điều kiện bền và điều kiện cứng. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\tau] = 6$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\theta] = 3$  °/m.

**IV.11.** Cho hệ như trên hình IV.11. Thanh có tiết diện hình tròn đặc với đường kính trên đoạn AB là 12 cm; đường kính trên đoạn BCD là 6 cm. Xác định giá trị cho phép của mômen  $M$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\tau] = 10$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\theta] = 0,5$  °/m.



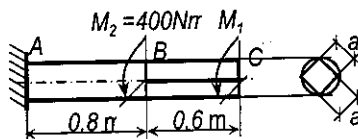
Hình IV.11



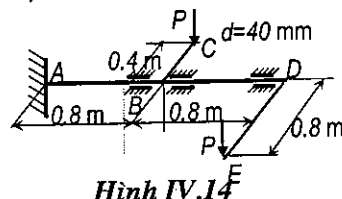
Hình IV.12

**IV.12.** [12] Cho hệ như trên hình IV.12. Thanh có tiết diện hình tròn rỗng với đường kính ngoài là 80 mm; đường kính trong là 60 mm. Xác định giá trị cho phép của mômen  $M$  theo điều kiện bền; tìm góc xoắn tại C. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\tau] = 2$  kN/cm<sup>2</sup>.

**IV.13.** Cho hệ như trên hình IV.13. Trên đoạn AB thanh có tiết diện hình tròn đặc với đường kính là 40 mm; trên đoạn BC thanh có tiết diện hình vuông nội tiếp trong đường tròn có đường kính 40 mm. Xác định giá trị của mômen  $M_1$  để sao cho góc xoắn tại C bằng 2 lần góc xoắn tại B; tìm giá trị ứng suất tiếp lớn nhất. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>.



Hình IV.13



Hình IV.14

**IV.14.** [12] Cho hệ thanh như trên hình IV.14. Thanh ABD có tiết diện hình tròn đặc với đường kính là 40 mm; các thanh BC và DE có độ cứng bằng vô cùng. Xác định giá trị của lực  $P$  và chuyển vị thẳng đứng tại C, E. Cho biết  $G = 8 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>;  $[\tau] = 5$  kN/cm<sup>2</sup>.

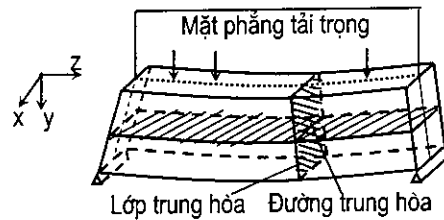
# 5

## CÁCH TÍNH THANH CHỊU UỐN PHẪNG

### 5.1. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

Thanh chịu uốn là bài toán thường gặp trong thiết kế công trình. Thanh chịu uốn còn được gọi là *dầm*. Trong thực tế, các thanh chịu uốn thường có tiết diện đối xứng qua một trục. Do đó, trong phạm vi bài giảng này ta chỉ nghiên cứu bài toán thanh có ít nhất một trục đối xứng, giả sử là trục  $y$ , trục thứ hai vuông góc với trục  $y$  và đi qua trọng tâm của tiết diện gọi là trục  $x$ .

Mặt phẳng chứa tải trọng gọi là *mặt phẳng tải trọng* (hình 5.1). Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với các tiết diện ngang gọi là *đường tải trọng*. Khi chịu uốn, trục thanh thay đổi, hình thành đường cong. Ta gọi *mặt uốn* là mặt chứa đường cong của trục thanh sau khi chịu uốn. Khi mặt uốn trùng với mặt phẳng tải trọng, ta gọi là *uốn phẳng*.



Hình 5.1

Khi trên tiết diện thanh chỉ có một thành phần mômen uốn  $M_x$  (hoặc  $M_y$ ) như trường hợp đoạn  $BC$  trên hình 5.2, ta gọi là thanh chịu *uốn thuần túy phẳng*. Nếu trên tiết diện thanh tồn tại đồng thời các thành phần mômen uốn  $M_x$  và  $M_y$ , ta gọi là thanh chịu *uốn thuần túy xiên*.

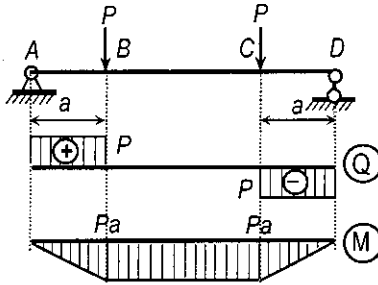
Khi trên tiết diện thanh tồn tại thành phần mômen uốn  $M_x$  và lực cắt  $Q_y$  (hoặc  $M_y$  và  $Q_x$ ) như trường hợp đoạn  $AB, CD$  trên hình 5.2, ta gọi là thanh chịu *uốn ngang phẳng*. Nếu tồn tại đồng thời các thành phần mômen uốn  $M_x, Q_y, M_y, Q_x$ , ta gọi là thanh chịu *uốn ngang xiên*.

### 5.2. ỨNG SUẤT TRONG THANH CHỊU UỐN THUẦN TÚY

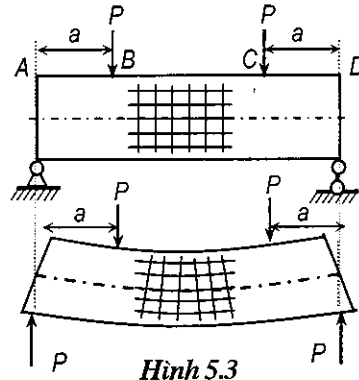
#### 5.2.1. Quan sát thực nghiệm và giả thiết

Xét đoạn thanh chịu uốn thuần túy, chẳng hạn đoạn  $BC$  trên hình 5.3. Để quan sát biến dạng của thanh, trước khi thanh chịu lực ta vạch các đường

thẳng song song với trục thanh biểu thị các thớ dọc và các đường vuông góc với trục thanh biểu thị các tiết diện.



Hình 5.2



Hình 5.3

Sau khi chịu lực, thanh bị biến dạng, ta thấy: các đường kẻ song song với trục thanh trở thành các đường cong tạo thành các cung tròn đồng tâm; các đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với trục thanh; các góc vuông giữa các đường kẻ vẫn được bảo toàn. Các thớ ở một phía (phía dưới) bị dãn, còn ở phía khác (phía trên) bị nén lại. Các thớ càng xa trục thì càng bị dãn hoặc nén nhiều. Để chuyển từ miền có các thớ bị dãn sang miền có các thớ bị nén, tồn tại một lớp gồm các thớ không bị dãn hoặc bị nén (hình 5.1) gọi là *lớp trung hòa*. Giao tuyến của lớp trung hòa với tiết diện ngang gọi là *đường trung hòa*.

Trên cơ sở đó ta đề ra các giả thiết:

- 1) Trước và sau biến dạng, tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh (giả thiết Bernoulli).
- 2) Các thớ dọc trục thanh không ép lên nhau hoặc đẩy xa nhau. Do đó có thể bỏ qua các thành phần ứng suất pháp trên các mặt song song với trục thanh.
- 3) Khi các biến dạng nhỏ, tồn tại một lớp các thớ dọc trục thanh có chiều dài không đổi, gọi là *lớp trung hòa*. Giao tuyến của lớp trung hòa với tiết diện ngang là một đường thẳng gọi là *đường trung hòa*.

### 5.2.2. Công thức tính ứng suất

Xét phân tố thanh có chiều dài  $dz$  như trên hình 5.4. Gọi:

$d\varphi$  – góc hợp thành giữa hai tiết diện của phân tố sau biến dạng;

$\rho$  – bán kính cong của lớp trung hòa;

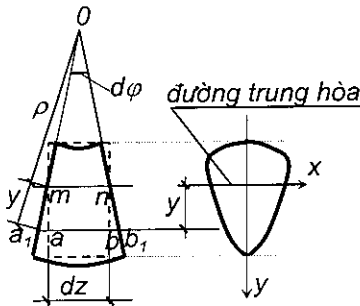
$x$  – đường trung hòa trên tiết diện.

Biến dạng dài tỷ đối theo phương z tại điểm cách đường trung hòa một khoảng cách y được xác định như sau:

$$\varepsilon_z = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (5.1)$$

Từ các giả thiết đã nêu ta thấy các ứng suất:  $\tau = 0$ ;  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Do đó, tại điểm đang xét chỉ tồn tại  $\sigma_z = \sigma$ . Theo định luật Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon_z = E \frac{y}{\rho}. \quad (5.2)$$



Hình 5.4

Từ liên hệ giữa các thành phần nội lực với ứng suất đã lập trong mục 4.5, chương mở đầu, trong trường hợp này ta có:

$$N_z = \int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad (5.3)$$

$$M_y = \int_A x \cdot \sigma \cdot dA = 0; \quad (5.4)$$

$$M_x = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA. \quad (5.5)$$

Thay (5.2) vào (5.3) và (5.4) với chú ý  $E/\rho$  là hằng số trên tiết diện, ta tìm được hai điều kiện:

$$\int_A y \cdot dA = 0; \quad \int_A x \cdot y \cdot dA = 0;$$

Ký hiệu:  $S_x = \int_A y \cdot dA \quad (5.6)$

và gọi là mômen tĩnh của tiết diện đối với trục x, ta có:

$$S_x = 0, \quad (5.7)$$

Điều kiện (5.7) dùng để xác định vị trí của trục trung hòa. Trong mục 5.3 ta sẽ tìm hiểu cách xác định  $S_x$  và sẽ thấy điều kiện (5.7) được thỏa mãn khi trục x đi qua trọng tâm của tiết diện và được gọi là trục trung tâm.

Ký hiệu:  $I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad (5.8)$

và gọi là mômen quán tính ly tâm của tiết diện đối với hệ trục xy, ta có:

$$I_{xy} = 0, \quad (5.9)$$

Trong mục 5.3 ta sẽ tìm hiểu cách xác định  $I_{xy}$  và sẽ thấy điều kiện (5.9) được thỏa mãn khi hệ trục xy là các trục quán tính chính, trung tâm. Nếu tiết



diện có trục đối xứng là trục  $y$  còn trục  $x$  đi qua trọng tâm của tiết diện thì điều kiện (5.9) được thỏa mãn.

Thay (5.2) vào (5.5), ta có:

$$M_x = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (5.10)$$

Ký hiệu: 
$$I_x = \int_A y^2 dA. \quad (5.11)$$

và gọi là mômen quán tính của tiết diện đối với trục trung hòa  $x$ , ta có:

$$M_x = \frac{E}{\rho} I_x; \quad \text{suy ra:} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (5.12)$$

Trong mục 5.3 ta sẽ tìm hiểu cách xác định  $I_x$ . Tích số  $EI_x$  được gọi là độ cứng chống uốn đối với trục trung hòa  $x$  của thanh

Thay (5.12) vào (5.2), ta được:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad (5.13)$$

trong đó:

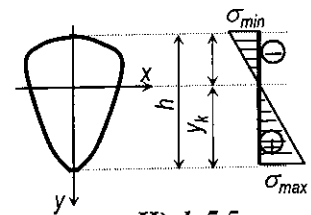
$M_x$  – mômen uốn tại tiết diện cần xét;

$I_x$  – mômen quán tính của tiết diện đối với trục trung hòa  $x$ ;

$y$  – khoảng cách theo phương trục  $y$  từ trục trung hòa đến điểm cần tìm ứng suất.

### 5.2.3. Biểu đồ ứng suất, trị số lớn nhất của ứng suất

Từ công thức (5.13) ta thấy ứng suất pháp tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách từ trục trung hòa đến điểm cần tìm ứng suất. Theo chiều cao tiết diện, biểu đồ ứng suất pháp là đường thẳng, bằng không tại đường trung hòa và có giá trị cực trị tại hai mép tiết diện như trên hình 5.5.



Hình 5.5

Gọi  $y_k$  và  $y_n$  là tung độ của mép chịu kéo và chịu nén của tiết diện, trị số cực trị của ứng suất pháp bằng:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{M_x}{I_x} y_{\frac{k}{n}} = \pm \frac{|M_x|}{W_{\frac{x,k}{x,n}}} \quad (5.14)$$

trong đó, ta lấy dấu cộng khi tìm  $\sigma_{max}$ , lấy dấu trừ khi tìm  $\sigma_{min}$ .

$$\text{Các đại lượng: } W_{x,k} = \frac{I_x}{y_k}; \quad W_{x,n} = \frac{I_x}{y_n} \quad (5.15)$$

là các đặc trưng hình học của tiết diện, gọi là *mômen chống uốn* (xem 5.3).

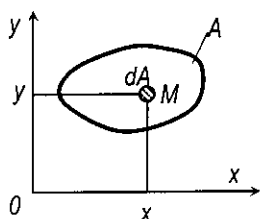
### 5.3. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA TIẾT DIỆN

Xét tiết diện có hình dạng bất kỳ, chọn hệ tọa độ  $xOy$  bất kỳ trong mặt phẳng tiết diện (hình 5.6). Gọi  $x, y$  là tọa độ của phân tố vô cùng bé  $M$ ,  $dA$  là diện tích của phân tố  $M$ . Ngoài diện tích đã quen thuộc, tiết diện còn có các đặc trưng hình học như sau:

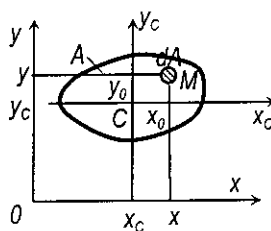
#### 5.3.1. Mômen tĩnh

Mômen tĩnh  $S$  của tiết diện đối với trục  $x$  hoặc  $y$  là tích phân:

$$S_x = \int_A y \cdot dA, \quad [cm^3]; \quad S_y = \int_A x \cdot dA, \quad [cm^3]. \quad (5.16)$$



Hình 5.6



Hình 5.7

Mômen tĩnh có thể dương, âm hoặc bằng không. Khi mômen tĩnh đối với một trục bằng không thì trục đó được gọi là trục trung tâm. Giao điểm của hai trục trung tâm là trọng tâm của tiết diện. Ngược lại, nếu hệ trục  $Cx_c y_c$  (hình 5.7) đi qua trọng tâm của tiết diện thì hệ trục đó là hệ trục trung tâm và có các mômen tĩnh tương ứng bằng không.

Như vậy, ta có thể lập công thức xác định tọa độ  $x_c, y_c$  của trọng tâm tiết diện theo hệ tọa độ  $x, y$  chọn bất kỳ (hình 5.7). Gọi  $x_0, y_0$  là tọa độ của phân tố  $M$  đối với hệ trục  $Cx_0 y_0$ , từ hình 5.7 ta có sự liên hệ giữa các tọa độ của phân tố  $M$  như sau:

$$x = x_0 + x_c; \quad y = y_0 + y_c$$

Thay các liên hệ này vào (5.16) với chú ý là các mômen tĩnh  $S_{x_0}$  và  $S_{y_0}$  bằng không, ta có:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A (y_o + y_c) dA = \int_A y_o dA + \int_A y_c dA = S_{x_o} + y_c A = y_c A;$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = \int_A (x_o + x_c) dA = \int_A x_o dA + \int_A x_c dA = S_{y_o} + x_c A = x_c A;$$

$$\text{Suy ra: } y_c = \frac{S_x}{A}; \quad x_c = \frac{S_y}{A}. \quad (5.17))$$

Ngược lại, nếu biết trọng tâm của tiết diện ta có thể xác định mômen tĩnh của tiết diện đối với hệ trục  $x, y$  bất kỳ:

$$S_x = y_c A; \quad S_y = x_c A. \quad (5.18)$$

### 5.3.2. Mômen quán tính đối với một trục

Mômen quán tính  $I$  của tiết diện đối với trục  $x$  hoặc  $y$  là tích phân:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA, \quad [\text{cm}^4]; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA, \quad [\text{cm}^4]. \quad (5.19)$$

Mômen quán tính luôn luôn dương.

### 5.3.3. Mômen quán tính cực

Mômen quán tính cực của tiết diện đối với cực  $O$  là tích phân:

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA, \quad [\text{cm}^4]; \quad (5.20)$$

với  $\rho$  là khoảng cách từ phần tử  $M$  đến cực  $O$ .

Vì  $\rho^2 = x^2 + y^2$  nên:

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y. \quad (5.21)$$

Mômen quán tính cực luôn luôn dương.

### 5.3.4. Mômen quán tính ly tâm

Mômen quán tính ly tâm của tiết diện đối với hệ trục  $Oxy$  là tích phân:

$$I_{xy} = \int_A xy dA, \quad [\text{cm}^4]; \quad (5.22)$$

Mômen quán tính ly tâm có thể dương, âm hoặc bằng không. Khi mômen quán tính ly tâm đối với một hệ trục nào đó bằng không thì hệ trục đó được gọi là hệ trục quán tính chính. Hệ trục quán tính chính đi qua trọng tâm của tiết diện được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Với tiết diện có một trục đối xứng: một trục quán tính chính trung tâm trùng với trục đối xứng; trục quán tính chính trung tâm thứ hai vuông góc với trục đối xứng và đi qua trọng tâm của tiết diện.

### 5.3.5. Công thức chuyển trục song song

Trong thực hành ta thường gặp bài toán sau: Giả sử đã biết các đặc trưng hình học của tiết diện đối với hệ trục  $Oxy$ , cần tìm các đặc trưng hình học của tiết diện đối với hệ trục mới  $CXY$ . Hệ trục mới  $CXY$  có thể chuyển dời song song hoặc xoay so với hệ trục  $Oxy$ . Do chỉ xét bài toán thanh chịu uốn có tiết diện đối xứng đối với một trục nên ta không cần lập công thức xoay trục mà chỉ cần lập công thức chuyển trục song song.

Gọi  $a, b$  là tọa độ của gốc  $O$  và gọi  $X, Y$  là tọa độ của phân tố  $M$  trong hệ tọa độ  $CXY$  (hình 5.8). Giữa các tọa độ  $X, Y$  và các tọa độ  $x, y$  của phân tố  $M$  trong hệ tọa độ  $Oxy$  có các liên hệ:

$$X = x + a; \quad Y = y + b$$

Thay các liên hệ này vào các biểu thức định nghĩa ta có:

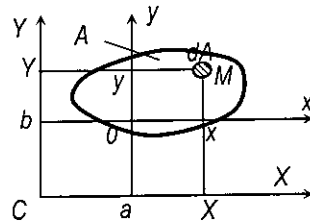
$$I_X = \int_A Y^2 \cdot dA = \int_A (y + b)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A b^2 \cdot dA + \int_A 2b \cdot y \cdot dA;$$

hay:  $I_X = I_x + b^2 A + 2b \cdot S_x$ .

Tương tự, ta có:

$$I_Y = \int_A X^2 \cdot dA = I_y + a^2 A + 2a \cdot S_y.$$

$$I_{XY} = \int_A XY \cdot dA = I_{xy} + abA + b \cdot S_x + a \cdot S_y.$$



Hình 5.8

Trường hợp khi  $Oxy$  là hệ trục trung tâm:

$$S_x = S_y = 0; \text{ nên:}$$

$$I_X = I_x + b^2 A;$$

$$I_Y = I_y + a^2 A;$$

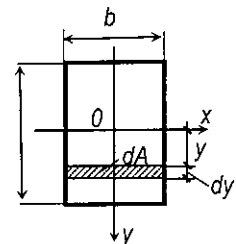
$$I_{XY} = I_{xy} + abA.$$

(5.23)

### 5.3.6. Đặc trưng hình học của một vài hình đơn giản

#### \* Hình chữ nhật

Giả sử tiết diện có dạng hình chữ nhật với bề rộng là  $b$ , chiều cao là  $h$  (hình 5.9). Hai trục  $x, y$  là các trục đối xứng nên là các trục quán tính chính trung tâm. Cần tìm các mômen quán tính chính trung tâm và mômen chống uốn đối với trục trung hòa  $x$  của tiết diện.



Hình 5.9

Chọn phân tố  $dA$  là dải chữ nhật có tung độ  $y$ , song song với trục  $x$ , bề rộng là  $b$ , chiều cao  $dy$ . Ta có:  $dA = b \cdot dy$ . Thay vào công thức định nghĩa của  $I_x$  ta có:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.23)$$

Tương tự: 
$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (5.24)$$

Mômen chống uốn  $W_x$  của tiết diện. Trong trường hợp này,  $y_k = y_n = h/2$  nên theo (5.15) ta có:

$$W_{x,k} = W_{x,n} = W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (5.25)$$

### \* Hình tròn

Giả sử tiết diện có dạng hình tròn với đường kính  $D$ , bán kính  $R$ . Do tính chất đối xứng nên:  $I_x = I_y$ . Theo (5.21) ta có sự liên hệ:

$$I_p = I_x + I_y = 2 I_x.$$

Như vậy, ta có thể tìm  $I_x, I_y$  thông qua  $I_p$  đã biết trong chương 4, công thức (4.14):

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4.$$

Suy ra: 
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4. \quad (5.26)$$

Mômen chống uốn  $W_x$  của tiết diện. Trong trường hợp này,  $y_k = y_n = R$  nên theo (5.15) ta có:

$$W_{x,k} = W_{x,n} = W_x = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3. \quad (5.27)$$

### \* Hình tròn rỗng

Giả sử tiết diện có dạng hình tròn rỗng với vòng ngoài có đường kính  $D$ , bán kính  $R$ ; vòng trong có đường kính  $d$ , bán kính  $r$ ; tỷ số  $\alpha = d/D$ .

Cũng lập luận tương tự như trường hợp hình tròn, ta được:

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4). \quad (5.28)$$

$$W_{x,k} = W_{x,n} = W_x = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4). \quad (5.29)$$

### \* Các thép hình

Các bảng thép hình trong Phụ lục cung cấp đầy đủ các đặc trưng hình học: diện tích  $A$ , mômen quán tính  $I_x, I_y$ ; mômen chống uốn  $W_x, W_y$  của các tiết diện định hình I; □; L.

## 5.4. ĐIỀU KIỆN BỀN KHI UỐN THUẬN TÚY

Khi chịu uốn thuần túy, trạng thái ứng suất trong thanh là trạng thái ứng suất đơn, điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_k \leq [\sigma]_k; \quad (5.30)$$

$$|\sigma_{\min}| = \left| \frac{M_x}{I_x} y_n \right| \leq [\sigma]_n. \quad (5.31)$$

Khi kiểm tra điều kiện bền với ứng suất nén ta lấy giá trị tuyệt đối của ứng suất vì  $\sigma_{\min} \leq 0$ .

Cần kiểm tra tại các tiết diện có trị số mômen uốn dương và mômen uốn âm lớn nhất.

Khi tiết diện có trục  $x$  đối xứng thì các trị số  $\sigma_{\max}$  và  $\sigma_{\min}$  bằng nhau, điều kiện bền có dạng đơn giản hơn như sau:

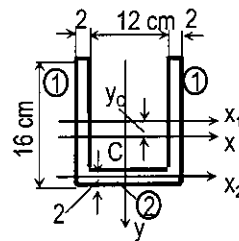
$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]_{\frac{k}{n}}. \quad (5.32)$$

Với vật liệu dẻo, khả năng chịu kéo và chịu nén như nhau  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$  nên điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.33)$$

**Ví dụ 5.1.** Xét tiết diện hình chữ U có kích thước như trên hình 5.10 và chịu mômen uốn thuần túy mang dấu dương  $M=4$  kNm. Yêu cầu kiểm tra điều kiện bền. Cho biết:  $[\sigma]_k = 1500$  N/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma]_n = 3000$  N/cm<sup>2</sup>.

\* Xác định các đặc trưng hình học của tiết diện. Tiết diện được hình thành từ ba hình: hai hình chữ nhật 1 với kích thước 16×2 cm; một hình chữ nhật 2 với kích thước 12×2 cm. Tiết diện có một trục đối xứng  $y$  nên  $y$  là trục quán tính chính trung tâm.



Hình 5.10

- Diện tích:  $A = 2(16 \times 2) + 12 \times 2 = 88$  cm<sup>2</sup>.
- Mômen tĩnh đối với trục  $x_1$  là trục trung tâm của hai hình 1, theo (5.18):  $S_{x_1} = 2S_1 + S_2 = 2 \times 0 + 7 \times 12 \times 2 = 168$  cm<sup>3</sup>.

- Tìm vị trí trọng tâm  $C$  theo (5.17):  $y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{168}{88} \approx 1,91 \text{ cm}$ .
- Tìm mômen quán tính chính trung tâm, đối với trục  $x$  đi qua trọng tâm  $C$ , vuông góc với trục  $y$ . Vận dụng công thức (5.23):

Đối với hình 1:  $I_x = \frac{2 \cdot 16^3}{12} + 1,91^2 \cdot 16 \cdot 2 = 799,4062 \text{ cm}^4$ .

Đối với hình 2:  $I_x = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 5,09^2 \cdot 12 \cdot 2 = 629,7944 \text{ cm}^4$ .

Đối với toàn tiết diện:  $I_x = 2 \times 799,4062 + 629,7944 = 2228,6068 \text{ cm}^4$ .

\* Xác định ứng suất  $\sigma_{max}$  và  $\sigma_{min}$  tại các điểm có  $y_k = 6,09 \text{ cm}$ ;  $y_n = 9,91 \text{ cm}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_k = \frac{4 \cdot 10^5}{2228,6068} \cdot 6,09 \approx 1093,06 \text{ N/cm}^2 < [\sigma]_k; \text{ (đạt)}$$

$$\sigma_{min} = -\frac{M_x}{I_x} y_n = -\frac{4 \cdot 10^5}{2228,6068} \cdot 9,91 \approx -1778,69 \text{ N/cm}^2 < [\sigma]_n; \text{ (đạt)}$$

**Ví dụ 5.2.** Vận dụng bảng số liệu thép hình trong Phụ lục 1, xác định số hiệu thép hình chữ I cho tiết diện dầm chịu mômen uốn thuần túy  $M = 16 \text{ kNm}$ . Cho biết:  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Theo điều kiện bền (5.33), ta có:

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{16 \cdot 10^2}{10} = 160 \text{ cm}^3.$$

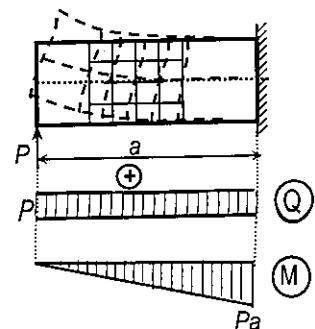
Từ bảng số liệu thép hình chữ I trong Phụ lục 1, ta chọn số hiệu I18a có  $W_x = 159 \text{ cm}^3$ . Kết quả thấp hơn yêu cầu với sai số:

$$\frac{160 - 159}{159} \cdot 100 = 0,63\% < 5\%, \text{ được phép.}$$

## 5.5. ỨNG SUẤT TRONG THANH CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

### 5.5.1. Quan sát thực nghiệm

Trên bề mặt của thanh chịu uốn ngang phẳng ta kẻ các đường vuông góc và song song với trục thanh như đã thực hiện trong trường hợp uốn thuần túy (hình 5.11). Sau khi chịu lực ta thấy: các đường



Hình 5.11

song song với trục trở thành những đường cong tròn đồng tâm; các đường vuông góc với trục không còn song song với nhau, không thẳng, không vuông góc với trục thành mà trở thành những đường cong; các góc vuông thay đổi.

Khi thanh chịu uốn ngang, lực cắt gây ra các ứng suất tiếp phân bố không đều theo chiều cao tiết diện, biến dạng trượt không đều làm cho tiết diện bị vênh, không còn phẳng. Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng.

### 5.5.2. Ứng suất pháp

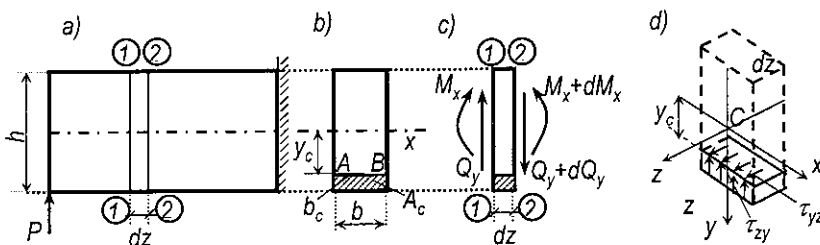
Từ những quan sát nêu trên, khi chịu uốn ngang tiết diện của thanh bị vênh, không còn phẳng. Tuy nhiên, vì độ vênh này thường rất nhỏ nên thường được bỏ qua, tức là vẫn chấp nhận giả thiết tiết diện phẳng khi lập công thức ứng suất pháp. Như vậy, công thức tính ứng suất pháp khi uốn ngang cũng có dạng tương tự như khi uốn thuần túy (5.13):

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y;$$

Ý nghĩa của các đại lượng như đã giải thích đối với công thức (5.13).

### 5.5.2. Ứng suất tiếp

Để trình bày được đơn giản, trước tiên ta xét trường hợp thanh có tiết diện hình chữ nhật. Giả sử cần lập công thức ứng suất tiếp trên tiết diện 1-1, tại điểm nằm trên đường AB song song với trục x, có tung độ là  $y_c$ . (hình 5.12a, b).



Hình 5.12

Nhận xét: điểm A và B ở mép tiết diện nên thành phần  $\tau_x$  song song với trục x bằng không. Thật vậy, nếu  $\tau_x \neq 0$  thì theo tính chất đối ứng của các ứng suất tiếp (xem mục 3.1, chương 3), thành phần  $\tau_x$  phải tồn tại. Điều này không thể xảy ra vì trên mặt ngoài không có ứng suất. Như vậy, tại A và B chỉ tồn tại thành phần ứng suất tiếp  $\tau_y$  song song với trục y;

Giả thiết: ứng suất tiếp tại các điểm trên đường AB hướng theo phương của lực cắt và phân bố đều theo chiều ngang tiết diện. Giả thiết này phù hợp với khi tiết diện có dạng hình chữ nhật hẹp.



Để lập công thức tính ứng suất tiếp, ta xét một phần tử thanh có chiều dài  $dz$  (hình 5.12c) và tách một phần của phần tử thanh bằng một mặt cắt song song với mặt  $Oxz$  (hình 5.12d). Ký hiệu diện tích của phần mặt cắt bị tách là  $A_c$  (đọc là diện tích cắt) và chiều rộng của đoạn  $AB$  là  $b_c$  (đọc là bề rộng tại vị trí bị cắt).

Trên phần bị tách, ngoài các ứng suất tiếp  $\tau_{zy}$  còn có:

- Các ứng suất tiếp  $\tau_{yz}$  trên mặt song song với mặt  $Oxz$ . Theo tính chất đối ứng của các ứng suất tiếp  $\tau_{yz}$  bằng  $\tau_{zy}$  với chiều như trên hình 5.12d.
- Các ứng suất pháp trên hai tiết diện 1-1 và 2-2 (trên hình 5.12d không vẽ các ứng suất này) được xác định theo công thức (5.13) như sau:

$$\sigma_{z1} = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \sigma_{z2} = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y.$$

Điều kiện cân bằng của phần bị tách dưới dạng hình chiếu lên trục  $z$  có dạng:

$$\int_{A_c} \frac{M_x}{I_x} y \cdot dA - \int_{A_c} \frac{M_x + dM_x}{I_x} y \cdot dA + \tau_{yz} \cdot b_c \cdot dz = 0$$

Sau khi biến đổi, ta được: 
$$\tau_{yz} = \int_{A_c} \frac{dM_x}{I_x b_c} y \cdot dA = \frac{1}{I_x b_c} \frac{dM_x}{dz} \int_{A_c} y \cdot dA$$

Nhưng:  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ , và  $\int_{A_c} y \cdot dA = S_x^c$  là mômen tĩnh của phần diện tích bị tách  $A_c$  đối với trục trung hòa  $x$ . Do đó:

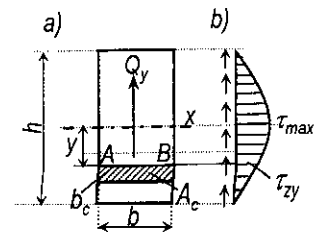
$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b_c}. \quad (5.34)$$

Đó là công thức tính ứng suất tiếp khi uốn ngang phẳng do D.I. Jurapski đề xuất.

Sau đây ta tìm hiểu quy luật phân bố của ứng suất tiếp theo chiều cao của một số tiết diện thường gặp.

**\* Tiết diện chữ nhật** (hình 5.13)

Khi tiết diện có dạng hình chữ nhật với chiều rộng  $b$ , chiều cao  $h$ , để tìm ứng suất tiếp tại điểm có tung độ cách trục trung hòa là  $y$ , ta có:



Hình 5.13

$$b_c = b; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad A_c = \left(\frac{h}{2} - y\right)b;$$

$$S_x^c = \left(\frac{h}{2} - y\right)b \left[ y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\text{Theo (5.34):} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (5.35)$$

Sự phân bố ứng suất tiếp theo chiều cao tiết diện là đường cong bậc hai (hình 5.13b).

$$\text{Khi } y = 0, \text{ ta có: } \tau_{zy} = \tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2A} \quad (5.36)$$

**\* Tiết diện chữ I** (hình 5.14)

• *Trên bản cánh:* ứng suất tiếp  $\tau_{zx}$  trên các bản cánh có phương và chiều như trên hình 5.14b. Thực ra còn có thành phần  $\tau_{zy}$  song rất nhỏ nên không xét đến. Giá trị ứng suất tại  $k$  tìm theo công thức D.I. Jurapski với các số liệu như sau:

$$b_c = t; \quad A_c = t \cdot \eta; \quad S_x^c = A_c \cdot \frac{h-t}{2} = t\eta \frac{h-t}{2}; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_y(h-t)}{2I_x} \eta.$$

Do đó, ứng suất tiếp biến thiên theo hàm bậc nhất như trên hình 5.14b.

$$\text{Giá trị lớn nhất khi } \eta = b/2 : \tau_{zx, \max} = \frac{Q_y hb}{4I_x}.$$

• *Trên bản bụng:* ứng suất tiếp  $\tau_{zy}$  trên bản bụng có phương và chiều như trên hình 5.14c. Giá trị ứng suất tại  $m$  tìm theo công thức D.I. Jurapski với các số liệu như sau:

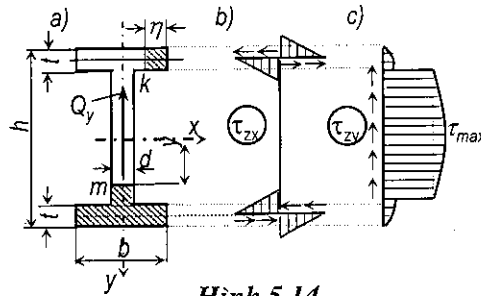
$$A_c = \left(\frac{h}{2} - y\right)d + (b-d)t; \quad S_x^c = \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\frac{d}{2} + (b-d)t\frac{(h-t)}{2};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{I_x b_c} S_x^c = \frac{Q_y}{2I_x b_c} \left[ \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)d + (b-d)t(h-t) \right]. \quad (5.37)$$

$$b_c = d \text{ khi } y \leq (h-t)/2; \quad b_c = b \text{ khi } y \geq (h-t)/2.$$

Do đó, ứng suất tiếp  $\tau_{zy}$  biến thiên theo hàm bậc hai như trên hình 5.14c. Tại các điểm tiếp giáp giữa bản bụng và bản cánh biểu đồ ứng suất có bước nhảy do đại lượng  $b_c$  có sự thay đổi đột ngột từ  $d$  đến  $b$ .

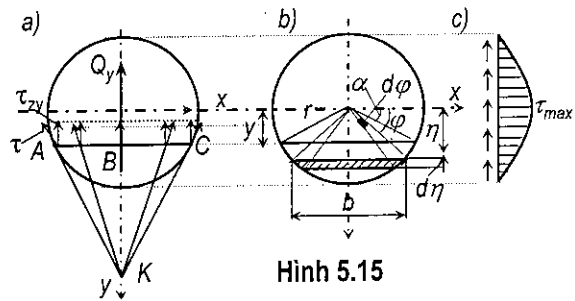
Giá trị lớn nhất của  $\tau_{zy}$  xảy ra khi  $y = 0$ .



Hình 5.14

**\* Tiết diện tròn (hình 5.15)**

Ứng suất tiếp tại hai điểm biên A, C của đường AC song song với trục x phải hướng theo phương tiếp tuyến với đường tròn tại A và C. Do tính đối xứng, ứng suất tiếp tại B có phương theo trục y. Gọi K là giao điểm của hai đường tiếp tuyến với đường tròn tại A và C.



Hình 5.15

Giả thiết ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ trên đường ABC có phương đi qua K; thành phần ứng suất  $\tau_{zy}$  phân bố đều trên đường ABC và được xác định theo công thức D.I. Jurapski.

Để tìm ứng suất tiếp tại các điểm trên đường ABC cách trục trung hòa là y ta cần xác định mômen tĩnh  $S_x^c$  của hình viên phân có tọa độ góc là  $\alpha$ . Muốn vậy, ta xét một phân tố diện tích là phân gạch gạch trên hình 5.15b, cách trục trung hòa là  $\eta$  tương ứng với tọa độ góc  $\varphi$ . Từ hình 5.15b, ta có:  $\eta = r \sin \varphi$ ;  $d\eta = r \cos \varphi d\varphi$ ;  $b = 2 r \cos \varphi$ . Do đó:

$$S_x^c = \int_{A_c} \eta \cdot dA = \int_{\alpha}^{\pi/2} r \sin \varphi \cdot 2r \cos \varphi \cdot r \cos \varphi \cdot d\varphi = -2r^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot d(\cos \varphi).$$

Kết quả: 
$$S_x^c = \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \alpha$$

Do đó: 
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{I_x} \frac{2r^3 \cos^3 \alpha}{3 \cdot 2r \cos \alpha} = \frac{Q_y}{3I_x} r^2 \cos^2 \alpha = \frac{Q_y}{3I_x} (r^2 - y^2) \quad (5.38)$$

Ta thấy, ứng suất tiếp biến thiên theo hàm bậc hai như trên hình 5.15c.

Ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra tại điểm nằm trên trục trung hòa:

$$\tau_{zy, \max} = \frac{Q_y r^2}{3I_x} = \frac{4Q_y}{3A} \quad (5.39)$$

## 5.6. ĐIỀU KIỆN BỀN KHI UỐN NGANG PHẪNG

Khi kiểm tra bền thanh chịu uốn ngang phẳng, ngoài ảnh hưởng của ứng suất pháp ta cần xét đến ảnh hưởng của ứng suất tiếp.

Cần kiểm tra tại các tiết diện nguy hiểm và tại các điểm nguy hiểm tương ứng. Sự phá hoại có thể phát sinh do riêng ứng suất pháp, do riêng ứng suất tiếp và cũng có thể do cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp gây ra.

### 5.6.1. Kiểm tra tại phân tố chỉ chịu ứng suất pháp

Cần kiểm tra tại các tiết diện có trị số mômen uốn dương và mômen uốn âm lớn nhất. Tương tự như (5.30), (5.31) và (5.33), ta có điều kiện bền:

• Với vật liệu dòn:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n. \quad (5.40)$$

Khi kiểm tra điều kiện bền với ứng suất nén ta lấy giá trị tuyệt đối của ứng suất vì  $\sigma_{\min} \leq 0$ .

• Với vật liệu dẻo,  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$  nên ta có:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (5.41)$$

### 5.6.2. Kiểm tra tại phân tố chỉ chịu ứng suất tiếp

Cần kiểm tra tại tiết diện có trị số lực cắt lớn nhất, tại phân tố nằm trên trục trung hòa. Ta có điều kiện bền:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.42)$$

Giá trị  $[\tau]$  thường được xác định như sau:

- $[\tau] = [\sigma]/2$  theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất [xem 3, 4], hoặc
- $[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3}$  theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng [xem 3, 4].

### 5.6.3. Kiểm tra tại phân tố có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp

Cần kiểm tra tại tiết diện có trị số lực cắt và mômen uốn đồng thời cùng lớn, tại phân tố có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp cùng lớn (thường ở tại vị trí có bề rộng  $b_c$  thay đổi đột ngột). Ta có điều kiện bền mô tả qua ứng suất tương đương như sau:

- theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất [xem 3, 4],

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (5.43)$$

- hoặc theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng [xem 3, 4].

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.44)$$

**Ví dụ 5.3.** Xét hệ có kích thước và chịu lực như trên hình 5.16. Kiểm tra các điều kiện bền (5.41); (5.42); (5.44) khi chọn tiết diện dầm là thép hình chữ IN<sup>o</sup> 24a. Cho biết:  $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3}$

Theo TCVN 1655-75 (xem Phụ lục) thép hình IN<sup>o</sup> 24a (hình 5.17) có các số liệu như sau:  $h = 24 \text{ cm}$ ;  $b = 125 \text{ cm}$ ;  $d = 0,56 \text{ cm}$ ;  $t = 0,98 \text{ cm}$ ;

$I_x = 3800 \text{ cm}^4$ ;  $W_x = 317 \text{ cm}^3$ ; mômen tĩnh của nửa tiết diện đối với trục x:  $S_x = 178 \text{ cm}^3$ .

Sau khi xác định các phản lực tại A và D ta vẽ được các biểu đồ lực cắt và mômen uốn như trên hình 5.16.

- Kiểm tra phân tố chỉ chịu ứng suất pháp: tại tiết diện C:  $M_{\max} = 45 \text{ kNm}$ . Do đó, theo (5.41) ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{45 \cdot 10^2}{317} \\ &= 14,20 \text{ kN/cm}^2; \text{ (đạt).} \end{aligned}$$

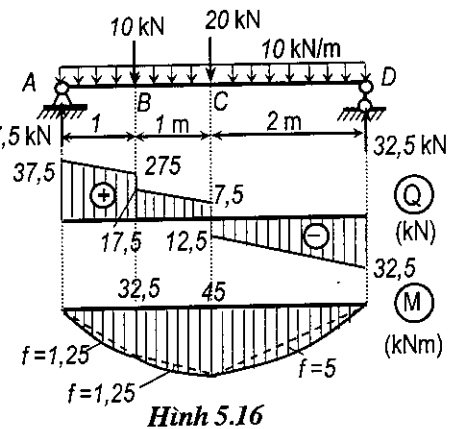
- Kiểm tra phân tố chỉ chịu ứng suất tiếp: tại tiết diện A:  $Q_{\max} = 37,5 \text{ kN}$ . Do đó, theo (5.34) và (5.42) ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b_c} = \frac{37,5 \cdot 178}{3800 \cdot 0,56} = 3,14 \text{ kN/cm}^2.$$

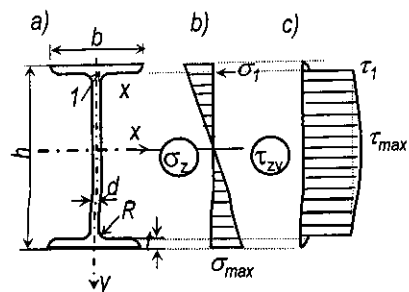
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ kN/cm}^2. \text{ Ta thấy:}$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \text{ (đạt).}$$

- Kiểm tra phân tố có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương đối lớn: tại phân tố I, nơi tiếp giáp giữa bản bụng và bản cánh trên tiết diện C có  $M_{\max} = 45 \text{ kNm}$ ;  $Q = 12,5 \text{ kN}$  (hình 5.17).



Hình 5.16



Hình 5.17

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_x} y_1 = \frac{45 \cdot 10^2}{3800} \left( \frac{24}{2} - 0,98 \right) = 13,08 \text{ kN/cm}^2;$$

$$S_x^{cl} = S_x - \frac{d}{2} y_1^2 = 178 - \frac{0,56}{2} \left( \frac{24}{2} - 0,98 \right)^2 = 144 \text{ cm}^3;$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b_c} = \frac{12,5 \cdot 144}{3800 \cdot 0,56} = 0,845 \text{ kN/cm}^2.$$

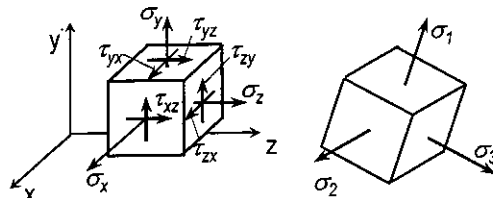
Theo (5.44):

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{13,08^2 + 3 \cdot 0,845^2} = 13,16 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] \text{ (đạt)}$$

Về nguyên tắc ta cần kiểm tra tại hai tiết diện B và C song nếu thực hiện tương tự đối với tiết diện B thì tìm được giá trị  $\sigma_{td}$  nhỏ hơn.

## 5.7. ỨNG SUẤT CHÍNH VÀ QUỸ ĐẠO ỨNG SUẤT CHÍNH

Trong nghiên cứu về trạng thái ứng suất, người ta đã chứng minh được là: tại một phân tố bất kỳ của vật thể chịu lực *luôn có thể tìm được ba mặt phẳng vuông góc với nhau, trên các mặt đó chỉ tồn tại ứng suất pháp*, còn thành phần

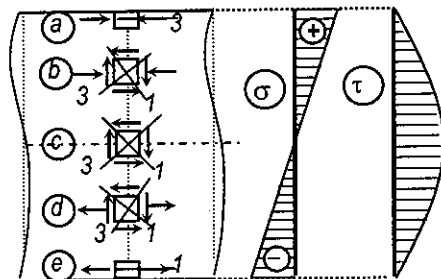


Hình 5.18

ứng suất tiếp bằng không (hình 5.18). Các mặt đó gọi là *mặt chính*. Phương pháp tuyến của các mặt chính gọi là *phương chính*. Ứng suất pháp tác dụng trên các mặt đó gọi là *ứng suất chính*. Các ứng suất chính đạt giá trị cực đại trong các mặt phẳng tương ứng và được ký hiệu là  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  với quy ước xếp thứ tự như sau:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Trên tiết diện của dầm chịu uốn ngang phẳng (hình 5.19), xét 5 phân tố dọc theo chiều cao của dầm kết hợp với các biểu đồ ứng suất ta thấy:

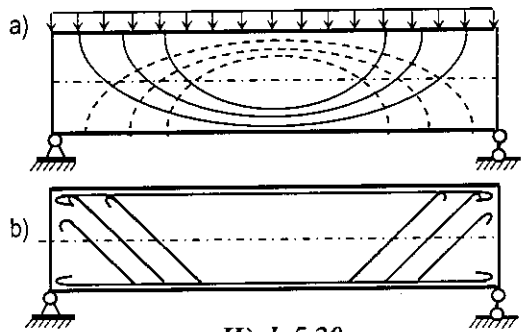
- Phân tố a, e ở mép trên và mép dưới chỉ chịu ứng suất pháp. Tại e, phân tố bị kéo  $\sigma_1 = \sigma_{max}$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ; phương chính theo  $\sigma_1$  là phương 1 dọc trục thanh; phương chính theo  $\sigma_3$  là phương vuông góc với trục thanh.



Hình 5.19

- Phân tố  $c$  trên trục trung hòa chỉ chịu ứng suất tiếp. Nếu thực hiện các mặt cắt nghiêng ta sẽ tìm được các mặt cắt chính với:  $\sigma_1 = \tau_{max}$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau_{max}$ . Hai phương chính 1 và 3 nghiêng  $45^\circ$  so với trục thanh (hình 5.19).

- Phân tố  $b, d$  chịu ứng suất pháp và ứng suất tiếp.



Hình 5.20

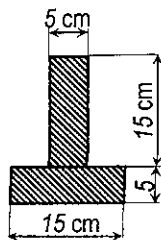
Nếu thực hiện các mặt cắt nghiêng ta sẽ tìm được các ứng suất chính  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3$ . và các mặt chính với: Hai phương chính 1 và 3 vuông góc và nghiêng so với trục thanh theo một góc xác định (hình 5.19).

Vì  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  luôn trái dấu nên tại một phân tố bất kỳ luôn tồn tại một phương chính kéo và một phương chính nén. Nếu vẽ các đường liên tục với các phương chính kéo làm tiếp tuyến thì sẽ được một họ đường gọi là *quỹ đạo ứng suất chính kéo* (đường liền nét trên hình 5.20a). Nếu lấy các phương chính nén làm tiếp tuyến thì sẽ được một họ đường trực giao với họ đường trên gọi là *quỹ đạo ứng suất chính nén* (đường đứt nét trên hình 5.20a).

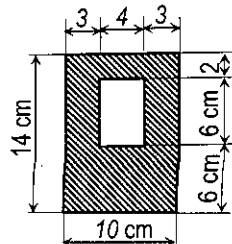
Quỹ đạo ứng suất chính cho ta biết cách bố trí vật liệu đúng chỗ. Ví dụ, với dầm bê tông cốt thép chịu tải trọng phân bố đều như trên hình 5.20b, do thép là vật liệu chịu kéo tốt nên cần đặt cốt thép theo phương quỹ đạo ứng suất chính kéo như trên hình 5.20b.

## BÀI TẬP CHƯƠNG V

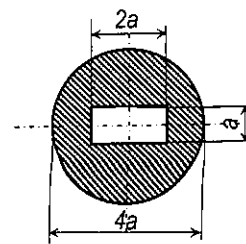
V.1 - V.3 [2 và 12]. Tìm tọa độ trọng tâm và xác định mômen quán tính chính trung tâm cho các tiết diện trên hình V.1 - V.3.



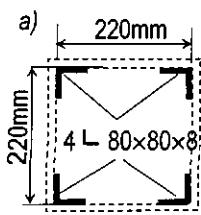
Hình V.1



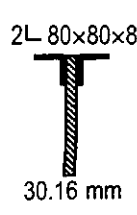
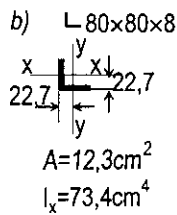
Hình V.2



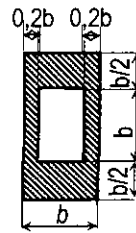
Hình V.3



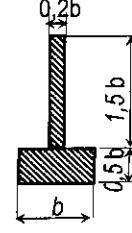
Hình V.4



Hình V.5



Hình V.6



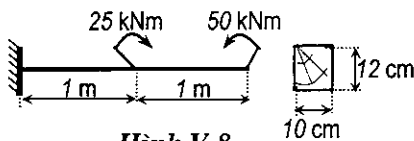
Hình V.7

V.4 - V.5 [2]. Vận dụng các bảng thép hình trong Phụ lục, tìm tọa độ trọng tâm và xác định mômen quán tính chính trung tâm cho các tiết diện ghép trên hình V.4a - V.5. Theo bảng 3 trong Phụ lục, các số liệu cần thiết của thép góc cánh đều 80x80x8 như trên hình V.4b.

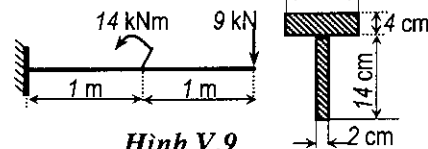
V.6 - V.7 [12]. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp khi các tiết diện trên hình V.6 - V.7 chịu lực cắt  $Q$ .

V.8. Kiểm tra điều kiện bền cho dầm gỗ có tiết diện chữ nhật (hình V.8). Cho biết:  $[\sigma] = 0,20 \text{ kN/cm}^2$

V.9. Xác định giá trị lớn nhất của các ứng suất pháp khi kéo, khi nén và ứng suất tiếp trong dầm chịu tải trọng như trên hình V.9.



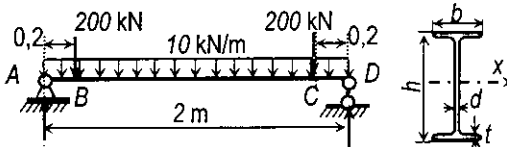
Hình V.8



Hình V.9

V.10. [2; 5] Kiểm tra các điều kiện bền cho hệ trên hình V.10. khi tiết diện dầm là thép hình IN<sup>o</sup>36.

Cho biết:



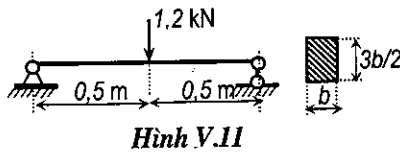
Hình V.10

$[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3}$ . Theo Phụ lục, thép hình IN<sup>o</sup>36 có các số liệu:  $h = 36 \text{ cm}$ ;  $b = 145 \text{ cm}$ ;  $d = 0,75 \text{ cm}$ ;  $t = 1,23 \text{ cm}$ ;  $I_x = 13380 \text{ cm}^4$ ;  $W_x = 743 \text{ cm}^3$ ; mômen tĩnh của nửa tiết diện đối với trục x:  $S_x = 423 \text{ cm}^3$ .

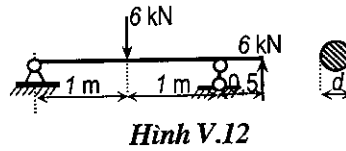
V.11. [12]. Xác định kích thước  $b$  của tiết diện dầm chịu tải trọng như trên hình V.11 theo điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp lớn nhất. Cho biết:  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

V.12. [12]. Xác định đường kính  $d$  của tiết diện dầm chịu tải trọng như trên hình V.12 theo điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp lớn nhất. Cho biết:  $[\sigma] = 4,5 \text{ kN/cm}^2$ .

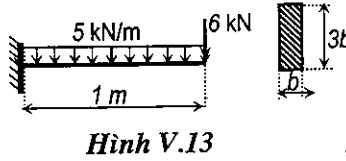




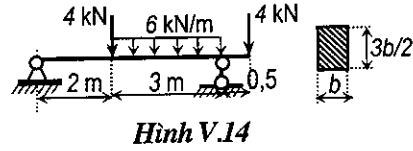
Hình V.11



Hình V.12



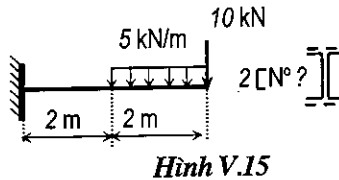
Hình V.13



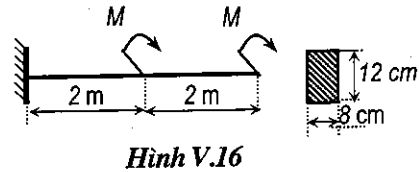
Hình V.14

V.13 - V.14. Xác định kích thước  $b$  của tiết diện dầm chịu tải trọng như trên các hình V.13, V.14 theo điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp lớn nhất. Tiếp đó, tìm ứng suất tiếp lớn nhất. Cho biết:  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

V.15. Xác định số hiệu thép hình của tiết diện ghép trong dầm chịu tải trọng như trên hình V.15 theo điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp lớn nhất. Tiếp đó, tìm ứng suất tiếp lớn nhất. Cho biết:  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình V.15

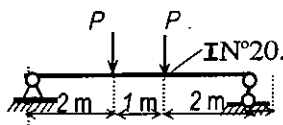


Hình V.16

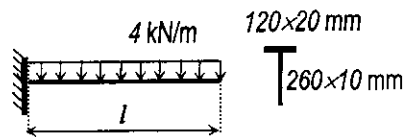
V.16. Xác định giá trị cho phép của  $M$  tác dụng trên dầm (hình V.16). Cho biết:  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

V.17. [12]. Xác định giá trị cho phép của tải trọng  $P$  tác dụng trên dầm (hình V.17). Cho biết:  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

V.18. [12]. Xác định giá trị cho phép của chiều dài  $l$  của dầm trên hình V.18 theo điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp lớn nhất. Tiếp đó, tương ứng với giá trị  $l$  tìm được, kiểm tra điều kiện bền tại phần tử có ứng suất tiếp lớn nhất và tại phần tử có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp cùng tương đối lớn. Cho biết:  $[\sigma_k] = 4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\sigma_n] = 15 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình V.17



Hình V.18

# BÀI TẬP LỚN SỐ 1

## Tính hệ ghép tĩnh định

### Thứ tự thực hiện:

1. Xác định các tải trọng để tính (hệ số vượt tải  $n = 1,1$  chung cho các loại tải trọng).
2. Xác định các phản lực gối tựa.
3. Vẽ các biểu đồ mômen uốn, lực cắt, lực dọc.
4. Chọn tiết diện cho phần hệ  $m-n$ . Cho biết: hệ  $m-n$  có  $[\sigma]=15 \text{ kN/cm}^2$  và được làm bằng thép hình I, có kể đến trọng lượng bản thân của hệ. Nếu kết quả tìm được vượt quá các số liệu trong bảng 1 của phụ lục thì có thể ghép hai hoặc nhiều dầm I và xem nội lực được phân bố đều cho các dầm.
5. Vẽ các biểu đồ ứng suất pháp, ứng suất tiếp tại các tiết diện nguy hiểm trên hệ đã chọn

Các số liệu tính toán: cho trên các bảng sau:

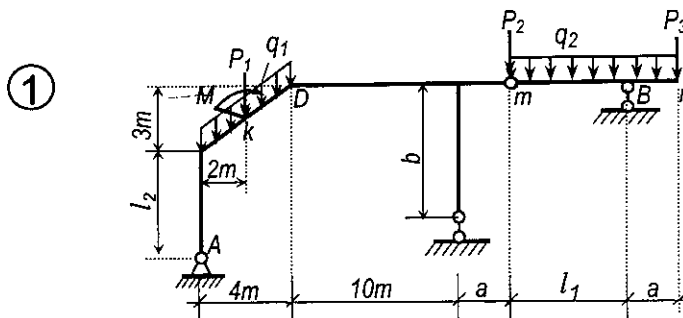
Số liệu hình học (m)

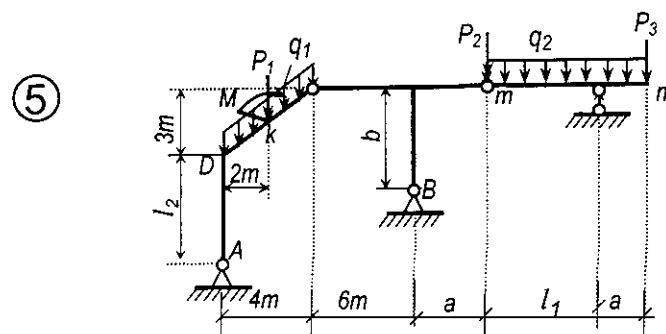
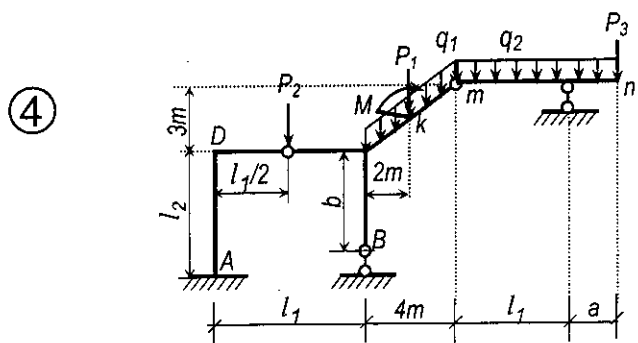
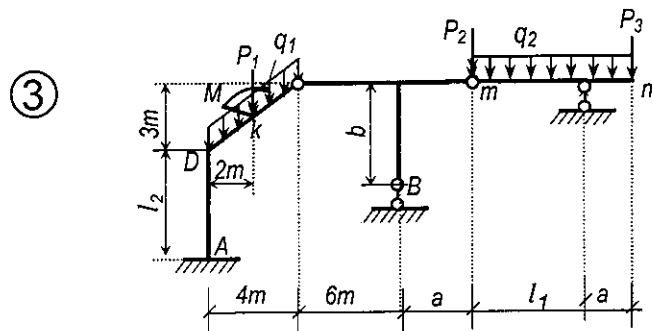
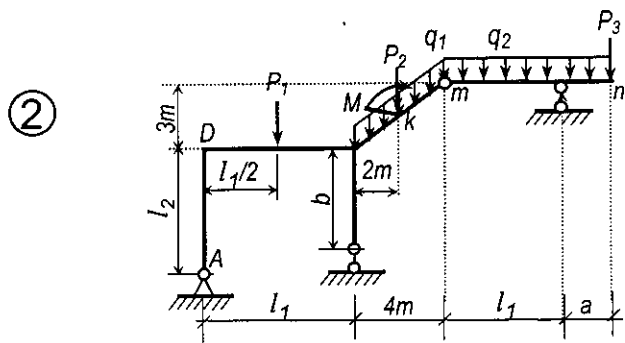
T.T	$l_1$	$l_2$	$a$	$b$
a	16	4	2	4
b	16	4	2	5
c	18	5	2	6
d	18	5	3	4
e	20	6	3	5
f	20	6	3	6

Số liệu tải trọng

T.T	$P_1$ (kN)	$P_2$ (kN)	$P_3$ (kN)	$q_1$ (kN/m)	$q_2$ (kN/m)	$M$ (kNm)
1	40	0	40	30	30	100
2	40	0	30	30	25	120
3	40	30	0	30	25	140
4	40	40	0	30	30	120
5	30	0	30	30	20	140
6	30	0	40	30	20	100

### Sơ đồ hệ và tải trọng



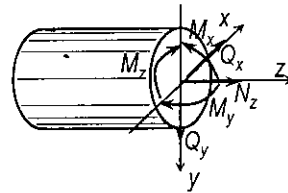


# 6

## CÁCH TÍNH THANH CHỊU LỰC KẾT HỢP

Trong các chương trên ta đã nghiên cứu bài toán thanh chịu lực tương ứng với các dạng biến dạng cơ bản: kéo nén đúng tâm; xoắn thuần túy; uốn ngang phẳng. Trên thực tế, tồn tại các phần tử thanh chịu tác dụng đồng thời của nhiều thành phần nội lực tương ứng với nhiều biến dạng cơ bản. Tổ hợp các trường hợp chịu lực đơn giản gọi là trường hợp *chịu lực kết hợp hoặc chịu lực phức tạp*.

Trường hợp tổng quát nhất: trên tiết diện thanh có đủ sáu thành phần nội lực như trên hình 6.1: lực dọc  $N_z$ ; lực cắt  $Q_y$ ;  $Q_x$ ; các mômen uốn  $M_x$ ;  $M_y$  và mômen xoắn  $M_z$ . Trong đó,  $x$ ,  $y$  là các trục quán tính chính trung tâm;  $z$  là trục thanh.



Hình 6.1

Trên thực tế người ta nhận thấy ảnh hưởng của lực cắt rất nhỏ so với ảnh hưởng của các thành phần nội lực khác nên trong tính toán thường được bỏ qua.

Để giải bài toán thanh chịu lực kết hợp ta vận dụng *nguyên lý cộng tác dụng* đã trình bày trong chương mở đầu.

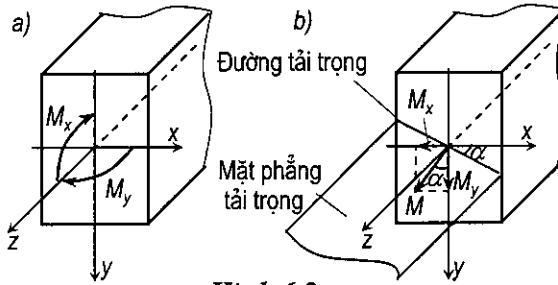
Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách giải bài toán thanh chịu lực kết hợp tương ứng với các trường hợp từ đơn giản đến phức tạp.

### 6.1. THANH CHỊU UỐN XIÊN

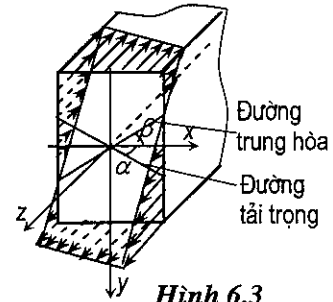
Thanh chịu uốn xiên khi trên tiết diện có hai thành phần mômen uốn  $M_x$  và  $M_y$  tác dụng đồng thời (hình 6.2a). Ta có thể biểu thị các mômen uốn bằng các vectơ mômen theo các trục tọa độ như trên hình 6.2b. Hợp các vectơ mômen đó ta được vectơ mômen tổng  $M$ . Mặt phẳng vuông góc với vectơ mômen tổng được gọi là *mặt phẳng tải trọng*. Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với tiết diện là *đường tải trọng*.

Ta thấy: đường tải trọng là đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Do đó, có thể đưa ra một định nghĩa khác về uốn xiên như sau: thanh chịu uốn xiên khi

trên tiết diện chỉ có một thành phần mômen uốn  $M$  nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh và không chứa trục quán tính chính trung tâm nào của tiết diện.



Hình 6.2



Hình 6.3

### 6.1.1. Ứng suất pháp trên tiết diện

Gọi  $\alpha$  là góc hợp giữa trục  $x$  và đường tải trọng ( $\alpha$  cũng là góc hợp giữa trục  $y$  với vectơ mômen tổng  $M$ ). Từ hình 6.2b ta thấy:

$$\operatorname{tg} \alpha = M_x / M_y; \quad M_x = M \sin \alpha; \quad M_y = M \cos \alpha;$$

Tại một phần tử bất kỳ có tọa độ  $x, y$ , ứng suất pháp tương ứng với các mômen uốn  $M_x, M_y$  có cùng phương nên theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể biểu thị ứng suất khi thanh chịu các lực kết hợp dưới dạng tổng đại số như sau:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x; \quad (6.1)$$

trong đó:

$x, y$  – tọa độ của điểm cần tìm ứng suất pháp trong hệ trục quán tính chính trung tâm  $x, y$ .

$I_x, I_y$  – mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện đối với hệ trục  $x, y$ .

Khi sử dụng công thức (6.1) cần chú ý đến dấu của các đại lượng  $x, y, M_x, M_y$ . Để tránh nhầm lẫn người ta thường dùng công thức kỹ thuật sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (6.2)$$

Trước mỗi số hạng, lấy dấu cộng hoặc trừ tùy theo các  $M_x, M_y$  gây ra ứng suất kéo hay nén tại điểm đang xét.

### 6.1.2. Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất

Từ công thức (6.1) ta thấy ứng suất pháp phân bố trên tiết diện theo luật bậc nhất, được mô tả bằng *mặt phẳng ứng suất* như trên hình 6.3. Giao tuyến

của mặt ứng suất với tiết diện là quỹ tích của những điểm có ứng suất pháp bằng không và được gọi là đường trung hòa.

Để tìm phương trình đường trung hòa ta vận dụng (6.1) và thể hiện điều kiện  $\sigma = 0$  như sau:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0.$$

hay 
$$y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} x = \operatorname{tg}\beta \cdot x \quad (6.3)$$

với  $\operatorname{tg}\beta$  là hệ số góc của đường trung hòa:

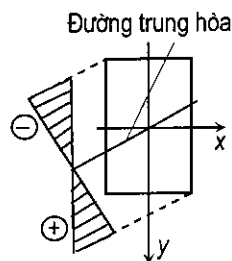
$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad (6.4)$$

Góc  $\beta$  dương khi chiều quay từ trục  $x$  đến đường trung hòa là thuận chiều kim đồng hồ.

#### Nhận xét:

- Đường trung hòa đi qua trọng tâm của tiết diện.
- Theo (6.4),  $\operatorname{tg}\beta$  và  $\operatorname{tg}\alpha$  luôn trái dấu nhau nên đường trung hòa và đường tải trọng luôn ở các góc phân tư khác nhau của hệ trục  $x, y$ .
- Đường trung hòa và đường tải trọng nói chung không vuông góc với nhau. Đối với tiết diện hình tròn hay đa giác đều cạnh,  $I_x = I_y$  nên theo (6.4),  $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha = -1$ ; do đó đường trung hòa và đường tải trọng vuông góc với nhau và bài toán đưa về trường hợp uốn phẳng.

Qua hình vẽ mặt ứng suất (hình 6.3) ta thấy những điểm cách đều đường trung hòa có ứng suất bằng nhau; những điểm cách xa đường trung hòa nhất có ứng suất lớn nhất hoặc bé nhất về giá trị đại số. Do đó ta có thể mô tả sự phân bố ứng suất qua biểu đồ ứng suất với cách vẽ như sau (hình 6.4): kéo dài đường trung hòa; chọn đường chuẩn vuông góc với đường trung hòa; ứng suất tại những điểm có cùng khoảng cách đến đường trung hòa được biểu thị bằng một tung độ vuông góc với đường chuẩn. Biểu đồ ứng suất là đường thẳng được giới hạn trong phạm vi tiết diện; miền có ứng suất kéo mang dấu dương; miền có ứng suất nén mang dấu âm.



Hình 6.4

### 6.1.3. Điều kiện bền

Tại tiết diện có các thành phần nội lực lớn nhất, phân tố nguy hiểm xảy ra ở những điểm cách xa nhất đối với đường trung hòa. Do đó, điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x}|y_k| + \frac{|M_y|}{I_y}|x_k| \leq [\sigma]_k; \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\min} = -\left[ \frac{|M_x|}{I_x}|y_n| + \frac{|M_y|}{I_y}|x_n| \right] \leq [\sigma]_n.$$

trong đó:  $x_k, y_k; x_n, y_n$  lần lượt là tọa độ của điểm chịu ứng suất kéo và điểm chịu ứng suất nén cách xa nhất đối với đường trung hòa.

\* Trường hợp tiết diện có dạng hình chữ nhật, chữ I, phân tố nguy hiểm xảy ra ở hai điểm góc đối nhau, cách xa nhất đối với đường trung hòa, điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k; \quad (6.6)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_n.$$

\* Trường hợp tiết diện có dạng hình tròn với bán kính  $R$ , mọi hệ trục đi qua trọng tâm đều là hệ trục quán tính chính trung tâm nên bài toán được đưa về bài toán uốn phẳng với mômen uốn  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

Điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{M_u}{W_u} \leq [\sigma]_{\frac{k}{n}} \quad \text{với} \quad W_u = \frac{\pi R^3}{4} \quad (6.7)$$

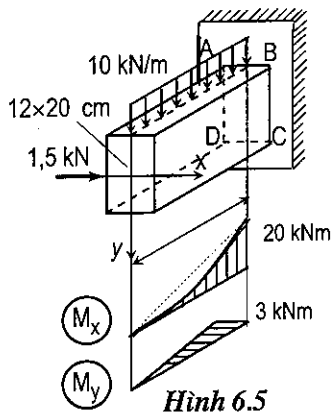
Với vật liệu dẻo, vì  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$  nên các điều kiện bền sẽ là:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \quad (6.8)$$

Từ các điều kiện bền ta cũng có thể giải ba dạng bài toán tương tự như trong các trường hợp thanh chịu lực đơn giản: bài toán kiểm tra; bài toán thiết kế tiết diện; bài toán xác định tải trọng cho phép. Riêng với bài toán chọn kích thước tiết diện, do có nhiều đại lượng chưa biết như:  $I_x; I_y; x_k; y_k; x_n; y_n$  nên cần sử dụng phương pháp tính thử đúng dần như sau: ban đầu tự chọn trước kích thước tiết diện, sau đó kiểm tra theo điều kiện bền, nếu chưa

đạt thì chọn lại cho đến khi thỏa mãn. Khi chọn tiết diện thường giả thiết trước tỷ số  $k = W_x / W_y$ ; với tiết diện chữ nhật,  $k = h/b$ ; với tiết diện hình I, thường chọn  $k = 8 \div 10$ .

**Ví dụ 6.1.** Cho dầm có tiết diện chữ nhật với kích thước  $12 \times 20$  cm, chịu lực như trên hình 6.5. Yêu cầu:



a) Xác định các thành phần nội lực lớn nhất, ứng suất pháp tại các điểm góc A, B, C, D trên tiết diện nguy hiểm; góc nghiêng của đường trung hòa.

b) Nếu thay tiết diện chữ nhật bằng thép hình I, xác định số hiệu tương ứng của thép hình I và góc nghiêng của đường trung hòa.

a) Các biểu đồ nội lực như trên hình 6.5; tiết diện nguy hiểm là tiết diện ở ngàm, tại đó:  $M_x = -ql^2/8 = -20$  kNm;  $M_y = -Pl = -3$  kNm.

Các đặc trưng hình học:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4; \quad I_y = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ cm}^4.$$

Theo (6.1), ứng suất tại điểm có tọa độ  $x, y$ :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = -\frac{20 \cdot 10^2}{8000} y - \frac{3 \cdot 10^2}{2880} x = -0,25y - 0,104x.$$

Tại A:  $x_A = -6; y_A = -10; \sigma_A = 0,25 \cdot 10 + 0,104 \cdot 6 = 3,125 \text{ kN/cm}^2$ .

Tại B:  $x_B = 6; y_B = -10; \sigma_B = 0,25 \cdot 10 - 0,104 \cdot 6 = 1,875 \text{ kN/cm}^2$ .

Tại C:  $x_C = 6; y_C = 10; \sigma_C = -0,25 \cdot 10 - 0,104 \cdot 6 = -3,125 \text{ kN/cm}^2$ .

Tại D:  $x_D = -6; y_D = 10; \sigma_D = -0,25 \cdot 10 + 0,104 \cdot 6 = -1,875 \text{ kN/cm}^2$ .

Độ nghiêng của đường tải trọng so với trục  $x$ :  $\text{tg} \alpha = \frac{M_x}{M_y} = \frac{20}{3} = 6,6667$

Độ nghiêng của đường trung hòa so với trục  $x$

$$\text{tg} \beta = -\frac{1}{\text{tg} \alpha} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{1}{6,6667} \cdot \frac{8000}{2880} = -4,1666. \text{ Suy ra } \beta = -76^\circ 30'$$

b) Thay tiết diện chữ nhật bằng thép hình I : giả thiết tỷ số  $k = W_x / W_y = 8$ .

Từ (6.6), ta có điều kiện:  $\frac{1}{W_x} \left[ |M_x| + k |M_y| \right] \leq [\sigma];$



Suy ra:  $W_x \geq \frac{1}{[\sigma]} \left[ |M_x| + k|M_y| \right] = \frac{1}{16} [2000 + 8.300] = 275 \text{ cm}^3.$

Thử chọn I24, từ bảng 1 của Phụ lục, ta có:  $W_x=289 \text{ cm}^3$ ;  $W_y=41,6 \text{ cm}^3$ ;  
 $I_x=3460 \text{ cm}^4$ ;  $I_y=198 \text{ cm}^4$ ;

Kiểm tra lại theo điều kiện (6.6), ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{2000}{289} + \frac{300}{34,5} = 6,920 + 8,696 = 15,616 < 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Sai số:  $(16 - 15,616).100/16 = 2,4 \%$  (đạt).

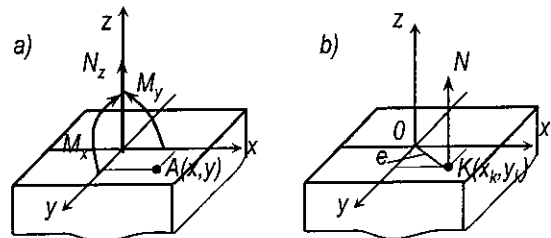
Độ nghiêng của đường trung hòa so với trục  $x$

$$\text{tg}\beta = -\frac{1}{\text{tg}\alpha} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{1}{6,6667} \cdot \frac{3460}{1980} = -2,62. \text{ Suy ra } \beta = -69^{\circ}06'.$$

## 6.2. THANH CHỊU UỐN VÀ KÉO (NÉN) ĐỒNG THỜI – KÉO (NÉN) LỆCH TÂM

Thanh chịu uốn và kéo (nén) đồng thời khi trên tiết diện có các thành phần mômen uốn  $M_x, M_y$  lực dọc  $N_z$  tác dụng đồng thời (hình 6.6a). Trong thực tế thường gặp các kết cấu chịu lực như trên, ví dụ ống khói, tháp cầu treo v. v...

Một dạng đặc biệt của bài toán kéo (nén) đồng thời là bài toán kéo (nén) lệch tâm. Thanh chịu kéo (nén) lệch tâm khi hợp lực của ngoại lực có thể quy về một lực  $N$  có phương song song với trục thanh và không đi qua trọng tâm (hình 6.6b).



Hình 6.6

Khoảng cách  $e$  từ điểm đặt lực  $K(x_k, y_k)$  đến trọng tâm  $O$  gọi là độ lệch tâm. Nếu chuyển lực  $N$  về trọng tâm tiết diện ta sẽ được các thành phần nội lực: lực dọc  $N$ ; mômen uốn  $M_u = Ne$ . Tiếp đó có thể phân tích mômen uốn  $M_u$  thành hai thành phần  $M_x = Ny_k$  và  $M_y = Nx_k$ .

### 6.2.1. Ứng suất pháp trên tiết diện

\* Trường hợp thanh chịu uốn và kéo (nén) đồng thời:

Tại phân tố  $A$  bất kỳ có tọa độ  $x, y$ , ứng suất pháp tương ứng với các mômen uốn  $M_x, M_y$  và lực dọc  $N$  có cùng phương nên theo nguyên lý cộng

tác dụng ta có thể biểu thị ứng suất khi thanh chịu các lực kết hợp dưới dạng tổng đại số như sau:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (6.9)$$

Khi sử dụng công thức (6.9) cần chú ý đến dấu của các đại lượng. Để tránh nhầm lẫn người ta thường dùng công thức kỹ thuật sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N|}{A} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x|. \quad (6.10)$$

Trước mỗi số hạng, lấy dấu cộng hoặc trừ tùy theo các thành phần nội lực gây ra ứng suất kéo hay nén tại điểm đang xét.

\* Trường hợp thanh chịu kéo (nén) lệch tâm:

Áp dụng công thức (6.9) cho bài toán kéo (nén) lệch tâm, ta có:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot y_k}{I_x} y + \frac{N \cdot x_k}{I_y} x.$$

Đặt  $\frac{N}{A}$  làm thừa số chung và ký hiệu:  $i_x^2 = \frac{I_x}{A}$  và  $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$  ta được:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left[ 1 + \frac{y_k \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_k \cdot x}{i_y^2} \right]. \quad (6.11)$$

trong đó:  $i_x$  và  $i_y$  là các bán kính quán tính trung tâm. Lực dọc  $N$  là dương khi thanh chịu kéo; dấu của các tọa độ phụ thuộc hệ tọa độ đã chọn

### 6.2.2. Đường trung hòa

Từ (6.9) ta thấy mặt phẳng ứng suất không đi qua gốc tọa độ (hình 6.7a). Do đó, đường trung hòa là giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với tiết diện không qua trọng tâm của tiết diện.

Vì đường trung hòa là quỹ tích của những điểm có ứng suất pháp bằng không nên từ (6.9) ta có phương trình đường trung hòa như sau:

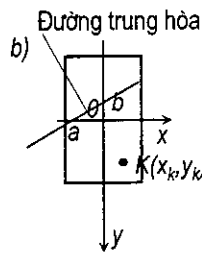
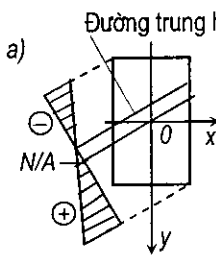
$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0. \quad (6.12)$$

Từ (6.11) với chú ý là  $N/A \neq 0$ , ta cũng có thể biểu thị phương trình đường trung hòa dưới dạng khác như sau:

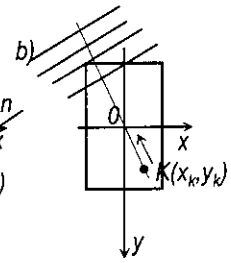
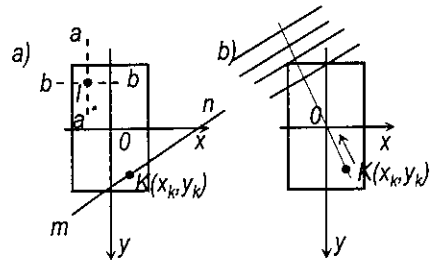
$$1 + \frac{y_k \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_k \cdot x}{i_y^2} = 0.$$

hoặc mô tả gọn hơn như sau:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{với:} \quad a = -\frac{i_y^2}{x_k}; \quad b = -\frac{i_x^2}{y_k}. \quad (6.13)$$



Hình 6.7



Hình 6.8

**Nhận xét:**

- $a, b$  là giao điểm của đường trung hòa với các trục tọa độ  $x, y$ . Giữa  $a, b$  và  $x_k, y_k$  luôn trái dấu nên đường trung hòa không đi qua góc phần tư chứa điểm đặt lực  $K$  (hình 6.7b).
- Vị trí của đường trung hòa chỉ phụ thuộc điểm đặt lực  $x_k, y_k$  và hình dạng kích thước tiết diện mà không phụ thuộc lực  $N$ . Điểm đặt lực  $K$  càng gần trọng tâm thì đường trung hòa càng xa trọng tâm.
- Khi điểm đặt lực nằm trên một trục quán tính thì đường trung hòa song song với trục quán tính thứ hai. Ví dụ, khi  $K$  nằm trên trục  $x$  tức là  $y_k=0$  thì  $b=\infty$ , nên đường trung hòa song song với trục  $y$ .
- Khi điểm đặt lực di chuyển trên một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ thì đường trung hòa tương ứng sẽ quay quanh một điểm cố định nào đó. Thật vậy, nếu điểm đặt lực  $K$  di chuyển trên đường  $mn$ , cắt trục  $x$  và  $y$  tại  $A$  và  $B$  (hình 6.8a) ta có thể phân tích lực  $P$  thành hai lực:  $P_A$  đặt tại  $A$  và  $P_B$  đặt tại  $B$ , Tương ứng với  $P_A$  ta có đường trung hòa  $a-a$  song song với trục  $y$ , tương ứng với  $P_B$  ta có đường trung hòa  $b-b$  song song với trục  $x$ . Tại giao điểm  $I$  của hai đường  $a-a$  và  $b-b$  tất yếu có ứng suất pháp bằng không. Như vậy, khi  $P$  chuyển động trên đường thẳng  $m-n$  không đi qua gốc tọa độ thì đường trung hòa tương ứng sẽ thay đổi vị trí nhưng bao giờ cũng đi qua điểm  $I$ .
- Khi điểm đặt lực di chuyển trên một đường thẳng qua gốc tọa độ thì đường trung hòa tương ứng sẽ dịch chuyển song song với chính nó (hình 6.8b).

Thật vậy, khi  $K$  di chuyển trên đường thẳng qua gốc tọa độ thì ta có điều kiện:  $y_k/x_k = m = const$ , Từ (6.13) ta tìm được độ nghiêng của đường trung hòa:

$$\frac{b}{a} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \frac{x_k}{y_k} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \frac{1}{m} = const$$

Như vậy, độ nghiêng không đổi nên các đường trung hòa song song với nhau.

Cách vẽ biểu đồ ứng suất cũng được thực hiện tương tự như trong bài toán uốn xiên song cân chú ý là ứng suất pháp tại các điểm nằm trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ và song song với trục trung hòa có giá trị bằng  $N/A$  (hình 6.7a).

### 6.2.3. Khái niệm về lõi của tiết diện

Qua phần trên ta nhận thấy: nếu đường trung hòa nằm ngoài hoặc tiếp xúc với tiết diện thì ứng suất trên toàn tiết diện chỉ có một dấu. Trong các công trình xây dựng thường sử dụng các vật liệu chịu nén tốt nhưng chịu kéo kém như gạch, đá, bê tông v.v... Do đó, khi thiết kế cần tính toán độ lệch tâm của điểm đặt lực sao cho trên toàn tiết diện chỉ có ứng suất nén. Muốn vậy, điểm đặt lực  $K$  phải nằm trong một miền xác định bao quanh trọng tâm gọi là *lõi của tiết diện* để đảm bảo đường trung hòa phải nằm ngoài hoặc tiếp xúc với tiết diện.

Từ (6.13) ta thấy nếu cho biết điểm đặt lực  $K$  thì sẽ tìm được vị trí đường trung hòa và ngược lại, nếu cho biết đường trung hòa thì sẽ tìm được vị trí điểm đặt lực tương ứng. Do đó ta có thể xác định lõi của tiết diện theo thứ tự như sau:

- Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện..
- Xác định các bán kính quán tính của tiết diện.
- Vẽ các đường trung hòa tiếp xúc với chu vi của tiết diện (không cắt tiết diện) và xác định các tọa độ  $a_i, b_i$  tương ứng với từng đường trung hòa.
- Xác định các tọa độ  $x_k, y_k$  của điểm đặt lực  $k_i$  tương ứng với từng đường trung hòa.

$$x_{ki} = -\frac{i_y^2}{a_i}; \quad y_{ki} = -\frac{i_x^2}{b_i}. \quad (6.14)$$

- Nối các điểm  $k_i$  sẽ tìm được chu vi của lõi.

*Ví dụ 6.2.* Tìm lõi của tiết diện chữ nhật có kích thước  $b \times h$ ; tiết diện tròn có đường  $R$ ; và của thép hình [20 (hình 6.9c)

\* **Tiết diện chữ nhật** (hình 6.9a):

• Khi đường trung hòa tiếp xúc với cạnh  $AB$ , ta có:  $a_1 = \infty$ ;  $b_1 = -h/2$ .

$$\text{Theo (6.14): } x_{k1} = -\frac{i_y^2}{a_1} = \frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_{k1} = -\frac{i_x^2}{b_1} = \frac{h^2}{12h/2} = \frac{h}{6}.$$

Điểm  $k_1$  nằm trên trục  $y$ , có tung độ bằng  $h/6$  (điểm 1 trên hình 6.9a)

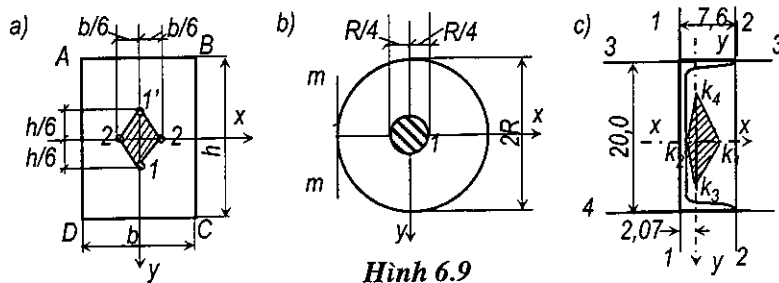
• Khi đường trung hòa tiếp xúc với cạnh  $AD$ , ta có:  $a_2 = -b/2$ ;  $b_2 = \infty$ .

$$\text{Theo (6.14): } x_{k2} = -\frac{i_y^2}{a_2} = \frac{b^2}{12b/2} = \frac{b}{6}; \quad y_{k2} = -\frac{i_x^2}{b_2} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

Điểm  $k_2$  nằm trên trục  $x$ , có hoành độ bằng  $b/6$  (điểm 2 trên hình 6.9a)

• Khi đường trung hòa tiếp xúc với cạnh  $DC$  và  $BC$ : cũng thực hiện tương tự như trên ta tìm được 1' và 2' như trên hình 6.9a.

Nối các điểm 1, 2, 1', 2' ta tìm được lõi của tiết diện có dạng hình thoi.



Hình 6.9

\* **Tiết diện tròn**: (hình 6.9b)

Lõi của tiết diện tròn có dạng đường tròn nên chỉ cần xác định một tọa độ  $x_k$  cho điểm 1. Đường trung hòa tương ứng là tiếp tuyến  $m-m$ . Ta có:

$$x_k = -\frac{i_y^2}{a} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4};$$

\* **Tiết diện hình  $\square$** : (hình 6.9c)

Từ bảng 2 trong Phụ lục, với thép hình  $\square$  20 ta có các kích thước như trên hình 6.9c và các số liệu cần thiết như sau:  $i_x = 8,07$  cm;  $i_y = 2,20$  cm;

• Khi đường trung hòa tiếp xúc với tiết diện theo đường 1-1, ta có:  $a_1 = -2,07$  cm;  $b_1 = \infty$ .

$$\text{Theo (6.14): } x_{k1} = -\frac{i_y^2}{a_1} = \frac{2,20^2}{2,07} = 2,34 \text{ cm}; \quad y_{k2} = -\frac{i_x^2}{b_1} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

- Khi đường trung hòa tiếp xúc với tiết diện theo đường 2-2, ta có:

$$a_2 = 7,60 - 2,07 = 5,53 \text{ cm}; \quad b_2 = \infty.$$

$$\text{Theo (6.14): } x_{k2} = -\frac{i_y^2}{a_2} = -\frac{2,20^2}{5,53} = -0,876 \text{ cm}; \quad y_{k2} = -\frac{i_x^2}{b_2} = -\frac{i_x^2}{\infty} = 0.$$

- Khi đường trung hòa tiếp xúc với tiết diện theo đường 3-3, ta có:

$$a_3 = \infty; \quad b_3 = -10 \text{ cm}.$$

$$\text{Theo (6.14): } x_{k3} = -\frac{i_y^2}{a_3} = \frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_{k3} = -\frac{i_x^2}{b_3} = \frac{8,07^2}{10} = 6,51 \text{ cm}.$$

- Khi đường trung hòa tiếp xúc với tiết diện theo đường 4-4, tương tự như trường hợp trên, ta tìm được:  $x_{k4} = 0; \quad y_{k4} = -6,51 \text{ cm}.$

Nối các điểm tìm được với nhau ta vẽ được lõi của tiết diện, có dạng hình tứ giác (hình 6.9c).

#### 6.2.4. Điều kiện bền

Để kiểm tra độ bền, trước tiên ta cần tìm tiết diện nguy hiểm đó là tiết diện có mômen uốn và lực dọc cùng lớn. Tại đó, khi trên tiết diện ứng suất mang hai dấu khác nhau, ta có điều kiện:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad \sigma_{\min} \leq [\sigma]_n$$

Trường hợp thanh có tiết diện hình chữ nhật, hình I ..., ta có điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k; \quad (6.15)$$

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_n.$$

Số hạng đầu mang dấu cộng khi lực dọc là kéo; mang dấu trừ khi lực dọc là nén;

Trong trường hợp tổng quát, cần xác định vị trí đường trung hòa để từ đó xác định các điểm nguy hiểm để tìm  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ .

Từ các điều kiện bền ta cũng có thể giải ba dạng bài toán tương tự như trong các trường hợp thanh chịu lực đơn giản: bài toán kiểm tra; bài toán thiết kế tiết diện; bài toán xác định tải trọng cho phép.

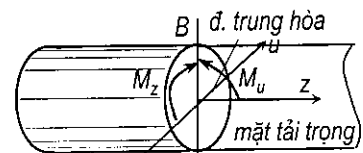
### 6.3. THANH CHỊU UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Thanh chịu uốn và xoắn đồng thời khi trên tiết diện có các thành phần mômen uốn  $M_x, M_y$  và mômen xoắn  $M_z$  tác dụng đồng thời. Ta thường gặp các kết cấu chịu lực như trên trong các chi tiết máy hoặc các nhịp cầu ô tô có bề ngang lớn khi tải trọng không tác dụng đúng tim cầu,

Trong mục này ta chỉ xét bài toán với các tiết diện thường gặp là tiết diện tròn, tiết diện chữ nhật.

#### 6.3.1. Thanh có tiết diện tròn

Như đã biết, đối với thanh tiết diện tròn thì khi chịu uốn xiên ta có thể đưa về bài toán uốn phẳng với mômen uốn  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . Đường trung hòa vuông góc với mặt phẳng tác dụng của  $M_u$ . Điểm xa nhất đối với đường trung hòa nhất là các giao điểm A, B của mặt phẳng tải trọng với chu vi tiết diện (hình 6.10). Tại các điểm đó, ứng suất pháp có giá trị cực trị và được xác định như sau:



Hình 6.10

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u} \quad \text{với} \quad W_u = \frac{\pi R^3}{4}. \quad (6.16)$$

Ngoài ứng suất pháp, trên tiết diện còn có ứng suất tiếp do mômen xoắn  $M_z$  gây ra. Ứng suất tiếp lớn nhất phát sinh trên chu vi tiết diện nên ứng suất tiếp tại các điểm A, B đều có giá trị cực đại. Theo (4.16), ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad \text{với} \quad W_p = \frac{I_p}{R} = 2W_x. \quad (6.17)$$

#### ◆ Điều kiện bền

Ta thấy tại các điểm nguy hiểm trên tiết diện tồn tại song song ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Do đó, khi kiểm tra bền ta cần vận dụng một trong các thuyết bền để xác định ứng suất tương đương:

- theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất [xem 3, 4],

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

hay:

$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \leq [\sigma]. \quad (6.18)$$

- hoặc theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng [xem 3, 4].

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

hay: 
$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4}M_z^2} \leq [\sigma]. \quad (6.19)$$

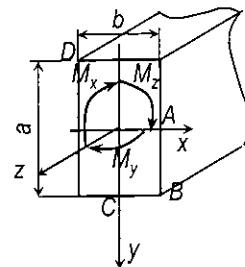
### 6.3.2. Thanh có tiết diện chữ nhật

Giả sử thanh tiết diện chữ nhật chịu lực như trên hình 6.11. Trong trường hợp này, ứng suất pháp có giá trị cực đại tại B, cực tiểu tại D:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Ngoài ra, trên tiết diện còn chịu ứng suất tiếp do mômen xoắn. Giá trị của ứng suất này lớn nhất tại điểm A ở giữa cạnh dài và tương đối lớn tại điểm C ở giữa cạnh ngắn. Theo (4.26) và (4.27):

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2}; \quad \tau_l = \gamma \tau_{\max}$$



Hình 6.11

$\alpha$  và  $\gamma$  các hệ số phụ thuộc tỷ số các cạnh  $a/b$ , tìm được theo bảng 4.1.

Khi kiểm tra bền ta cần thực hiện tại các phân tố sau:

- \* Kiểm tra tại phân tố B và D. Tại B, D chỉ có ứng suất pháp nên ta có điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_k; \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_k \quad (6.20)$$

- \* Kiểm tra tại phân tố A. Tại A có ứng suất pháp và ứng suất tiếp nên ta cần vận dụng một trong các thuyết bền để xác định ứng suất tương đương:

- theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất [xem 3, 4],

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

hay: 
$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{\alpha ab^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (6.21)$$

- hoặc theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng [xem 3, 4].

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



hay: 
$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{\alpha ab^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (6.19)$$

\* Kiểm tra tại phân tố C. Tại A có ứng suất pháp và ứng suất tiếp nên cần áp dụng các thuyết bền để xác định ứng suất tương đương:

- theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất,

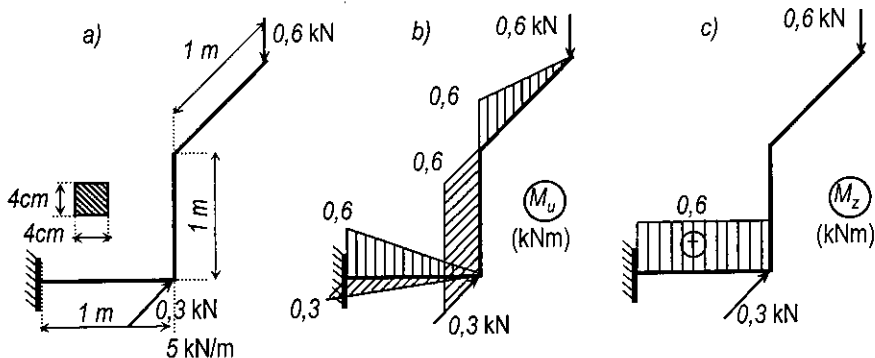
$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_z}{\alpha ab^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (6.22)$$

- hoặc theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_z}{\alpha ab^2}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (6.23)$$

**Ví dụ 6.3.** Cho hệ thanh không gian chịu lực như trên hình 6.12a. Cho biết các thanh có tiết diện như nhau là hình vuông mỗi cạnh 4 cm. Yêu cầu: vẽ các biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn; tìm ứng suất pháp lớn nhất và ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.

Các biểu đồ nội lực cần tìm như trên hình 6.12 b, c. Tiết diện nguy hiểm xảy ra ở ngàm. Tại đó:  $M_x = -0,6$  kNm;  $M_y = -0,3$  kNm;  $M_z = -0,6$  kNm.



**Hình 6.12**

Các đặc trưng hình học:  $I_x = I_y = a^4/12 = 21,3333;$   
 $W_x = W_y = a^3/6 = 10,6667.$

Ứng suất pháp lớn nhất tại điểm góc tiết diện ngàm:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,6 \cdot 10^2}{10,6667} + \frac{0,3 \cdot 10^2}{10,6667} = 8,4375 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất tại trung điểm các cạnh trên và dưới của tiết diện ngang:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,6 \cdot 10^2}{10,6667} = 5,625 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha \cdot a^3} = \frac{0,6 \cdot 10^2}{0,203 \cdot 4^3} = 4,618 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{5,625^2 + 4 \cdot 4,618^2} = 10,81 \text{ kN/cm}^2.$$

## 6.4. THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

Thanh chịu lực tổng quát khi trên tiết diện có đủ sáu thành phần nội lực như trên hình 6.1: lực dọc  $N_z$ ; lực cắt  $Q_y$ ;  $Q_x$ ; các mômen uốn  $M_x$ ;  $M_y$  và mômen xoắn  $M_z$ . Trên thực tế, ảnh hưởng của lực cắt rất nhỏ so với ảnh hưởng của các thành phần nội lực khác nên trong tính toán thường được bỏ qua. Dưới đây chỉ giới thiệu cách phân tích các thanh có tiết diện tròn và tiết diện chữ nhật chịu các thành phần nội lực  $N_z$ ;  $M_x$ ;  $M_y$  và  $M_z$ .

### 6.4.1. Thanh có tiết diện tròn

Như đã phân tích ở trên, thanh tiết diện tròn chỉ chịu uốn đơn với mômen uốn  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ , do đó trên tiết diện chỉ có ba thành phần nội lực  $N_z$ ;  $M_u$  và  $M_z$  (hình 6.13).

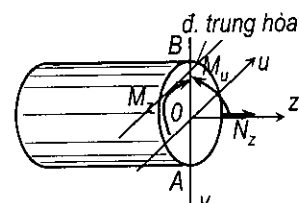
Đường trung hòa là đường thẳng song song với trục  $u$  và có phương trình:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_u}{I_u} v = 0$$

Các phân tố nguy hiểm ở tại điểm A, B có ứng suất:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{W_u} v; \quad \sigma_B = \sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_u}{W_u} v; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

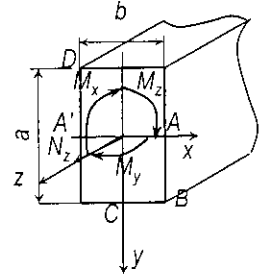
Điều kiện bền và ý nghĩa của các đại lượng trong các công thức trên tương tự như đã trình bày trong mục 6.3.1.



Hình 6.13

### 6.4.2. Thanh có tiết diện chữ nhật

Trong trường hợp này, thanh chịu các thành phần nội lực như trên hình 6.11. Các phân tố nguy hiểm xảy ra tại các điểm sau:



Hình 6.14

- Tại B, phân tố chỉ chịu ứng suất pháp có giá trị cực đại tại B:

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

- Tại A, phân tố chịu ứng suất pháp và ứng suất tiếp như sau:

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha b^2}$$

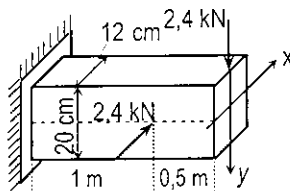
- Tại C, phân tố chịu ứng suất pháp và ứng suất tiếp như sau:

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x}; \quad \tau_C = \gamma \tau_{\max}$$

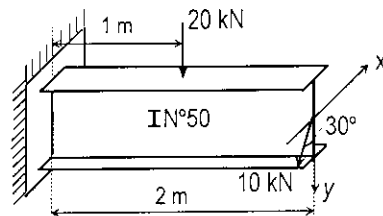
Ý nghĩa của các đại lượng trong các công thức trên như đã trình bày trong mục 6.2.2. Việc kiểm tra điều kiện bền cũng được thực hiện giống như đã trình bày trong mục 6.2.2.

## BÀI TẬP CHƯƠNG VI

**VI.1 – VI.2** [2 và 12]. Cho hệ chịu lực như trên hình tương ứng. Tìm giá trị lớn nhất của ứng suất pháp và vị trí đường trung hòa tại tiết diện nguy hiểm.



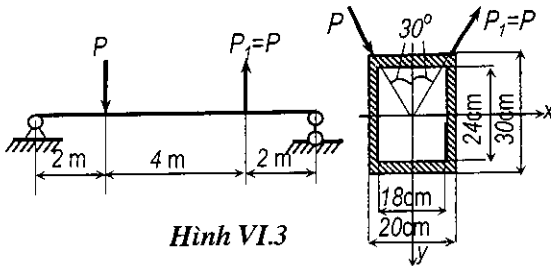
Hình VI.1



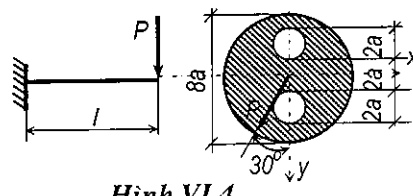
Hình VI.2

**VI.3** [12]. Cho hệ chịu lực như trên hình VI.3. Tìm giá trị cho phép của lực P, và vị trí đường trung hòa tương ứng. Cho biết  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

**VI.4 [12].** Cho hệ chịu lực như trên hình VI.4. Tìm vị trí đường trung hòa tại tiết diện nguy hiểm; xác định tọa độ điểm nguy hiểm trên tiết diện và giá trị cho phép của lực  $P$ .

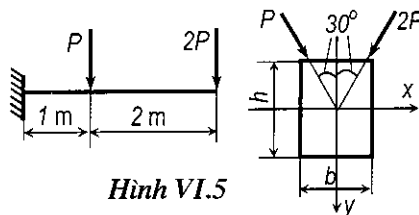


Hình VI.3

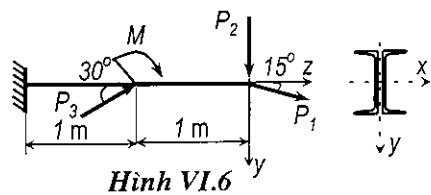


Hình VI.4

**VI.5 [12].** Cho hệ chịu lực như trên hình VI.5. Xác định kích thước của tiết diện chữ nhật. Tìm vị trí đường trung hòa tương ứng tại tiết diện nguy hiểm. Cho biết:  $P = 1,8 \text{ kN}$ ;  $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$ ;  $h = 4b/3$ .

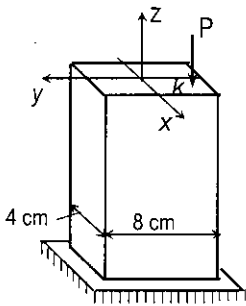


Hình VI.5

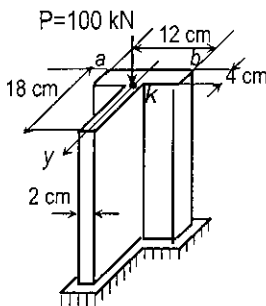


Hình VI.6

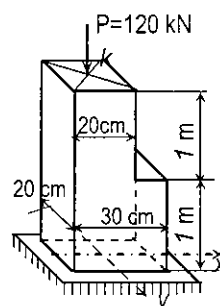
**VI.7 [12].** Cho hệ chịu lực nén  $P = 64 \text{ kN}$ , đặt tại điểm  $k$  với tọa độ  $x_k = 1 \text{ cm}$ ;  $y_k = -2 \text{ cm}$  như trên hình VI.7. Tìm  $\sigma_{\max}$ ;  $\sigma_{\min}$  và vị trí đường trung hòa.



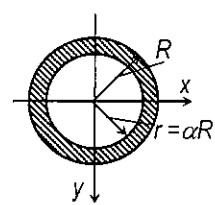
Hình VI.7



Hình VI.8



Hình VI.9



Hình VI.10

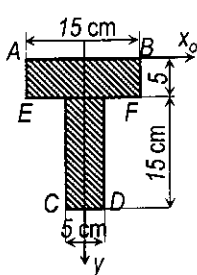
**VI.8 - VI.9.** Cho hệ chịu lực nén  $P$ , đặt tại điểm  $k$  như trên hình VI.8 và VI.9. Tìm  $\sigma_{\max}$ ;  $\sigma_{\min}$  và vị trí đường trung hòa.

**VI.10 - VI.11.** Tìm lõi của các tiết diện: hình tròn rỗng (hình VI.10) và hình chữ T (hình VI.11).

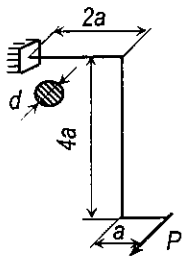
**VI.12** [12]. Cho hệ thanh có tiết diện tròn, chịu lực như trên hình VI.12. Xác định đường kính  $d$  của tiết diện. Cho biết:  $P$ ;  $a$  và  $[\sigma]$ . Khi kiểm tra điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp và ứng suất tiếp đồng thời, vận dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.

**VI.13** [12]. Cho hệ thanh có tiết diện vuông, chịu lực như trên hình VI.13. Xác định chiều dài cạnh  $b$  của tiết diện. Cho biết:  $P$ ;  $a$  và  $[\sigma]$ . Khi kiểm tra điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp và ứng suất tiếp đồng thời, vận dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.

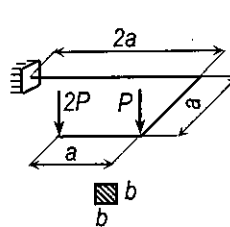
**VI.14** [12]. Cho hệ thanh có tiết diện hình chữ nhật, chịu lực như trên hình VI.14. Xác định kích thước  $a$ ; cho biết:  $P$  và  $[\sigma]$ . Khi kiểm tra điều kiện bền tại điểm có ứng suất pháp và ứng suất tiếp đồng thời, vận dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.



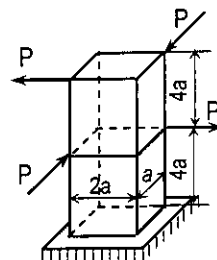
Hình VI.11



Hình VI.12



Hình VI.13



Hình VI.14

# 7

## CÁCH XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH PHẪNG

### 7.1. KHÁI NIỆM CHUNG

#### 7.1.1. Mục đích và giả thiết

Nghiên cứu chuyển vị nhằm phục vụ hai mục đích sau:

- \* Kiểm tra độ cứng của công trình;
- \* Chuẩn bị cơ sở cho việc nghiên cứu các hệ siêu tĩnh.

Khi nghiên cứu chuyển vị của hệ thanh ta thừa nhận các giả thiết sau:

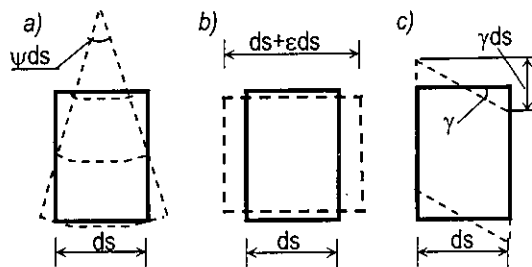
- Tải trọng gây ra chuyển vị là tải trọng tác dụng tĩnh;
- Chuyển vị của hệ nghiên cứu tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

#### 7.1.2. Biến dạng và chuyển vị của một phân tố thanh

*Sự thay đổi hình dạng của công trình dưới tác dụng của nguyên nhân bên ngoài như tải trọng, gọi là biến dạng.* Biến dạng của công trình là do kết quả biến dạng của các phân tố thanh vô cùng bé trong các cấu kiện của công trình hay nói khác đi là do kết quả của sự thay đổi kích thước và hình dạng của các phân tố thanh.

Trong bài toán phẳng, biến dạng của phân tố thanh có chiều dài  $ds$  được phân tích thành ba thành phần:

- ◆ Biến dạng xoay  $\psi ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 7.1a).  $\psi$  là *biến dạng xoay tỷ đối* (góc hợp giữa hai tiết diện nối trên khi phân tố thanh có chiều dài bằng đơn vị).
- ◆ Biến dạng dọc trục  $\varepsilon ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 7.1b).  $\varepsilon$  là *biến dạng dọc trục tỷ đối*.
- ◆ Biến dạng trượt  $\gamma ds$  giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 7.1c).  $\gamma$  là *góc trượt tỷ đối*.



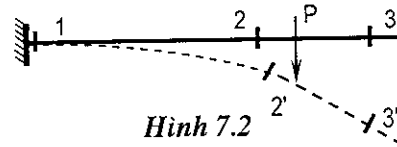
Hình 7.1

Chiều dương của các biến dạng tương ứng với các chiều vẽ trên hình 7.1.

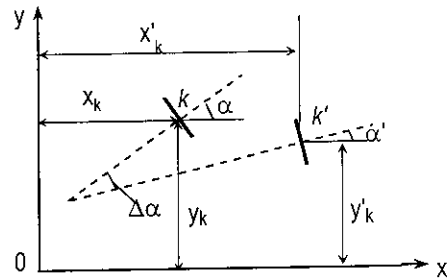
Khi hệ biến dạng, hầu hết các phân tố thanh sẽ có vị trí mới. Sự thay đổi vị trí của phân tố thanh gọi là chuyển vị. Như vậy có thể nói chuyển vị là hệ quả của biến dạng.

Một phân tố thanh trong hệ có thể có ba khả năng (hình 7.2):

- Không chuyển vị nhưng có biến dạng (phần tử 1 ở ngay tại ngàm nên không chuyển vị được nhưng vẫn bị biến dạng vì tại ngàm vẫn có nội lực).
- Có chuyển vị và có biến dạng (phần tử 2).
- Có chuyển vị nhưng không biến dạng (phần tử 3 không bị biến dạng vì tại đó không có nội lực, song vẫn có chuyển vị do hệ quả biến dạng của các phân tố khác).



Hình 7.2



Hình 7.3

### 7.1.3. Chuyển vị của một tiết diện

Trong thực hành thường sử dụng khái niệm chuyển vị của tiết diện.

Giả sử xét một tiết diện  $k$  bất kỳ trong hệ tọa độ  $xOy$  (hình 7.3). Ở vị trí ban đầu, tiết diện được xác định theo các tọa độ  $x_k, y_k$  và góc nghiêng  $\alpha$  của tiếp tuyến tại tiết diện  $k$  so với phương  $x$ . Sau khi hệ biến dạng, tiết diện  $k$  có vị trí mới là  $k'$  và được xác định theo  $x'_k, y'_k, \alpha'$ .

Trong bài toán phẳng, nói chung chuyển vị của tiết diện bao gồm ba thành phần:

- chuyển vị thẳng theo phương  $x$ :  $\Delta x = x'_k - x_k$ ;
- chuyển vị thẳng theo phương  $y$ :  $\Delta y = y'_k - y_k$ ;
- chuyển vị góc:  $\Delta \alpha = \alpha' - \alpha$ .

Ký hiệu chung cho các chuyển vị thẳng cũng như chuyển vị góc là  $\Delta$  mang theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí, phương của chuyển vị còn chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

$\Delta_{km}$  - chuyển vị tương ứng với vị trí và phương  $k$  do nguyên nhân  $m$  gây ra.

Khi nguyên nhân gây ra chuyển vị bằng đơn vị thì ký hiệu là  $\delta$  và gọi là chuyển vị đơn vị, nghĩa là:

$\delta_{km}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương  $k$  do nguyên nhân  $m$  bằng đơn vị gây ra.

#### 7.1.4. Đường đàn hồi

Khi chịu lực, thanh bị biến dạng, trục thanh bị cong. Đường cong biến dạng của trục thanh gọi là đường đàn hồi.

Xét một điểm  $k$  trên trục thanh, gọi  $k_1$  là vị trí của  $k$  sau biến dạng thì đoạn  $kk_1$  là chuyển vị thẳng của  $k$ . Phân tích chuyển vị này thành hai thành phần: thành phần vuông góc với trục thanh  $v$  và thành phần song song với trục thanh  $u$ . Đối với các dầm chịu uốn là chủ yếu, thành phần  $u$  thường rất nhỏ so với thành phần  $v$  nên có thể bỏ qua và xem  $kk_1 \approx v$ . Thành phần chuyển vị  $v$  còn được gọi là độ võng.

#### 7.1.5. Các phương pháp nghiên cứu

Để kiểm tra độ cứng của hệ thanh ta cần nghiên cứu các phương pháp xác định chuyển vị nhằm bảo đảm sao cho chuyển vị lớn nhất không vượt quá một giới hạn quy định nào đó. Có thể thực hiện điều đó theo một trong hai hướng sau:

\* Lập phương trình vi phân của đường đàn hồi, tích phân phương trình vi phân theo một trong các phương pháp sau: phương pháp tích phân trực tiếp; phương pháp thông số ban đầu; phương pháp đồ toán ...

Trong tài liệu này chỉ giới thiệu phương pháp tích phân trực tiếp để tìm đường đàn hồi (xem mục 7.2). Độc giả có thể tìm hiểu các phương pháp khác trong các tài liệu [3, 4, 5].

\* Xác định chuyển vị tại các vị trí cần thiết trong hệ thanh bằng cách vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng để tìm chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi (xem tài liệu [6]) hoặc vận dụng nguyên lý công khả dĩ (còn gọi là nguyên lý công ảo). Trong tài liệu này sẽ giới thiệu phương pháp vận dụng nguyên lý công khả dĩ

Cần lưu ý là việc tìm đường đàn hồi chỉ thích hợp với các bài toán thanh đơn và áp dụng khá phức tạp đối với các bài toán hệ thanh. Trong thực hành, để đạt được hai mục đích nói trên ta không cần tìm đường đàn hồi của hệ thanh mà chỉ cần vận dụng nguyên lý công khả dĩ để lập công thức xác định chuyển vị tại các vị trí xác định trong hệ thanh.



## 7.2. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

### 7.2.1. Phương trình vi phân của đường đàn hồi

Khi nghiên cứu thanh chịu uốn, theo (5.12) ta có sự liên hệ giữa mômen uốn và độ cong  $1/\rho$  của trục thanh:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (7.1)$$

Theo hình học vi phân, độ cong của đường cong phẳng có phương trình  $y = y(z)$  được xác định qua công thức:

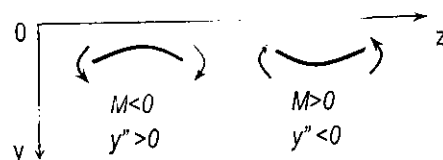
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (7.2)$$

Đối chiếu (7.1) với (7.2), ta có:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EI_x}. \quad (7.3)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi.

Để xác định dấu của vế phải ta cần nhận xét: mẫu số của hai vế trong (7.3) đều dương, do đó, để chọn dấu phù hợp ta cần quan sát hai đoạn thanh chịu uốn trong hệ tọa độ có chiều dương như trên hình (7.4). Với quy ước trục  $y$  hướng xuống là dương ta thấy giữa mômen uốn  $M$  và chiều cong  $y''$  luôn ngược dấu nên cần chọn dấu trừ. Phương trình (7.3) trở thành:



Hình 7.4

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M_x}{EI_x}. \quad (7.4)$$

Trong thực tế, chuyển vị của hệ thanh thường rất nhỏ nên có thể bỏ qua lượng vô cùng bé bậc hai  $y'^2$  so với đơn vị. Khi đó ta có phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x}. \quad (7.5)$$

Tích số  $EI_x$  được gọi là *độ cứng của thanh chịu uốn*.

### 7.2.1. Phương pháp tích phân trực tiếp

Để tìm phương trình đường đàn hồi ta cần tích phân phương trình vi phân (7.5). Đó là phương trình vi phân thường với các hàm có biến số là  $z$ .

Tích phân lần thứ nhất ta được phương trình góc xoay  $\varphi$ :

$$\varphi = y' = \frac{dy}{dz} = - \int \frac{M_x}{EI_x} dz + C \quad (7.6)$$

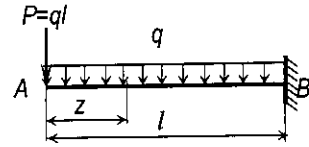
Tích phân lần thứ hai ta được phương trình đường đàn hồi  $y$ :

$$y = \int \left[ - \int \frac{M_x}{EI_x} dz + C \right] dz + D \quad (7.7)$$

Các hằng số tích phân  $C, D$  được xác định theo các điều kiện biên tức là điều kiện liên kết ở hai đầu đoạn khảo sát.

Khi biểu thức của mômen uốn hoặc của độ cứng khác nhau trên nhiều đoạn thanh, chẳng hạn  $n$  đoạn ta cần lấy tích phân trên  $n$  đoạn và phải xác định  $2n$  hằng số tích phân. Khi đó, cách tính khá phức tạp nên cần vận dụng các phương pháp khác.

**Ví dụ 3.1.** Tìm phương trình đường đàn hồi và phương trình góc xoay của dầm chịu tải trọng như trên hình 7.5. Tính độ võng và góc xoay tại A.



Hình 7.5

Biểu thức mômen uốn tại hoành độ  $z$ :  $M_x(z) = - \frac{qz^2}{2} - ql.z$ ;

Phương trình vi phân đường đàn hồi:  $y'' = - \frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{qz^2}{2} + ql.z \right]$

Tích phân liên tiếp hai lần ta được:  $y' = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{qz^3}{6} + \frac{ql.z^2}{2} \right] + C$ ;

$$y = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{qz^4}{24} + \frac{ql.z^3}{6} \right] + Cz + D$$

Điều kiện biên tại đầu ngàm B: khi  $z = l$ :  $y = y' = 0$ .

$$y'(l) = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{ql^3}{6} + \frac{ql^3}{2} \right] + C = 0; \quad \text{suy ra:} \quad C = - \frac{2ql^3}{3EI_x}$$

$$y(l) = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{ql^4}{24} + \frac{ql^4}{6} \right] - \frac{2ql^4}{3EI_x} + D = 0; \quad \text{suy ra:} \quad D = + \frac{11ql^4}{24EI_x}$$

Phương trình đường đàn hồi và phương trình góc xoay:

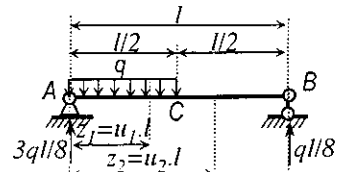
$$y = \frac{ql^4}{24EI_x} \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^4 + 4 \left( \frac{z}{l} \right)^3 - 16 \left( \frac{z}{l} \right) + 11 \right]$$

$$y' = \frac{ql^3}{6EI_x} \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^3 + 3 \left( \frac{z}{l} \right)^2 - 4 \right].$$

Độ võng và góc xoay tại A:  $y_A = y(0) = \frac{11ql^4}{24EI_x}$ ;  $\varphi_A = y'(0) = -\frac{2ql^3}{3EI_x}$ .

Ví dụ 3.2. Tìm phương trình đường đàn hồi và phương trình góc xoay của dầm chịu tải trọng như trên hình 7.6. Tính độ võng tại A và độ võng lớn nhất.

Bài toán gồm hai đoạn cần khảo sát: đoạn AC mang chỉ số 1; đoạn CB mang chỉ số 2. Để trình bày được gọn nhẹ, ta thay các biến  $z$  bằng biến không thứ nguyên  $u$ :



Hình 7.6

$$u_1 = z_1 / l; \quad u_2 = z_2 / l$$

với chú ý là khi sử dụng các công thức (7.6), (7.7), cần thay  $dz_1 = l \cdot du_1$ ;  $dz_2 = l \cdot du_2$ . Sử dụng các công thức (7.6), (7.7) ta lập được các phương trình như trong bảng 7.1.

Bảng 7.1

Đoạn AC: ( $0 \leq u_1 \leq 0,5$ )	Đoạn CB: ( $0,5 \leq u_2 \leq 1$ )
Biểu thức mômen uốn:	
$M_1(u_1) = -\frac{ql^2}{2}u_1^2 + \frac{3ql^2}{8}u_1$ ;	$M_2(u_2) = \frac{ql^2}{8}(1 - u_2l)$ ;
Phương trình vi phân:	
$y_1'' = \frac{ql^2}{2EI} \left[ u_1^2 - \frac{3}{4}u_1 \right]$	$y_2'' = \frac{ql^2}{8EI} [u_2 - 1]$
Phương trình góc xoay:	
$y_1' = \frac{ql^3}{2EI} \left[ \frac{u_1^3}{3} - \frac{3u_1^2}{8} \right] + C_1$	$y_2' = \frac{ql^3}{8EI} \left[ \frac{u_2^2}{2} - u_2 \right] + C_2$
Phương trình độ võng:	
$y_1 = \frac{ql^4}{2EI} \left[ \frac{u_1^4}{12} - \frac{u_1^3}{8} \right] + C_1lu_1 + D_1$	$y_2 = \frac{ql^4}{8EI} \left[ \frac{u_2^3}{6} - \frac{u_2^2}{2} \right] + C_2lu_2 + D_2$

Điều kiện biên:

1) Tại  $u_i = 0$ , ta có  $y_i = D_i = 0$ . (a)

2) Tại  $u_2=1$ , ta có  $y_2 = -\frac{ql^4}{24EI} + C_2l + D_2 = 0$ . (b)

3) Tại  $u_1=u_2=0,5$ , ta có:  $y_1=y_2$  suy ra:

$$-\frac{ql^4}{192EI} + \frac{1}{2}C_1l = -\frac{5ql^4}{384EI} + \frac{1}{2}C_2l + D_2.$$

hay:  $C_1l - C_2l - 2D_2 + \frac{ql^4}{64EI} = 0$ . (c)

4) Tại  $u_1=u_2=0,5$ , ta có:  $y_1' = y_2'$  suy ra:  $-\frac{5ql^3}{492EI} + C_1 = -\frac{3ql^3}{64EI} + C_2$ .

hay:  $C_1 - C_2 + \frac{ql^3}{48EI} = 0$ . (d)

Kết quả giải các phương trình (a); (b); (c); (d):

$$C_1 = \frac{3ql^3}{128EI}; \quad C_2 = \frac{17ql^3}{384EI}; \quad D_1 = 0; \quad D_2 = -\frac{ql^4}{384EI}.$$

Như vậy, ta lập được các phương trình cần tìm như trong bảng 7.2.

**Bảng 7.2**

Đoạn AC: ( $0 \leq u_1 \leq 0,5$ )	Đoạn CB: ( $0,5 \leq u_2 \leq 1$ )
Phương trình góc xoay:	
$y_1' = \frac{ql^3}{384EI} [64u_1^3 - 72u_1^2 + 9]$	$y_2' = \frac{ql^3}{384EI} [24u_2^2 - 48u_2 + 17]$
Phương trình độ võng:	
$y_1 = \frac{ql^4}{384EI} [16u_1^4 - 24u_1^3 + 9u_1]$	$y_2 = \frac{ql^4}{384EI} [8u_2^3 - 24u_2^2 + 17u_2 - 1]$

Độ võng tại C: thay  $u_1 = u_2 = 0,5$  vào phương trình  $y_1$  hoặc  $y_2$ , ta được:

$$y_C = \frac{5ql^4}{768EI}.$$

Độ võng cực đại xảy ra tại tiết diện có góc xoay bằng không trên đoạn AC. Gọi  $u_0$  là vị trí có  $y_1'$  bằng không, ta có:

$$y_1'(u_0) = \frac{ql^3}{384EI} [64u_0^3 - 72u_0^2 + 9] = 0 \quad (e)$$

Nghiệm thích hợp của phương trình bậc ba (e):  $u_0 = 0,4598$ .

Sau khi thay giá trị  $u_o$  vào phương trình  $y_I$  ta được:  $y_{max} = 0,00656 \frac{ql^4}{EI}$ .

### 7.3. CÔNG KHẢ DĨ (CÔNG ẢO) CỦA NGOẠI LỰC VÀ NỘI LỰC

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách xác định chuyển vị khi hệ chịu tải trọng và sự thay đổi nhiệt độ theo khái niệm công khả dĩ.

#### 7.3.1. Định nghĩa công khả dĩ (công ảo)

*Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra.*

Chuyển vị và biến dạng vô cùng bé đó phải phù hợp với các điều kiện liên kết ngoại cũng như liên kết nội của hệ, tức là thỏa mãn điều kiện động học và được gọi là *chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ*.

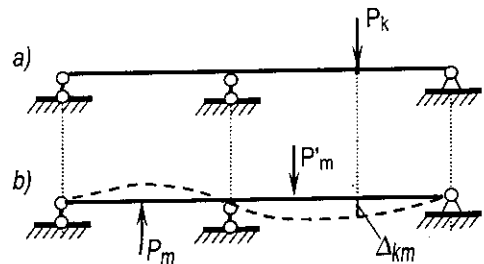
Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng có thể là tải trọng. Nếu nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh ra công thì công đó gọi là *công thực*. Để thấy rõ định nghĩa về công khả dĩ, ta xét một hệ ở hai trạng thái (hình 7.7):

- ◆ Trạng thái thứ nhất gọi là trạng thái "k" chịu lực  $P_k$  (hình 7.7a).
- ◆ Trạng thái thứ hai gọi là trạng thái "m" chịu các nguyên nhân "m".
- Nguyên nhân "m" trên hình 7.7b là các tải trọng  $P_m$ .

Chuyển vị và biến dạng đàn hồi ở trạng thái "m" là nhỏ và tự động thỏa mãn điều kiện động học nên được xem là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

Gọi  $\Delta_{km}$  là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực  $P_k$  (có vị trí và phương tương ứng với lực  $P_k$ ) do các nguyên nhân "m" gây ra.

Tích số  $P_k \cdot \Delta_{km}$  là công khả dĩ của lực  $P_k$  trên chuyển vị tương ứng do các nguyên nhân "m" gây ra. Ký hiệu  $T_{km}$  là công khả dĩ của lực ở trạng thái k sinh ra trên chuyển vị tương ứng ở trạng thái m. Ta có:



Hình 7.7

$$T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km} \quad (7.8)$$

Khái niệm công khả dĩ là một khái niệm mở rộng, trừu tượng, giúp ta dễ dàng xác định được chuyển vị có vị trí và phương bất kỳ do mọi nguyên nhân gây ra.

### 7.3.2. Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý công ảo) áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833)

Trong cơ học cơ sở ta đã biết nội dung nguyên lý công khả dĩ của Lagrange:

*Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé (tức là những chuyển dời mà các liên kết cho phép) phải bằng không*

$$T_{km} = 0. \quad (7.9)$$

Công thức (7.9) biểu thị điều kiện công khả dĩ của các ngoại lực bằng không.

Trong trường hợp hệ biến dạng đàn hồi, theo S. D. Poisson ngoài công khả dĩ của các ngoại lực còn phải xét đến công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ. Do đó, có thể phát biểu nguyên lý như sau:

*Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ  $T_{km}$  của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực  $A_{km}$  trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không*

$$T_{km} + A_{km} = 0, \quad \text{hay} \quad T_{km} = -A_{km}. \quad (7.10)$$

### 7.3.3. Công khả dĩ của ngoại lực

Theo khái niệm công khả dĩ trình bày ở trên ta có thể phát biểu định nghĩa mở rộng cho trường hợp nhiều lực như sau:

*Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái  $k$  trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái  $m$  bằng tổng các tích số giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái  $k$  với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái  $m$*

$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \Delta_{km}. \quad (7.11)$$

### 7.3.4. Công khả dĩ của nội lực

Để xác định công khả dĩ của nội lực cho toàn hệ, trước tiên ta tính công khả dĩ của một phần tử thanh có chiều dài  $ds$ , chiều cao là chiều cao của tiết diện.

\* Ở trạng thái "k" ta tách một phân tố thanh có chiều dài  $ds$ . Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng tại các mặt cắt đầu trái và đầu phải của phân tố thanh có các lực  $M_k, N_k, Q_k$  tác dụng. Các lực này là ngoại lực đối với phân tố thanh đang xét, nhưng là nội lực đối với toàn hệ ở trạng thái "k" do nguyên nhân  $k$  gây ra (hình 7.8a).

\* Ở trạng thái "m" tại vị trí tương ứng ta cũng tách phân tố thanh có chiều dài  $ds$ . ở trạng thái này phân tố thanh  $ds$  có thể có những biến dạng sau:

- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh bị xoay tạo thành góc  $\psi_m ds$  (hình 7.8b).
- Phân tố thanh bị dãn dài dọc trục một đoạn  $\varepsilon_m ds$  (hình 7.8c).
- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh bị trượt một góc  $\gamma_m ds$  (hình 7.8d).

Theo (7.11), công khả dĩ phân tố của các lực ở trạng thái  $k$  trên biến dạng ở trạng thái  $m$  như sau:

$$\begin{aligned} dT_{km} &= 2M_k \frac{\psi_m ds}{2} + 2N_k \frac{\varepsilon_m ds}{2} + 2Q_k \frac{\gamma_m ds}{2} = \\ &= M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m ds. \end{aligned}$$

Theo (7.10), ta có:

$$dA_{km} = -dT_{km} = -[M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m ds].$$

Công của nội lực trên toàn hệ:

$$A_{km} = \int dA_{km} = -\left[ \sum \int M_k \psi_m ds + \sum \int N_k \varepsilon_m ds + \sum \int Q_k \gamma_m ds \right]. \quad (7.12)$$

Các tích phân trong công thức trên là tích phân định hạn, cần lấy tích phân trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục rồi cộng lại. Dấu tổng áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ.

Để dễ dàng áp dụng ta cần biểu thị các biến dạng theo các nguyên nhân gây ra như sau:

### 1. Biến dạng do các nội lực $M_m, N_m, Q_m$

♦ Tìm  $d\psi_m$ :

Gọi  $\rho$  là bán kính cong của phân tố thanh bị uốn, từ hình (7.8b), ta thấy:

$$\psi_m ds = \frac{l}{\rho} ds \quad \text{hay} \quad \frac{l}{\rho} = \psi_m. \quad (a)$$

Khi nghiên cứu bài toán uốn thuần túy của thanh thẳng ta đã biết:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_m}{EI}, \quad (b)$$

với:  $E$  – môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén của vật liệu;

$I$  – mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện thanh.

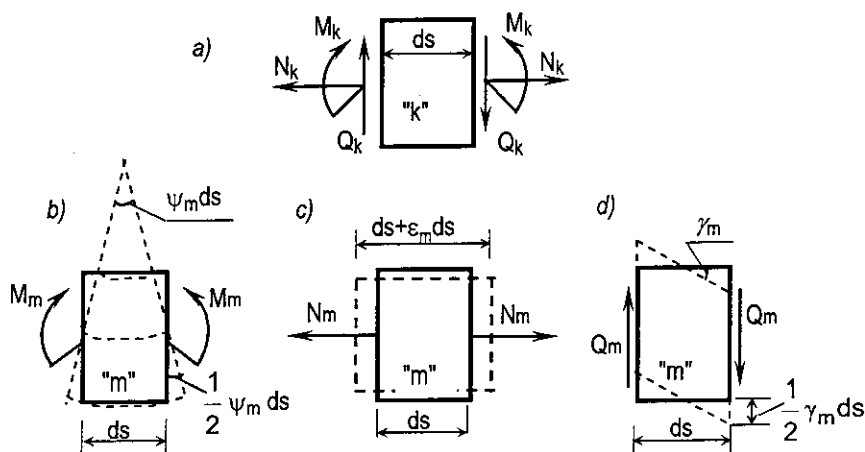
So sánh (a) với (b), ta được:  $\psi_m = \frac{M_m}{EI}$ . (7.13)

♦ Tìm  $\varepsilon_m$ :

Theo định luật Hooke khi kéo hoặc nén:  $\varepsilon_m ds = \frac{N_m}{EA} ds$ ,

với  $A$  – diện tích của tiết diện thanh.

Vậy  $\varepsilon_m = \frac{N_m}{EA}$ . (7.14)



Hình 7.8

♦ Tìm  $\gamma_m$ :

Ở trạng thái “ $m$ ”, dưới tác dụng của lực cắt, các tiết diện trượt so với nhau theo một góc  $\gamma_m^{tb}$ . Vì ứng suất tiếp do  $Q$  gây ra biến đổi không đều theo chiều cao của tiết diện nên góc trượt cũng phân bố không đều theo chiều cao, do đó ta dùng giá trị trung bình  $\gamma_m^{tb}$ .

Để xác định  $\gamma_m^{tb}$  ta áp dụng định luật Hooke khi biến dạng trượt:

$$\gamma_m^{tb} = \frac{\tau_m^{tb}}{G} = \frac{1}{G} \nu \frac{Q_m}{A}, \quad (7.15)$$



$G$  – môđun đàn hồi khi trượt;

$\nu$  – hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số này chỉ phụ thuộc hình dạng của tiết diện, có giá trị được xác định như sau:

- Với tiết diện chữ nhật  $\nu = 1,2$ .
- Với tiết diện tròn  $\nu = 32 / 27 \approx 1,18$ .
- Với tiết diện hình ống mỏng  $\nu = 2$ .
- Với tiết diện chữ I  $\nu = A / A_b$ .

trong đó:  $A$  - diện tích của toàn bộ tiết diện;

$A_b$  - diện tích của bản bụng.

## 2. Biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ

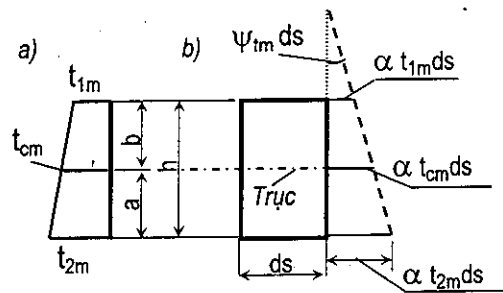
Gọi  $t_{1m}$  và  $t_{2m}$  là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh. Nếu chấp nhận quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao tiết diện là luật bậc nhất thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng đường thẳng như trên hình 7.9a.

Từ đó ta dễ dàng xác định được độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu  $a = b = h/2$ ; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$



Hình 7.9

Để lập các công thức ta giả thiết  $t_{1m} > 0$  và  $t_{2m} > t_{1m}$ ; tiết diện 1-1 ở đầu trái của phần tử thanh là cố định.

Gọi  $\alpha$  là hệ số dẫn nở dài vì nhiệt của vật liệu ta có: thớ trên của phần tử thanh sẽ dẫn dài bằng  $\alpha t_{1m} ds$ , trục phần tử thanh (thớ trung hòa) sẽ dẫn dài là  $\alpha t_{cm} ds$  và thớ dưới phần tử thanh sẽ dẫn dài là  $\alpha t_{2m} ds$  (hình 7.9b). Như vậy phần tử thanh có hai thành phần biến dạng vì nhiệt:

- Biến dạng dài dọc theo trục do nhiệt độ  $t_{cm}$  gây ra:

$$\epsilon_{tm} ds = \alpha t_{cm} ds. \quad (7.16)$$

- Biến dạng xoay giữa hai tiết diện đầu trái và đầu phải:

$$\psi_{tm} ds = \frac{\alpha t_{2m} ds - \alpha t_{1m} ds}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds. \quad (7.17)$$

Thay các biểu thức (7.13) ÷ (7.17) vào (7.12) ta được:

$$A_{km} = - \left[ \sum \int M_k \frac{M_m}{EI} ds + \sum \int N_k \frac{N_m}{EA} ds + \sum \int Q_k \frac{Q_m}{GA} ds + \right. \\ \left. + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds \right] \quad (7.18)$$

### 7.3.5. Công thức công khả dĩ

Thay (7.11) và (7.18) vào (7.10), ta có:

$$\sum_i P_{ik} \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \\ + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds. \quad (7.19)$$

Công thức (7.19) biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của các ngoại lực tác dụng trên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

Dưới đây ta sẽ vận dụng công thức này để thiết lập công thức chuyển vị.

**Chú thích:**

- ◆ Công thức này được áp dụng cho các hệ đàn hồi tuyến tính gồm những thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ. Thanh cong được xem là có độ cong nhỏ khi  $h/r \leq 1/5$  trong đó  $h$  là chiều cao tiết diện;  $r$  là bán kính cong bé nhất của trục thanh ở trạng thái ban đầu..
- ◆ Dấu tích phân trong công thức trên cần hiểu là tích phân định hạn, cần lấy tích phân trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng ở vế phải áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ. Dấu tổng ở vế trái lấy theo số lực ở trạng thái "k".

## 7.4. CÁC ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ TRONG HỆ ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

Ta sẽ chứng minh ba định lý tương hỗ để phục vụ cho việc nghiên cứu các nội dung sau này.

### 7.4.1. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực (E. Betti, 1872)

Xét hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái: ở trạng thái "m" hệ chỉ chịu các ngoại lực  $P_{jm}$ ; ở trạng thái "k" hệ chỉ chịu các ngoại lực  $P_{ik}$ . Theo công thức công khả dĩ (7.19) ta có:

- ◆ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "m" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$\sum_j P_{jm} \Delta_{mk} = \sum \int \frac{M_m M_k}{EI} ds + \sum \int \frac{N_m N_k}{EA} ds + \sum \int v \frac{Q_m Q_k}{GA} ds. \quad (a)$$

- ◆ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$\sum_i P_{ik} \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int v \frac{Q_k Q_m}{GA} ds. \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta có:

$$\sum_j P_{jm} \Delta_{mk} = \sum_i P_{ik} \Delta_{km}. \quad (7.20)$$

Như vậy, trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k" tương hỗ bằng công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

Cần hiểu khái niệm tương hỗ như sau:

- ◆ Hai trạng thái "m" và "k" phải xảy ra trên cùng một hệ.
- ◆ Chuyển dời ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với vị trí và phương của lực ở trạng thái kia.

Ví dụ đối với hệ cho trên hình 7.10:

- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "m" trên những chuyển dời ở trạng thái "k" là  $-R\Delta_R + M\varphi_M$ .
- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "k" trên những chuyển dời ở trạng thái "m" là  $P\Delta_P$ .

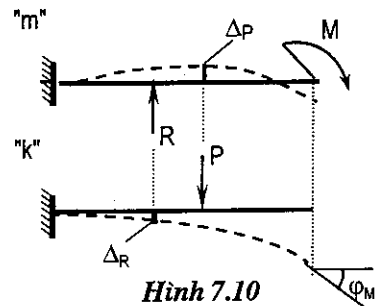
Theo định lý E. Betti, ta có:

$$-R\Delta_R + M\varphi_M = P\Delta_P.$$

Dưới đây ta sẽ vận dụng định lý E. Betti để chứng minh các định lý khác.

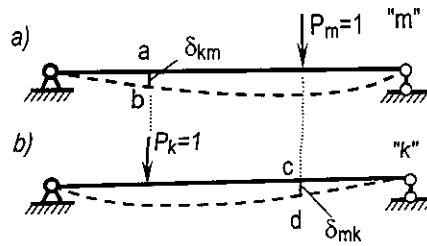
#### 7.4.2. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị (J. Maxwell, 1863)

Xét hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (hình 7.11):



Hình 7.10

◆ Trạng thái "m": hệ chỉ chịu một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung)  $P_m = 1$ . Gọi  $\delta_{km}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do  $P_m = 1$  gây ra.



Hình 7.11

◆ Trạng thái "k": hệ chỉ chịu một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung)  $P_k = 1$ . Gọi  $\delta_{mk}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do  $P_k = 1$  gây ra.

Theo định lý Betti ta có:  $1 \cdot \delta_{mk} = 1 \cdot \delta_{km}$

Suy ra:

$$\delta_{mk} = \delta_{km} \quad (7.21)$$

Quy ước gọi:

$\delta_{mk}$  – chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  gây ra.

$\delta_{km}$  – chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  gây ra.

Cần hiểu chuyển vị đơn vị là chuyển vị do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra, không phải bản thân nó bằng đơn vị.

Như vậy ta có thể phát biểu:

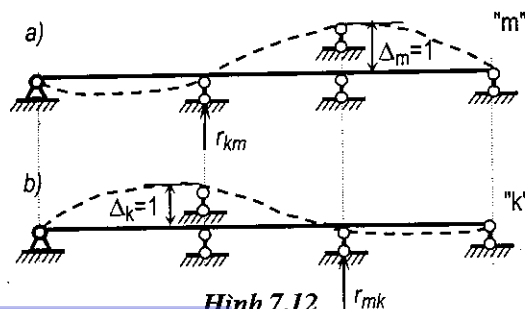
Trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  gây ra.

Định lý này được áp dụng trong phương pháp lực khi tính hệ siêu tĩnh.

### 7.4.3. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị (L. Rayleigh, 1875)

Xét hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (hình 7.12):

◆ Trạng thái "m": chỉ có một liên kết  $m$  của hệ chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_m = 1$ . Gọi  $r_{km}$  là phản lực tại liên kết  $k$  do chuyển vị  $\Delta_m = 1$  gây ra.



Hình 7.12

◆ Trạng thái "k": chỉ có một liên kết  $k$  của hệ chuyển vị

cưỡng bức  $\Delta_k = l$ . Gọi  $r_{mk}$  là phản lực tại liên kết  $m$  do chuyển vị  $\Delta_k = l$  gây ra.

Theo định lý Betti ta có:  $l \cdot r_{mk} = l \cdot r_{km}$

Suy ra:

$$r_{mk} = r_{km} \quad (7.22)$$

Quy ước gọi:

$r_{mk}$  – phản lực đơn vị tại liên kết  $m$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $k$  gây ra

$r_{km}$  – phản lực đơn vị tại liên kết  $k$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  gây ra.

Cần hiểu phản lực đơn vị là phản lực do nguyên nhân chuyển vị bằng đơn vị gây ra, không phải bản thân nó bằng đơn vị.

Như vậy ta có thể phát biểu:

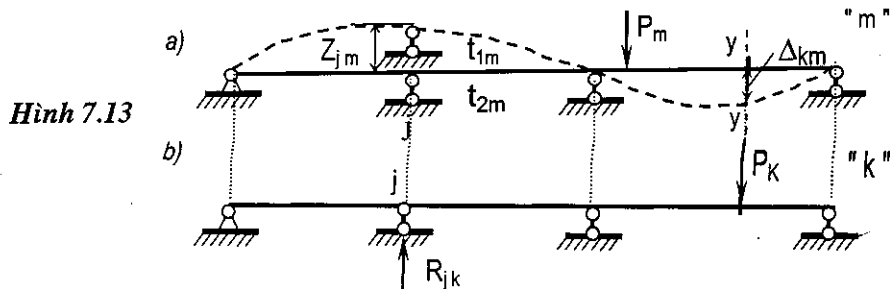
*Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết  $m$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $k$  gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết  $k$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  gây ra.*

Định lý này được áp dụng trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ siêu tĩnh.

## 7.5. CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH (CÔNG THỨC MAXWELL-MORH, 1874)

Ta áp dụng công thức công khả dĩ (7.19) để thiết lập công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính.

Xét hệ thanh bất kỳ (tĩnh định hoặc siêu tĩnh), chịu tác dụng đồng thời của các nguyên nhân sau: tải trọng  $P_m$ ; chuyển vị cưỡng bức  $Z_m$  tại các liên kết tựa; sự thay đổi nhiệt độ  $t_{2m}, t_{1m}$ . Gọi trạng thái này của hệ là trạng thái thực "m". Hệ bị biến dạng theo đường đứt nét như trên hình 7.13a.



Yêu cầu xác định chuyển vị tại tiết diện  $k$  bất kỳ trên hệ. Tại tiết diện  $k$  có thể có chuyển vị thẳng được phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ và chuyển vị xoay, được ký hiệu chung là  $\Delta_{km}$ . Giả định cần tìm thành phần chuyển vị thẳng theo phương  $y-y$ .

Để thực hiện yêu cầu trên ta tưởng tượng tạo ra trên hệ đã cho một trạng thái khả dĩ (còn gọi là trạng thái giả tạo) " $k$ " trong đó đặt lực  $P_k$  sao cho lực này sinh công khả dĩ trên chuyển vị  $\Delta_{km}$  cần tìm, nghĩa là:

- ◆ Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó theo phương  $y$  thì ở trạng thái khả dĩ " $k$ " ta cần đặt lực  $P_k$  dưới dạng một lực tập trung tại tiết diện đó, theo phương  $y$  có chiều chọn tùy ý.
- ◆ Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay tại một tiết diện nào đó thì ở trạng thái khả dĩ " $k$ " ta cần đặt lực  $P_k$  dưới dạng một mômen tập trung tại tiết diện đó, có chiều chọn tùy ý.

Trên hình 7.13b là trạng thái khả dĩ " $k$ " khi tìm thành phần chuyển vị thẳng tại  $k$  theo phương  $y-y$ .

Áp dụng công thức công khả dĩ của ngoại lực và nội lực ở trạng thái " $k$ " trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ ở trạng thái " $m$ " ta có:

$$P_k \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds.$$

Chia cả hai vế của biểu thức này cho  $P_k$  đồng thời ký hiệu:

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k}; \quad \bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k}; \quad \bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}; \quad \bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k},$$

trong đó:

$\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$  - nội lực do lực  $P_k = 1$  gây ra trong hệ ở trạng thái " $k$ ";

$\bar{R}_{jk}$  - phản lực tại liên kết thứ  $j$  do lực  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái " $k$ ".

Ta được công thức xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds + \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds. \quad (7.23)$$



**Khi sử dụng công thức cần chú ý:**

- 1) Chiều của  $P_k = 1$  có thể chọn tùy ý. Nếu kết quả của chuyển vị tìm được mang dấu dương thì chuyển vị cần tìm hướng theo chiều  $P_k = 1$  đã chọn. Nếu kết quả mang dấu âm thì ngược lại.
- 2)  $Z_{jm}$  - chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $j$  ở trạng thái "m"  
 $\bar{R}_{jk}$  - phản lực tại liên kết thứ  $j$  do  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".  
Tích  $\bar{R}_{jk}Z_{jm}$  dương khi  $\bar{R}_{jk}$  cùng chiều với  $Z_{jm}$ .  
Dấu tổng của số hạng thứ nhất lấy theo  $j$ , tức là theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.
- 3)  $M_m, N_m, Q_m$  - các biểu thức nội lực trong hệ ở trạng thái "m";  
 $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$  - các biểu thức của nội lực trong hệ do  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".  
Trong các số hạng từ thứ hai đến thứ sáu, các tích phân là định hạn, lấy theo từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh đã lấy tích phân.
- 4) Công thức này dùng để tính chuyển vị trong hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh nếu biết được nội lực trong hệ ở trạng thái  $m$  và  $k$ .
- 5) Công thức (7.23) chỉ áp dụng cho trường hợp hệ gồm những thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ (xem 7.3.5).

## 7.6. CÁCH VẬN DỤNG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ

Trong thực tế thường ít gặp trường hợp phải vận dụng toàn bộ công thức tổng quát của chuyển vị. Tùy theo từng trường hợp cụ thể chỉ cần vận dụng một vài số hạng của công thức. Dưới đây ta sẽ xét một số trường hợp cụ thể thường gặp.

### 7.6.1. Trường hợp hệ dầm và khung chịu tải trọng

Kinh nghiệm tính toán các hệ dầm và khung cho ta thấy phần ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt thể hiện qua lực dọc và lực cắt đối với các chuyển vị thường nhỏ hơn rất nhiều so với phần ảnh hưởng của biến dạng uốn thể hiện qua mômen uốn, do đó thường có thể bỏ qua được. Lúc này công thức chuyển vị có dạng:

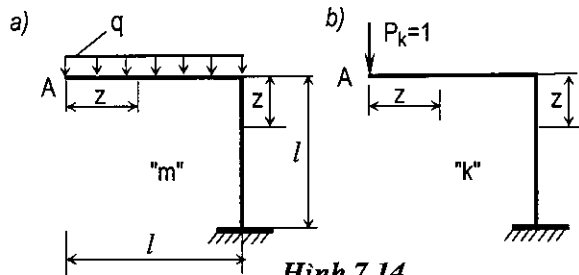
$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds. \quad (7.24)$$

**Ví dụ 7.3.** [6] Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A của khung chịu tải trọng như trên hình 7.14. Tiết diện của các thanh ngang và đứng không đổi và có dạng hình chữ nhật với kích thước là  $b \times h$ .

Để thấy rõ ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn, trong ví dụ này ta tính chuyển vị có xét tất cả các phần ảnh hưởng. Ta có:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int \nu \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds.$$

Trạng thái "m" là trạng thái thực trên hình 7.14a. Theo yêu cầu của bài toán, ở trạng thái "k" ta đặt lực  $P_k=1$  tại A và có phương thẳng đứng (chiều chọn tùy ý, ở đây hướng xuống dưới, hình 7.14b). Các nội lực ở trạng thái "m" và "k":



Hình 7.14

- Trong thanh ngang:  $M_m = -\frac{qz^2}{2}$ ;  $N_m = 0$ ;  $Q_m = -qz$ ;  
 $\bar{M}_k = -1 \cdot z$ ;  $\bar{N}_k = 0$ ;  $\bar{Q}_k = -1$ .
- Trong thanh đứng:  $M_m = -\frac{ql^2}{2}$ ;  $N_m = -ql$ ;  $Q_m = 0$ ;  
 $\bar{M}_k = -1 \cdot l$ ;  $\bar{N}_k = -1$ ;  $\bar{Q}_k = 0$ .

Thay các đại lượng này vào công thức chuyển vị, ta được:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} &= \int_0^l (-z) \left( -\frac{qz^2}{2} \right) \frac{dz}{EI} + \int_0^l (-l) \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \frac{dz}{EI} + \int_0^l (-1)(-ql) \frac{dz}{EA} + \\ &+ \int_0^l \nu (-1)(-qz) \frac{dz}{GA} = \frac{5ql^4}{8EI} \left[ 1 + \frac{8I}{5l^2 A} + \nu \frac{4EI}{5l^2 GA} \right] = \frac{5ql^4}{8EI} (1 + \eta), \end{aligned}$$

trong đó  $\eta$  là hệ số kể đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn.

Vì tiết diện là hình chữ nhật nên  $\nu = 1,2$  và  $\frac{I}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$ .



Ngoài ra ta có liên hệ:  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , với  $\mu$  là hệ số biến dạng ngang

Poisson. Do đó:

$$\eta = \frac{8}{5} \frac{h^2}{12l^2} + \frac{4}{5} 1,2 \frac{h^2}{12l^2} 2(1+\mu) = \frac{2}{15} [1 + 1,2(1+\mu)] \frac{h^2}{l^2}.$$

Ta thấy trị số  $\eta$  được dùng để đánh giá ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt phụ thuộc tỷ số  $h/l$ . Nếu  $l \gg h$  thì  $\eta \approx 0$  tức là ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt không đáng kể.

Nếu cho  $l = 4h$  và  $\mu = 1/3$  thì:

$$\eta = \frac{2}{15} \left[ 1 + 1,2 \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \right] \frac{1}{16} \approx 0,022 = 2,2 \%.$$

Ta thấy trong trường hợp này, ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn là nhỏ, không đáng kể và có thể bỏ qua được.

**Ví dụ 7.4.** [6] Xác định chuyển vị ngang tại đầu tự do của dầm cong trên hình 7.15a. Cho biết  $EI = const$ .

Vì bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt nên ta có thể xác định chuyển vị theo công thức (7.24).

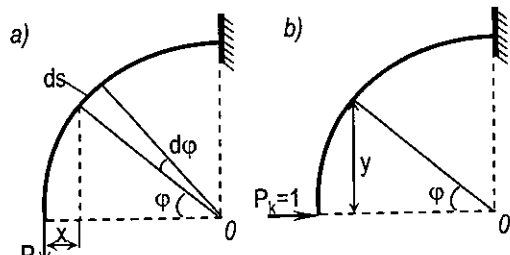
Trạng thái "k" như trên hình 7.15b. Nếu lấy biến số là góc  $\varphi$ , ta có:

- Nội lực ở trạng thái "m":  $M_m = -P \cdot x = -Pr(1 - \cos\varphi)$ .
- Nội lực ở trạng thái "k":  $\bar{M}_k = -l \cdot y = -r \sin\varphi$ .

Vi phân của chiều dài  $ds = r d\varphi$ .

Thay các đại lượng đó vào (3.15), ta được:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI} (-r \sin\varphi) [-Pr(1 - \cos\varphi)] r d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi (1 - \cos\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EI} \int_1^0 -(1 - \cos\varphi) d(\cos\varphi) = \frac{Pr^3}{2EI}. \end{aligned}$$



Hình 7.15

Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của  $P_k$  tức là hướng về bên phải.

### 7.6.2. Trường hợp hệ dàn khớp chịu tải trọng

Như đã biết, trong dàn khớp chỉ tồn tại lực dọc còn  $M = Q = 0$ , nên từ (7.19), ta có:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds.$$

Trong thực tế, các đại lượng  $E$ ,  $A$  và lực dọc  $\bar{N}_k$  cũng như  $N_m$  thường không thay đổi trong phạm vi từng thanh, do đó ta có thể đưa các đại lượng đó ra ngoài dấu tích phân:

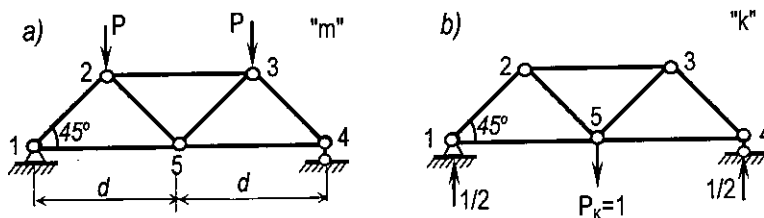
$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im}}{(EA)_i} \int_0^{l_i} ds,$$

suy ra

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im}}{(EA)_i} l_i \quad (7.25)$$

Dấu tổng trong công thức áp dụng cho tất cả các thanh của dàn.

**Ví dụ 7.5.**[6] Xác định chuyển vị đứng tại mắt 5 của dàn trên hình 7.16a. Cho biết  $EA = const$ .



Hình 7.16

Để thuận tiện, ta lập bảng tính chuyển vị trong dàn. Căn cứ vào công thức (7.25) ta chuẩn bị các số liệu cần thiết và ghi vào bảng 7.3. Thứ tự thực hiện như sau:

- Xác định chiều dài của từng thanh, ghi kết quả vào bảng 7.3 (cột thứ hai).
- Xác định giá trị  $l/EA$  cho từng thanh, ghi vào cột thứ ba. Trong trường hợp này, các giá trị đó như nhau.
- Xác định lực dọc  $N_{im}$  trong từng thanh ở trạng thái "m" (ghi vào cột thứ tư) theo các phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã biết.

d) Tạo trạng thái "k" và xác định lực dọc  $\bar{N}_{ik}$  trong từng thanh, ghi vào cột thứ năm.

e) Tính các giá trị  $[\bar{N}_{ik} N_{im} l_i] / (EA)_i$  cho từng thanh bằng cách nhân các số liệu trong bốn cột: thứ hai, thứ ba, thứ tư và thứ năm với nhau. Ghi kết quả của phép nhân vào cột thứ sáu rồi cộng các kết quả sẽ được chuyển vị cần tìm.

Kết quả:  $\Delta_{km} = \frac{Pd}{EA} (2 + \sqrt{2})$  (chuyển vị hướng xuống).

**Bảng 7.3.**

Thanh	$l_i$	$1 / (EA)_i$	$N_{im}$	$\bar{N}_{ik}$	$\bar{N}_{ik} N_{im} l_i / (EA)_i$
1-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
2-3	$d$	$1/EA$	$-P$	$-1$	$Pd/EA$
3-4	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
4-5	$d$	$1/EA$	$P$	$1/2$	$Pd/2EA$
5-1	$d$	$1/EA$	$P$	$1/2$	$Pd/2EA$
5-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$0$	$\sqrt{2}/2$	$0$
5-3	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$0$	$\sqrt{2}/2$	$0$

$$\sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im} l_i}{(EA)_i} = \frac{Pd}{EA} (2 + \sqrt{2}).$$

### 7.6.3. Trường hợp hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức

Khi liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong các hệ tĩnh định không phát sinh nội lực, do đó công thức chuyển vị sẽ có dạng:

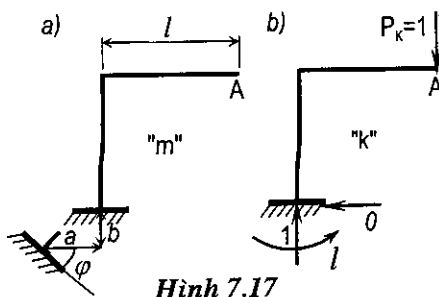
$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} \quad (7.26)$$

**Ví dụ 7.6.** [6] Tìm chuyển vị thẳng đứng tại đầu tự do khi ngàm chịu chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là  $a$ , theo phương đứng là  $b$  và xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc bằng  $\varphi$  (hình 7.17a).

Để tìm chuyển vị này ta tạo trạng thái "k" (hình 7.17b) trong đó đặt lực  $P_k = 1$  tại đầu tự do, có phương thẳng đứng. Tiếp đó tìm các phản lực

$\bar{R}_{jk}$  tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do  $P_k = 1$  gây ra. Giá trị của các phản lực này ghi trên hình 7.17b.

Áp dụng công thức (7.26), đồng thời chú ý là tích số của  $\bar{R}_{jk} Z_{jm}$  dương khi phản lực tại liên kết  $j$  ở trạng thái "k" cùng chiều với chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $j$  ở trạng thái "m", ta được:



Hình 7.17

$$\Delta_{kz} = -(0.a - 1.b - l.\varphi) = b + l\varphi.$$

#### 7.6.4. Trường hợp hệ tĩnh định chịu sự thay đổi nhiệt độ

Sự thay đổi nhiệt độ chỉ gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh mà không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định. Do đó ta có thể xác định chuyển vị trong hệ tĩnh định theo công thức sau:

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds. \quad (7.27)$$

Trong những trường hợp khi:

- ◆ Nhiệt độ thay đổi như nhau theo chiều dài của từng đoạn thanh.
- ◆ Vật liệu trong từng đoạn thanh như nhau, nghĩa là  $\alpha = const$  trong từng đoạn thanh.
- ◆ Chiều cao  $h = const$  trong từng đoạn thanh.

Ta có thể đưa các đại lượng  $t_{cm}$ ,  $(t_{2m} - t_{1m})$ ,  $\alpha$  và  $h$  ra ngoài dấu tích phân

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \int \bar{M}_k ds + \sum \alpha t_{cm} \int \bar{N}_k ds.$$

Ta thấy các tích số  $\bar{M}_k ds$  và  $\bar{N}_k ds$  lần lượt là diện tích phần tử của biểu đồ mômen uốn và lực dọc nên:

$\int \bar{M}_k ds = \Omega(\bar{M}_k)$  - diện tích biểu đồ mômen uốn trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".

$\int \bar{N}_k ds = \Omega(\bar{N}_k)$  - diện tích biểu đồ lực dọc trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".

Công thức sẽ có dạng:

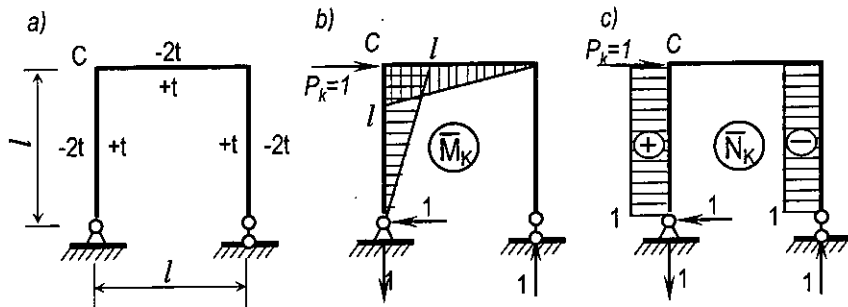
$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (7.28)$$

**Ví dụ 7.7.** [6] Xác định chuyển vị ngang của điểm C khi nhiệt độ ở trong khung biến đổi  $+t$  còn ở ngoài khung biến đổi  $-2t$  (hình 4.30a). Tiết diện hình chữ nhật có chiều cao  $h = const$ .

Để áp dụng công thức (7.28) ta cần chuẩn bị các số liệu sau:

- Xác định các giá trị  $t_{cm}$  và  $(t_{2m} - t_{1m})$ . Nếu đặt người quan sát đứng ở bên trong khung thì các giá trị này như nhau cho tất cả các thanh và bằng:

$$t_{cm} = \frac{l}{2}(t_1 + t_2) = \frac{l}{2}(-2t + t) = -\frac{l}{2}t; \quad t_{2m} - t_{1m} = +t - (-2t) = +3t.$$



Hình 7.18

- Tạo trạng thái "k" và vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ  $\bar{M}_k$  như trên hình 7.18b. Biểu đồ  $\bar{N}_k$  như trên hình 7.18c.

Áp dụng công thức (7.28):

$$\Delta_{kt} = \frac{\alpha}{h} 3t \frac{l \cdot l}{2} + \frac{\alpha}{h} 3t \frac{l \cdot l}{2} + \alpha \left(-\frac{t}{2}\right)(1 \cdot l) + \alpha \left(-\frac{t}{2}\right)(-1 \cdot l) = \frac{3\alpha t l^2}{h}.$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực  $P_k$  (hướng về bên phải).

## 7.7. CÁCH TÍNH CÁC TÍCH PHÂN TRONG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ THEO CÁCH "NHÂN BIỂU ĐỒ"

Đối với hệ gồm các thanh thẳng (dầm, khung, dàn) ta có thể tính các tích phân trong công thức chuyển vị đơn giản hơn so với cách lấy tích phân trực tiếp. Cách tính này được gọi là cách "nhân biểu đồ" do A. N. Vêrêxaghin đề xuất vào năm 1925.

Các tích phân trong công thức chuyển vị (7.23) đều có thể đưa về dạng tích phân  $T$  của tích hai hàm  $\varphi(s)$  và  $\Phi(s)$  như sau:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds . \quad (7.29)$$

Chẳng hạn:

$$\int_{s_1}^{s_2} \bar{M}_k \frac{M_m}{EI} ds = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds , \text{ trong đó } \varphi(s) = \bar{M}_k \text{ còn } \Phi(s) = \frac{M_m}{EI} .$$

Trong trường hợp khi hệ gồm những thanh thẳng và một trong hai hàm là hằng số hoặc bậc nhất, giả sử  $\varphi(s)$  là hằng số hoặc bậc nhất và  $\Phi(s)$  có bậc bất kỳ, ta có thể tính tích phân  $T$  có dạng (7.29) bằng cách lấy diện tích  $\Omega_\Phi$  của biểu đồ có bậc bất kỳ nhân với tung độ  $y_\varphi$  của biểu đồ là hằng số hoặc bậc nhất lấy tại hoành độ tương ứng với trọng tâm của diện tích  $\Omega_\Phi$ .

Nghĩa là:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = \Omega_\Phi y_\varphi \quad (7.30)$$

Thật vậy, giả sử trong khoảng  $(s_1, s_2)$  hàm  $\Phi(s)$  và  $\varphi(s)$  có dạng như trên hình 7.19a,b. Kéo dài đường thẳng  $\varphi(s)$  tới khi cắt đường chuẩn ở  $U$  và gọi  $\alpha$  là góc nghiêng của đường thẳng  $\varphi(s)$  với đường chuẩn. Từ hình vẽ có:

- $\varphi(s) = (s - s_0) \operatorname{tg} \alpha$ ;

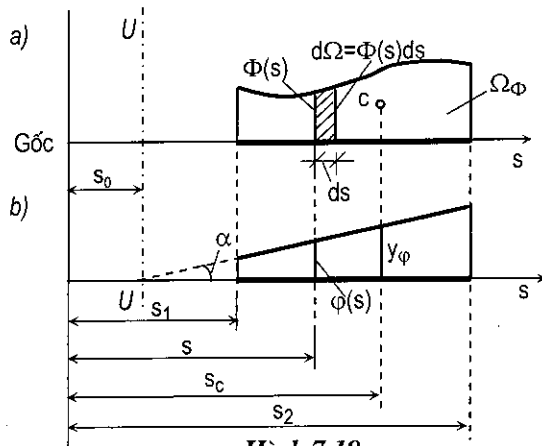
- $\Phi(s) ds = d\Omega$  - diện tích phần tử của biểu đồ  $\Phi(s)$  (phần gạch chéo trên hình 7.19a).

Thay vào (7.19), ta được:

$$\begin{aligned} T &= \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) \cdot \Phi(s) ds = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0) \operatorname{tg} \alpha \cdot d\Omega . \end{aligned}$$

Vì  $\operatorname{tg} \alpha$  không đổi trong khoảng  $(s_1, s_2)$ , nên:

$$T = \operatorname{tg} \alpha \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0) \cdot d\Omega .$$



Tích phân trong vế phải của biểu thức trên chính là mômen tĩnh  $S_U$  của diện tích trong khoảng  $(s_1, s_2)$  lấy đối với trục  $U$ . Trục  $U$  đi qua điểm  $U$  và vuông góc với đường chuẩn. Mặt khác, ta đã biết mômen tĩnh  $S_U$  bằng diện tích nhân với khoảng cách từ trọng tâm của diện tích đến trục  $U$ .

Do đó:  $\int_{s_1}^{s_2} (s - s_o) . d\Omega = S_U = (s_c - s_o) \Omega_\Phi$ , nên  $T = \operatorname{tg} \alpha (s_c - s_o) \Omega_\Phi$ .

Từ hình 3.14b ta thấy:  $\operatorname{tg} \alpha (s_c - s_o) = y_\Phi$ .

Vậy 
$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) . \Phi(s) ds = \Omega_\Phi y_\Phi.$$

Đó là điều cần chứng minh.

Cách tính các tích phân  $T$  như trình bày ở trên gọi là cách "nhân biểu đồ" theo *Vêrêxaghin*. Ta quy ước ký hiệu phép "nhân" biểu đồ như sau:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s) . \Phi(s) ds = (\varphi) (\Phi). \quad (7.31)$$

Với cách ký hiệu như vậy, ta có thể viết lại công thức chuyển vị cho trường hợp hệ chịu tải trọng như sau:

$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k) (M_m) + (\overline{N}_k) (N_m) + (\overline{Q}_k) (Q_m) \quad (7.32)$$

Đồng thời cần lưu ý là:

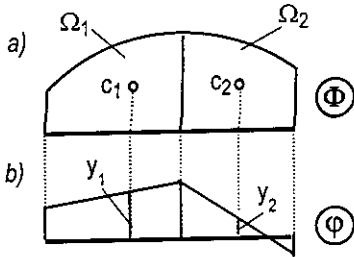
- ◆ Các đại lượng  $1/EI$ ,  $1/EA$ ,  $\nu/GA$  tuy không viết trong (7.32) nhưng cần hiểu ngầm là vẫn tồn tại, khi tính ta phải thêm các đại lượng đó vào.
- ◆ Trong (7.32) tuy không viết dấu tổng nhưng cũng cần hiểu là phải "nhân" biểu đồ trong tất cả các đoạn thanh của hệ rồi cộng đại số các kết quả.

**Các chú ý khi nhân biểu đồ:**

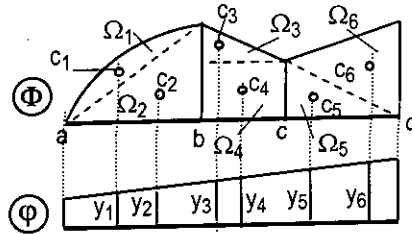
- 1) Tung độ  $y_\Phi$  bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có bậc bé hơn hoặc bằng bậc một, còn diện tích có thể lấy ở biểu đồ bất kỳ.
- 2) Nếu diện tích và tung độ  $y_\Phi$  cùng dấu thì kết quả nhân mang dấu dương và ngược lại.
- 3) Trong khoảng  $(s_1, s_2)$  biểu đồ lấy tung độ phải là một đoạn thẳng trơn tru (nếu là đường thẳng gãy khúc thì  $\operatorname{tg} \alpha$  sẽ thay đổi và ta sẽ không thể đưa ra ngoài dấu tích phân trong phép biến đổi khi chứng minh cách nhân).

Trong trường hợp biểu đồ bậc nhất  $\varphi(s)$  là đường thẳng gãy khúc ta cần chia khoảng  $(s_1, s_2)$  ra thành nhiều đoạn để áp dụng cách nhân rồi cộng kết quả với nhau. Chẳng hạn như trường hợp trên hình 7.20, chia khoảng cần nhân biểu đồ thành hai đoạn để thực hiện phép nhân, ta có:  $T = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$ .

Biểu đồ lấy diện tích không bị điều kiện này hạn chế.



Hình 7.20

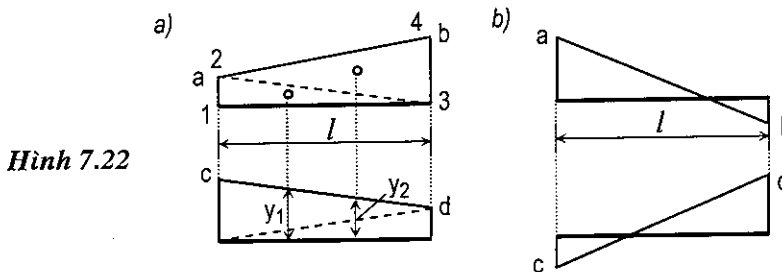


Hình 7.21

- 4) Theo tính chất tích phân của một tổng hoặc một hiệu bằng tổng hoặc hiệu các tích phân, khi biểu đồ lấy diện tích là hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình rồi cộng kết quả với nhau. Cần hiểu hình đơn giản là hình dễ tìm ngay được diện tích và trọng tâm của nó.

Ví dụ như trường hợp trên hình 7.21 ta có thể chia biểu đồ thành những hình đơn giản như sau: Trong khoảng  $ab$  ta chia biểu đồ có dạng parabol thành một mảnh parabol và một tam giác, trong khoảng  $bc$  và  $cd$  ta có thể chia thành một hình chữ nhật và một tam giác hoặc hai hình tam giác. Khi đó:

$$T = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3 + \Omega_4 y_4 + \Omega_5 y_5 + \Omega_6 y_6.$$



Hình 7.22

Trường hợp nhân hai biểu đồ có dạng hình thang cùng ở một bên đường chuẩn như trên hình 7.22a, ta có thể xem diện tích hình thang như tổng của diện tích hai tam giác  $123$  và  $234$ . Do đó:

$$T = \frac{l}{2} a l y_1 + \frac{l}{2} b l y_2.$$

Từ hình 7.22a ta dễ dàng tìm được:

$$y_1 = \frac{2}{3} c + \frac{l}{3} d \quad \text{và} \quad y_2 = \frac{2}{3} d + \frac{l}{3} c.$$

Do đó: 
$$T = \frac{l}{6} [2ac + 2bd + ad + bc]. \quad (7.33)$$



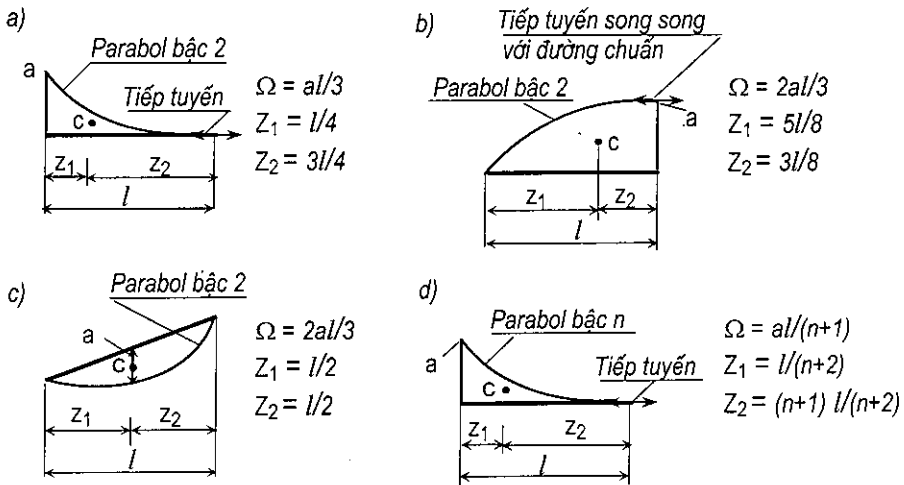
Đối với trường hợp nhân hai biểu đồ có dạng hình thang khác với dạng trên hình 7.22a, ta vẫn có thể áp dụng công thức (7.33) với chú ý: tích của từng cặp hai tung độ trong các số hạng của (7.33) mang dấu dương khi hai tung độ đó ở cùng một bên đường chuẩn, còn mang dấu âm khi hai tung độ đó ở hai bên đường chuẩn.

Chẳng hạn, khi nhân hai hình thang xoắn như trên hình 7.22b, ta có:

$$T = \frac{l}{6} [-2ac - 2bd + ad + bc].$$

5) Biểu đồ đối xứng nhân với biểu đồ phản xứng cho kết quả bằng không (theo tính chất của tích phân).

Trên hình 7.23 cung cấp số liệu về diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình thường gặp.

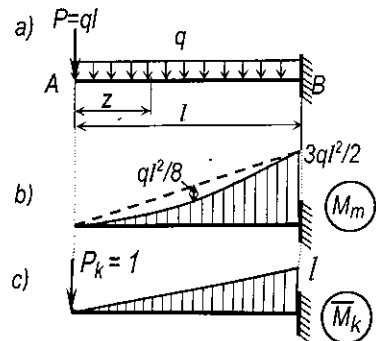


Hình 7.23

**Ví dụ 7.8.** [6] Xác định độ võng tại đầu tự do của dầm đã xét trong ví dụ 7.1 (hình 7.24a).

Biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 7.24b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 7.24c. Biểu đồ  $\bar{M}_k$  có dạng đường thẳng nên có thể áp dụng phép "nhân biểu đồ".

Khi nhân ta xem biểu đồ  $M_m$  như hiệu của hai hình: hình tam giác và hình parabol (chú ý ở đây đường chuẩn không tiếp xúc với đường cong tại đầu tự do).



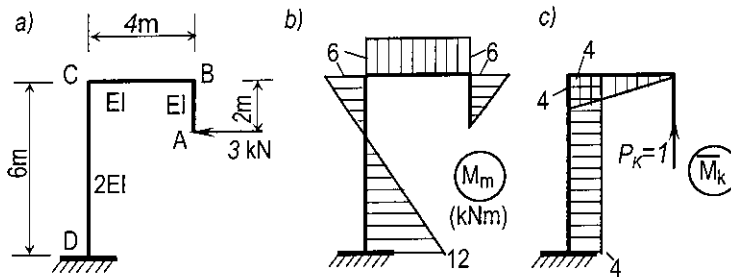
Hình 7.24

Ta có: 
$$\Delta_{km} = (\bar{M}_k)(M_m) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{3ql^2}{2} l \frac{2}{3} l - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \frac{l}{2} \right] = \frac{11}{24} \frac{ql^4}{EI}$$

(chuyển vị hướng xuống).

**Ví dụ 7.9** [6] Tìm chuyển vị thẳng đứng tại A của khung trên hình 7.25a.

Biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 7.25b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 7.25c. Khi nhân biểu đồ cần chú ý là độ cứng của các thanh có giá trị khác nhau. Vì hai biểu đồ đều có dạng đường thẳng nên ta lấy diện tích và tung độ  $y_\varphi$  ở biểu đồ nào cũng được.



Hình 7.25

Kết quả nhân biểu đồ:

- Trong thanh AB: mômen uốn  $\bar{M}_k$  bằng không nên kết quả bằng không.

- Trong thanh BC:  $-\frac{1}{EI} 4 \cdot 6 \cdot 2 = -\frac{48}{EI}$ ;

- Trong thanh CD:  $\frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} 12 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot 4 \right] = \frac{36}{EI}$ .

Như vậy: 
$$\Delta_{km} = -\frac{48}{EI} + \frac{36}{EI} = -\frac{12}{EI}$$

Kết quả mang dấu trừ chứng tỏ chuyển vị hướng ngược chiều  $P_k$  tức là hướng xuống dưới. Trong khi tính toán ta đã dùng các đơn vị lực kN, đơn vị chiều dài là m nên độ cứng  $EI$  cũng phải lấy theo  $(\text{kN/m}^2) \times \text{m}^4 = \text{kNm}^2$ , do đó chuyển vị tìm được sẽ tính theo mét.

## 7.8. CÁCH TÌM MỘT TẬP HỢP CHUYỂN VỊ

Giả sử xét một hệ bất kỳ chịu tác dụng của các nguyên nhân "m", tại các điểm xác định 1, 2, 3 của hệ có các chuyển vị thẳng đứng lần lượt là  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  (hình 7.26a). Yêu cầu xác định tập hợp chuyển vị.

$$\Delta^* = a \Delta_1 + b \Delta_2 - c \Delta_3$$

với  $a, b, c$  là các hằng số cho trước.

Để xác định  $\Delta^*$  ta có thể thực hiện như sau:

♦ *Xác định các chuyển vị  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .*

Các trạng thái  $k_1, k_2, k_3$  tương ứng vẽ trên hình 7.26b, c, d. Để trình bày được đơn giản ta chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn (nếu xét thêm các ảnh hưởng khác thì nội dung cũng không có gì thay đổi) và viết các công thức chuyển vị dưới dạng nhân biểu đồ. Ta có:

$$\Delta_1 = (\bar{M}_{k_1})(M_m);$$

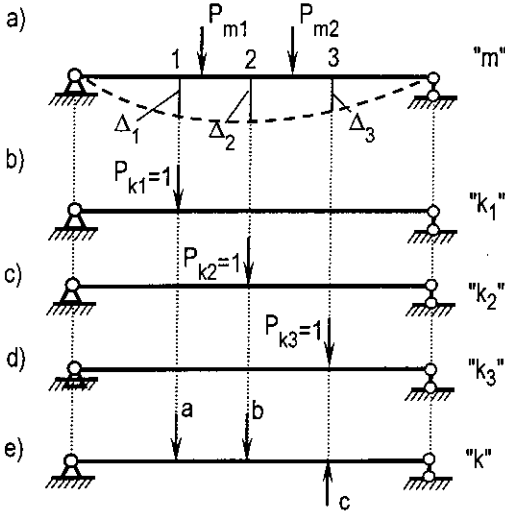
$$\Delta_2 = (\bar{M}_{k_2})(M_m); \quad (a)$$

$$\Delta_3 = (\bar{M}_{k_3})(M_m).$$

♦ *Lần lượt nhân các chuyển vị  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  vừa tìm được với các hằng số  $a, b, -c$ , và thực hiện phép cộng ta sẽ xác định được:*

$$\Delta^* = a \Delta_1 + b \Delta_2 - c \Delta_3. \quad (b)$$

Cách làm như vậy tốn thời gian vì phải nhân biểu đồ nhiều lần.



Hình 7.26

Do đó, cần đặt vấn đề tìm một nhóm lực  $P^*$  đặt ở trạng thái "k" để sao cho  $P^*$  sinh công trên chuyển vị  $\Delta^*$  cần xác định. Nói khác đi là tìm nhóm lực  $P^*$  sao cho khi nhân biểu đồ  $\bar{M}_k$  do chúng gây ra với biểu đồ  $M_m$  ta sẽ tìm ngay được chuyển vị  $\Delta^*$ :

$$\Delta^* = (\bar{M}_k)(M_m) \quad (c)$$

Nếu thay (a) vào (b), ta được

$$\begin{aligned} \Delta^* &= a(\bar{M}_{k_1})(M_m) + b(\bar{M}_{k_2})(M_m) - c(\bar{M}_{k_3})(M_m) = \\ &= [a(\bar{M}_{k_1}) + b(\bar{M}_{k_2}) - c(\bar{M}_{k_3})](M_m). \end{aligned} \quad (d)$$

So sánh (c) với (d) ta thấy:

$$(\bar{M}_k) = a(\bar{M}_{k_1}) + b(\bar{M}_{k_2}) - c(\bar{M}_{k_3}).$$

Vì các tung độ biểu thị nội lực tỷ lệ bậc nhất với giá trị của lực tác dụng nên theo nguyên lý cộng tác dụng đồng thời xuất phát từ điều kiện trên, ta thấy nhóm lực  $P^*$  chính là nhóm lực như trên hình 7.26e.

Như vậy, nếu ở trạng thái "m" ta muốn tìm một tập hợp chuyển vị:

$$\Delta_{km}^* = \sum_{i=1}^n a_i \Delta_i, \quad (7.34)$$

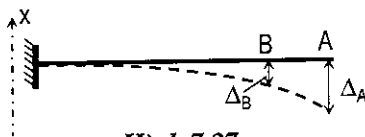
thì ở trạng thái "k" cần đặt nhóm lực  $P^*$  gồm n lực trong đó lực thứ i có vị trí và phương của chuyển vị  $\Delta_i$  còn giá trị bằng hệ số  $a_i$ . Tiếp đó áp dụng công thức chuyển vị như thường lệ:

$$\Delta_{km}^* = (\bar{M}_k)(M_m) \quad (7.35)$$

Dưới đây ta sẽ áp dụng kết luận vừa tìm được cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế tính toán.

### 7.8.1. Chuyển vị thẳng tương đối

Chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo phương X nào đó là hiệu số hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm đó theo phương X ở lúc sau và trước biến dạng.



Ví dụ cần xét chuyển vị tương đối giữa hai điểm A và B theo phương thẳng đứng trong hệ trên hình 7.27.

Ta thấy hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm A và B theo phương X trước biến dạng bằng không, còn sau biến dạng là  $\Delta_A - \Delta_B$ .

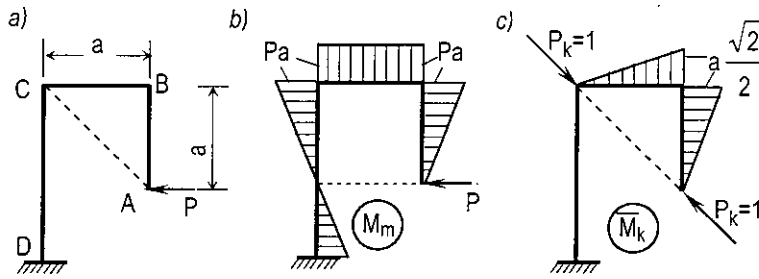
Do đó, chuyển vị tương đối  $\Delta_{AB} = \Delta_A - \Delta_B$  tức là hiệu của hai chuyển vị tuyệt đối cùng chiều nhau tại hai điểm A và B theo phương đang xét.

Như vậy, ta có thể phát biểu về cách tạo trạng thái "k" khi cần xác định chuyển vị thẳng tương đối như sau:

Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm nào đó theo phương X bất kỳ thì ở trạng thái "k" ta cần đặt nhóm lực  $P^*$  dưới dạng hai lực ngược chiều nhau bằng đơn vị tại hai điểm đang xét và hướng theo phương X.

**Ví dụ 7.10.** [6] Tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm A và C theo phương nối liền hai điểm đó (hình 7.28a).

Trạng thái "m" và biểu đồ  $M_m$  vẽ trên hình 7.28b. Trạng thái "k" và biểu đồ  $\bar{M}_k$  vẽ trên hình 7.28c. Ta có:



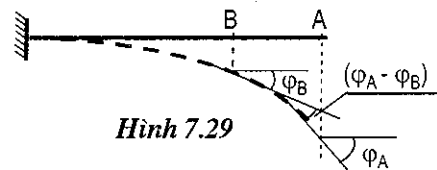
Hình 7.28

$$\Delta_{km}^* = \Delta_{AB} = \frac{I}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} a \frac{2}{3} Pa + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2} a Pa \right] = \frac{5\sqrt{2}}{12EI} Pa^3.$$

Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm này hướng theo chiều của nhóm lực  $P^*$  (A và C tiến gần với nhau).

### 7.8.2. Chuyển vị góc tương đối

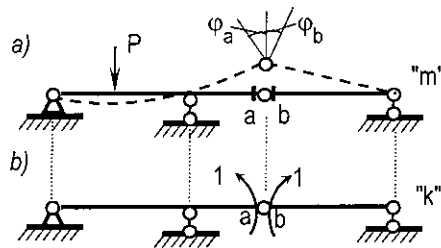
Chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện là hiệu của góc hợp giữa hai tiết diện đó ở lúc sau và trước biến dạng.



Hình 7.29

Ví dụ, xét chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện A và B của hệ trên hình 7.29.

Góc hợp thành giữa hai tiết diện A và B hay nói khác đi là góc hợp giữa phương tiếp tuyến tại hai tiết diện A và B trước biến dạng bằng không còn sau biến dạng là  $\varphi_A - \varphi_B$ .



Hình 7.30

Do đó, góc xoay tương đối giữa tiết diện A và B bằng  $\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_B$  tức là bằng hiệu của hai chuyển vị góc tuyệt đối tại hai điểm đó nếu hai góc này được giả thiết là cùng chiều.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện thì ở trạng thái "k" ta cần đặt nhóm lực  $P^*$  dưới dạng hai mômen đơn vị ngược chiều nhau tại hai tiết diện đó.

Ví dụ, muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện  $a$  và  $b$  của hệ vẽ trên hình 7.30a ta tạo trạng thái "k" như trên hình 7.30b.

### 7.8.3. Góc xoay của thanh trong dàn

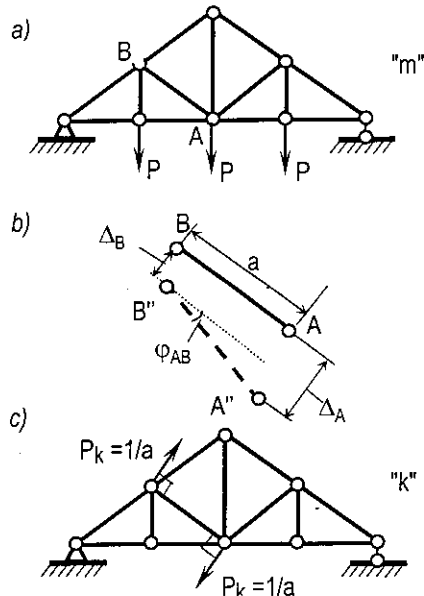
Giả sử cần tìm góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn (hình 7.31a). Vì các thanh trong dàn không bị uốn nên khi biến dạng chúng vẫn thẳng. Nếu gọi  $A'B'$  là vị trí của thanh  $AB$  sau biến dạng (hình 7.31) đồng thời gọi  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  là chuyển vị tại mắt  $A$  và  $B$  theo phương vuông góc với trục thanh  $AB$  thì khi  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  cùng chiều ta có:

$$\varphi_{AB} \approx \text{tg} \varphi_{AB} = \frac{\Delta_A - \Delta_B}{a} = \frac{1}{a} \Delta_A - \frac{1}{a} \Delta_B.$$

Ta thấy góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn chính là tập hợp của hai chuyển vị  $\Delta_A$  và  $\Delta_B$  với các hệ số là  $1/a$  và  $-1/a$

Như vậy, muốn tìm góc xoay của thanh bất kỳ trong dàn thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát  $P^*$  dưới dạng hai lực đặt tại hai đầu thanh, ngược chiều nhau, vuông góc với trục của thanh, mỗi lực có giá trị bằng đơn vị chia cho chiều dài của thanh.

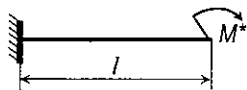
Trạng thái "k" để tìm góc xoay của thanh  $AB$  trong dàn như trên hình 7.31c.



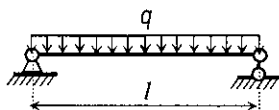
Hình 7.31

## BÀI TẬP CHƯƠNG VII

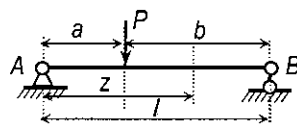
VII.1 - VII.2. Tìm phương trình đường đàn hồi và độ võng lớn nhất trong hệ chịu lực như trên hình vẽ tương ứng.



Hình VII.1



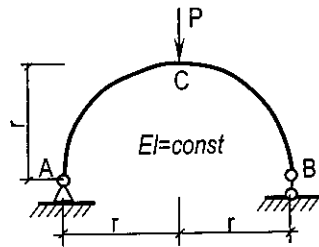
Hình VII.2



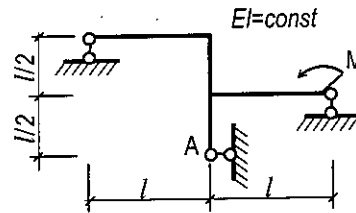
Hình VII.3

**VII.3.** Tìm phương trình đường đàn hồi và phương trình góc xoay trong hệ chịu lực như trên hình VII.3.

**VII.4.** [9] Xác định chuyển vị xoay tại tiết diện  $B$  của thanh tròn hình bán nguyệt trên hình VII.4. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.



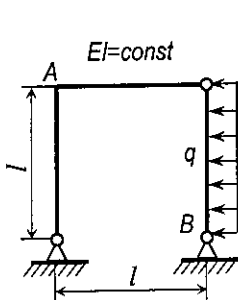
Hình VII.4



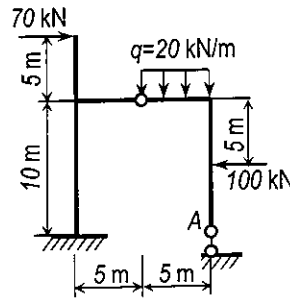
Hình VII.5

**VII.6.** [9] Xác định chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện  $A$  và  $B$  trong khung trên hình VII.6. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

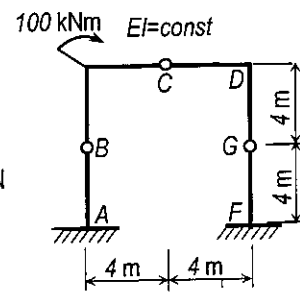
**VII.7.** [9] Xác định chuyển vị ngang tại tiết diện  $A$  trong khung trên hình VII.7. Cho biết:  $EI = const = 2 \cdot 10^6 \text{ kN.m}^2$ . Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.



Hình VII.6



Hình VII.7



Hình VII.8

**VII.8.** [9] Cho hệ như trên hình VII.8, yêu cầu xác định:

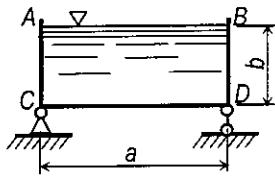
- chuyển vị thẳng đứng tại  $C$ ;
- chuyển vị thẳng tương đối giữa  $B$  và  $G$ ;
- chuyển vị xoay tại tiết diện  $D$ ;

- chuyển vị thẳng tương đối giữa  $B$  và  $C$ .

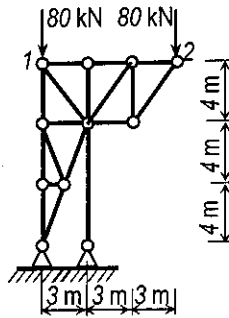
**VII.9.** [7] Cho hệ khung chịu áp lực thủy tĩnh với chiều cao cột nước là  $b$  như trên hình VII.9. Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa  $A$  và  $B$ . Cho biết:  $EI = const$ .

**VII.10.** [7] Cho hệ dàn chịu tải trọng như trên hình VII.10. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại 1 và 2. Cho biết:  $EA = const$ .

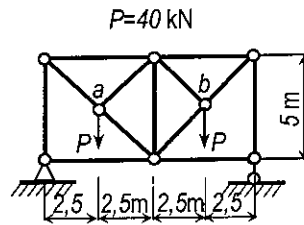
**VII.11.** [7] Cho hệ dàn chịu tải trọng như trên hình VII.11. Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa  $a$  và  $b$ . Cho biết:  $EI = const$ .



Hình VII.9



Hình VII.10



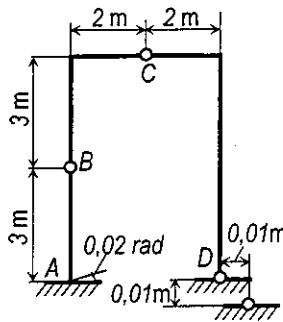
Hình VII.11

**VII.12.** [7] Xác định góc xoay tại tiết diện  $D$  và chuyển vị ngang tại khớp  $B$  trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình VII.12.

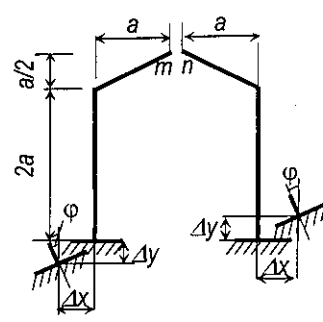
**VII.13.** [7] Cho hệ chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình VII.13. Tìm các chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện  $m$  và  $n$ :

- chuyển vị thẳng tương đối theo phương ngang;
- chuyển vị thẳng tương đối theo phương đứng;
- chuyển vị xoay tương đối.

**VII.14.** [7] Tìm chuyển vị thẳng đứng tại  $A$  trong hệ chịu nhiệt độ thay đổi như trên hình VII.14.



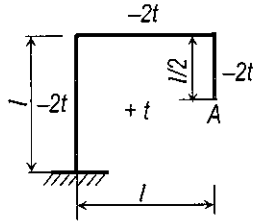
Hình VII.12



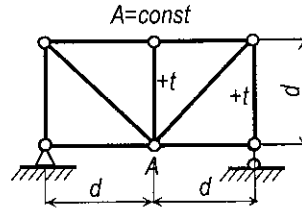
Hình VII.13



Cho biết:  $EI = \text{const}$ ;  $h = \text{const} = l / 20$ .



Hình VII.14



Hình VII.15

**VII.15.** [7] Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A trong hệ dàn chịu nhiệt độ thay đổi như trên hình VII.15. Cho biết:  $EA = \text{const}$ .

# 8

## PHƯƠNG PHÁP LỰC VÀ CÁCH TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH

### 8.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH - BẬC SIÊU TĨNH

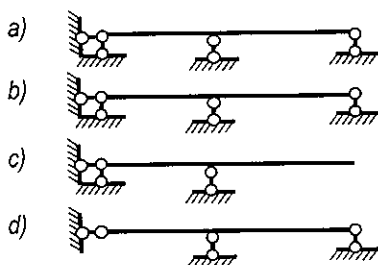
#### 8.1.1. Định nghĩa

Trong các chương trước đã giới thiệu cách tính hệ tĩnh định tức là những hệ trong đó chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực. Trên thực tế, thường gặp những hệ trong đó nếu chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định các phản lực và nội lực. Để tính các hệ đó cần bổ sung các phương trình biểu thị điều kiện biến dạng. Như vậy:

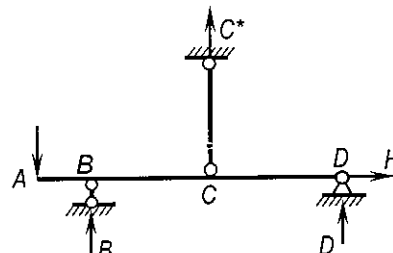
*Hệ được gọi là siêu tĩnh nếu trong toàn hệ hoặc trong một vài phần của hệ ta không thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định tất cả các phản lực và nội lực.*

*Hệ siêu tĩnh là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.*

Danh từ liên kết thừa dùng ở đây chỉ là quy ước. Cần hiểu liên kết thừa là những liên kết không cần thiết cho sự cấu tạo hình học của hệ nhưng vẫn cần cho sự làm việc của công trình.



Hình 8.1



Hình 8.2

Ví dụ, dầm hai nhịp trên hình 8.1a có bốn liên kết loại một nhưng ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học nên chưa đủ để xác định bốn phản lực trong bốn liên kết, vậy dầm đó là siêu tĩnh. Dầm này có một liên kết thừa là một trong ba liên kết thanh thẳng đứng. Nếu loại một liên kết thừa như trên

các hình 8.1b, c, d thì dầm vẫn bất biến hình nhưng tính chất làm việc sẽ khác đi.

Đối với hệ cho trên hình 8.2 ta thấy: phần đầu thừa  $AB$  là tĩnh định vì có thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định nội lực trong đó; phần  $BCD$  là siêu tĩnh vì với ba phương trình cân bằng tĩnh học chưa đủ để xác định bốn phản lực  $B, C, D$  và  $H$ , do đó cũng không xác định được nội lực trong phần này. Vậy, nếu xét toàn bộ thì hệ này là siêu tĩnh.

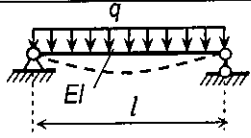
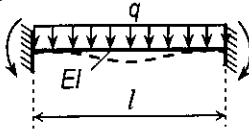
### 8.1.2. Tính chất

Đối chiếu với hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh có những tính chất sau:

1) *Chuyển vị, biến dạng và nội lực trong hệ siêu tĩnh nói chung nhỏ hơn trong hệ tĩnh định có cùng kích thước và tải trọng.*

Bảng 8.1 cung cấp kết quả tính độ võng ở giữa nhịp và mômen uốn lớn nhất trong dầm tĩnh định một nhịp với dầm siêu tĩnh một nhịp có hai đầu ngàm.

**Bảng 8.1**

Dầm		
Độ võng ở giữa nhịp	$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$	$y_{max} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$
Giá trị mômen uốn lớn nhất	tại giữa nhịp $M = \frac{ql^2}{8}$	tại ngàm $M = \frac{ql^2}{12}$

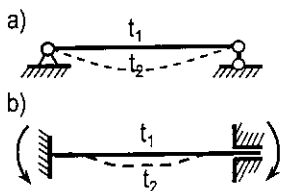
Qua những số liệu trên ta thấy chuyển vị và nội lực trong dầm siêu tĩnh nhỏ hơn trong dầm tĩnh định khá nhiều. Bởi vậy dùng hệ siêu tĩnh sẽ tiết kiệm được vật liệu hơn so với hệ tĩnh định tương ứng. Đó là ưu điểm chính của hệ siêu tĩnh.

2) *Trong hệ siêu tĩnh phát sinh các nội lực do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị các gối tựa, sự chế tạo và lắp ráp không chính xác gây ra.*

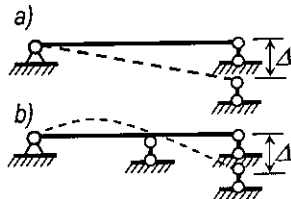
Để thấy rõ tính chất này, ta xét một vài ví dụ:

- So sánh dầm tĩnh định một nhịp (hình 8.3a) với dầm siêu tĩnh một nhịp (hình 8.3b) cùng chịu sự thay đổi nhiệt độ không đều, ở trên là  $t_1$ , ở dưới là  $t_2$  với  $t_2 > t_1$  ta thấy: khi chịu nhiệt độ, dầm có khuynh hướng bị

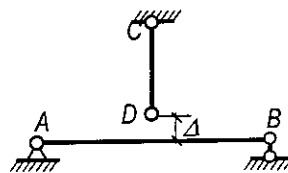
uốn cong, nhưng trong dầm tĩnh định các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không phát sinh phản lực và nội lực, ngược lại trong dầm siêu tĩnh, các liên kết (ngàm) cản trở không cho phép dầm biến dạng tự do nên phát sinh phản lực và nội lực.



Hình 8.3



Hình 8.4



Hình 8.5

- Khi liên kết có chuyển vị cưỡng bức (bị lún) dầm tĩnh định trên hình 8.4a bị nghiêng đi, các liên kết không ngăn cản và cho phép chuyển vị tự do nên không phát sinh nội lực. Ngược lại, khi gối phải của dầm siêu tĩnh trên hình 8.4b bị lún, gối tựa giữa không cho phép dầm chuyển vị tự do như trường hợp trên, dầm bị uốn cong theo đường đứt nét, do đó trong dầm sẽ phát sinh nội lực.
- Khi chế tạo, giả sử chiều dài của thanh  $CD$  trong hệ siêu tĩnh trên hình 8.5 bị ngắn so với chiều dài thiết kế một đoạn bằng  $\Delta$ . Sau khi lắp ráp, thanh  $CD$  bị giãn ra đồng thời dầm  $AB$  cũng bị uốn cong, do đó trong hệ tồn tại các nội lực ban đầu.

Khi thiết kế kết cấu siêu tĩnh ta cần đặc biệt lưu ý đến những nguyên nhân gây ra nội lực kể trên. Đôi khi có thể sử dụng tính chất này để tạo sẵn trong hệ những nội lực và biến dạng ban đầu ngược chiều với nội lực và biến dạng do tải trọng gây ra. Biện pháp này làm cho sự phân phối nội lực trong các cấu kiện của công trình được hợp lý hơn và do đó tiết kiệm được vật liệu.

3) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vật liệu và kích thước của tiết diện trong các thanh.

Như sau này sẽ thấy, để tính hệ siêu tĩnh ta phải dựa vào điều kiện biến dạng mà biến dạng lại phụ thuộc các độ cứng  $EI$ ,  $EA$ ... nên nội lực trong hệ siêu tĩnh cũng phụ thuộc  $EI$ ,  $EA$  của các thanh.

Tính các hệ siêu tĩnh thường phức tạp hơn tính các hệ tĩnh định. Có nhiều phương pháp tính hệ siêu tĩnh. Hai phương pháp cơ bản là:

- \* Phương pháp lực (được đề cập trong chương này).

\* *Phương pháp chuyển vị* (được đề cập trong chương 9).

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu cách vận dụng phương pháp lực để giải các bài toán siêu tĩnh chịu tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa. Bài toán hệ chịu nguyên nhân do chế tạo không chính xác hoặc do điều chỉnh chiều dài của các thanh có thể đưa về bài toán hệ chịu thay đổi nhiệt độ nếu xem sự thay đổi chiều dài  $\Delta$  của thanh như khi thanh chịu sự thay đổi đều  $t_c$  của nhiệt độ với điều kiện  $\alpha t_c l = \Delta$ . Do đó, không cần đề cập riêng đến nguyên nhân này.

### 8.1.3. Bậc siêu tĩnh

Trong phạm vi những giả thiết thường được chấp nhận trong cơ học công trình, ta có thể định nghĩa bậc siêu tĩnh như sau:

*Bậc siêu tĩnh của hệ siêu tĩnh bằng số liên kết tương đương loại một ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình.*

Ta có thể dùng các hệ thức giữa số lượng các miếng cứng và số lượng các liên kết đã nghiên cứu trong chương 1 để suy ra bậc siêu tĩnh của hệ. Ví dụ, từ (1.3) ta suy ra công thức xác định bậc siêu tĩnh  $n$  của hệ nối với trái đất là

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D,$$

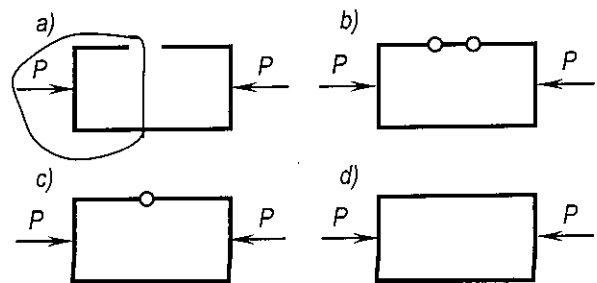
trong đó:  $D$  – số các miếng cứng tĩnh định (miếng cứng có chu vi hở).

Ngoài ra còn có thể lập công thức đơn giản hơn để xác định bậc siêu tĩnh.

Trước khi thiết lập ta khảo sát một ví dụ. Xét một khung có chu vi hở (hình 8.6a). Khung này là tĩnh định vì ta có thể chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ sau khi thực hiện mặt cắt như trên hình vẽ.

Nếu đặt thêm vào chỗ hở một liên kết loại một (thanh), hệ sẽ thừa một liên kết (hình 8.6b). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh  $n = 1$ .

Nếu đặt thêm vào chỗ hở một liên kết loại hai (khớp), hệ sẽ thừa hai liên kết tương đương loại một (hình 8.6c). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh  $n = 2$ .



Hình 8.6

Nếu đặt thêm vào chỗ hở một mối hàn (liên kết loại ba) hệ sẽ thừa ba liên kết tương đương loại một (hình 8.6d). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh  $n = 3$ .

Qua ví dụ trên ta có kết luận sau:

Một chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba, nếu thêm vào chu vi kín đó một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị.

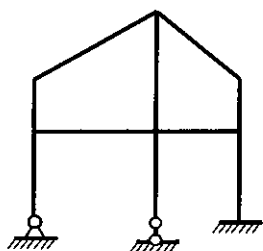
Để thiết lập công thức xác định bậc siêu tĩnh, ta giả thiết trong hệ siêu tĩnh có  $V$  chu vi kín và  $K$  khớp đơn giản.

Theo nhận xét trên, cứ mỗi chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba nên hệ có  $V$  chu vi kín sẽ có bậc siêu tĩnh là  $3V$ . Nếu thêm một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị, do đó  $K$  khớp đơn giản làm bậc siêu tĩnh của hệ giảm  $K$  đơn vị. Vậy bậc siêu tĩnh  $n$  của hệ được xác định theo công thức:

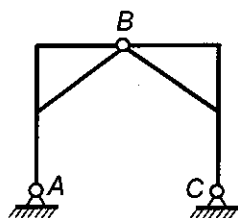
$$n = 3V - K. \quad (8.1)$$

**Ví dụ 8.1.** [6] Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 8.7.

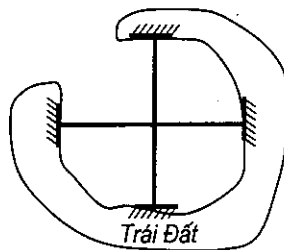
Hệ này có  $V = 4$  và  $K = 3$ . Do đó  $n = 3.4 - 3 = 9$ .



Hình 8.7



Hình 8.8



Hình 8.9

**Ví dụ 8.2.** [6] Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 8.8.

Hệ này có ba chu vi kín. Để tính số khớp  $K$  ta cần chú ý: các khớp  $A, C$  là khớp đơn giản nên mỗi khớp tính bằng một đơn vị; khớp  $B$  là khớp phức tạp nên phải tính bằng độ phức tạp của nó và bằng  $4 - 1 = 3$ . Vậy tổng số khớp đơn giản là  $K = 4$ . Bậc siêu tĩnh  $n = 3.3 - 4 = 5$ .

**Chú thích:** Khi sử dụng công thức (8.1) cần quan niệm trái đất là miếng cứng hở. Ví dụ, khi xét hệ trên hình 8.9 thì số chu vi kín trong trường hợp này bằng 3 chứ không phải bằng 4 vì phải quan niệm trái đất là miếng cứng hở như trên hình vẽ. Bậc siêu tĩnh của hệ này bằng  $n = 3.3 - 0 = 9$ .

## 8.2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LỰC VÀ CÁCH TÍNH HỆ SIÊU TĨNH

### 8.2.1. Nội dung phương pháp lực

Để tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ thay thế khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ thay thế này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là *hệ cơ bản*. Tất nhiên, để bảo đảm cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho ta cần bổ sung các điều kiện phụ. Đó là nội dung tóm tắt của *phương pháp lực*.

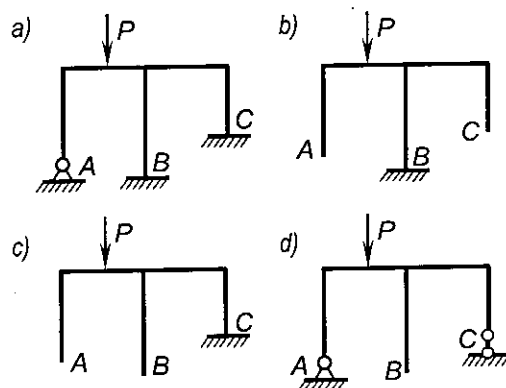
*Hệ cơ bản của phương pháp lực phải là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa.*

Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Điều quan trọng là *hệ cơ bản phải bất biến hình và cho phép ta xác định được nội lực một cách dễ dàng*. Bởi vậy trong đa số trường hợp, ta thường dùng hệ cơ bản tĩnh định.

Đối với hệ siêu tĩnh trên hình 8.10a, ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau. Trên hình 8.10b, c, d giới thiệu ba cách chọn hệ cơ bản tĩnh định cho hệ siêu tĩnh ở hình 8.10a.

Để thiết lập các điều kiện phụ ta cần so sánh sự khác nhau giữa hệ siêu tĩnh đã cho (hình 8.10a) với hệ cơ bản (giả sử dùng hệ cơ bản 8.10b). Ta nhận thấy:



Hình 8.10

Tại các vị trí loại bỏ liên kết (A và C):

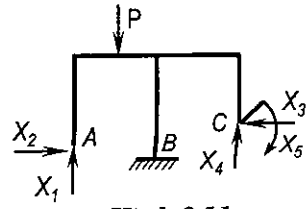
- ♦ trong hệ siêu tĩnh nói chung có các phản lực còn trong hệ cơ bản không có;
- ♦ trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ đều bằng không; trong hệ cơ bản, các chuyển vị này có thể tồn tại.

Như vậy, muốn cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cần:

\* Trong hệ cơ bản, đặt các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số

(hình 8.11). Vì các ẩn số là lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung) nên phương pháp này mang tên là *phương pháp lực*.

\* *Thiết lập điều kiện: chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không.* Nói khác đi, chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của ẩn số  $X_1, X_2, \dots, X_n$  do các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  và do các nguyên nhân bên ngoài (tải trọng  $P$ ; sự thay đổi nhiệt độ  $t$ ; sự chuyển vị gối tựa  $Z$ ) gây ra phải bằng không.



Hình 8.11

Nếu hệ có bậc siêu tĩnh là  $n$  và hệ cơ bản tĩnh định thì ta có  $n$  điều kiện:

$$\Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P) = 0 \quad \text{với} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2)$$

Các điều kiện (8.2) là các *phương trình cơ bản của phương pháp lực*. Hệ phương trình này nghiệm đúng với tất cả các hệ tuân theo cũng như không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

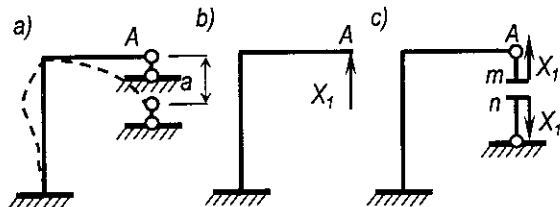
Với hệ có bậc siêu tĩnh là  $n$  ta lập được  $n$  phương trình cơ bản đủ để xác định  $n$  ẩn số  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Sau khi tìm được các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản (hình 8.11). Lúc này các lực tác dụng trên hệ cơ bản đều đã biết, ta có thể dễ dàng tìm được nội lực và biến dạng trong hệ cơ bản, đó chính là nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh đã cho bởi vì các lực  $X_i$  đã thỏa mãn hệ phương trình cơ bản tức là đã thỏa mãn điều kiện làm việc như nhau giữa hệ cơ bản với hệ đã cho.

**Chú ý:**

1) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ siêu tĩnh chịu các chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các gối tựa ta cần chú ý:

◆ Đối với liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức: có thể loại bỏ và thay thế bằng các lực  $X_k$ .

◆ Đối với liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức ta quy định: chỉ được phép cắt và thay thế bằng cặp lực  $X_k$  ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.



Hình 8.12



Thật vậy, giả sử xét hệ trên hình 8.12a, nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết  $a$  có chuyển vị cưỡng bức (hình 8.12b) thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số  $X_1$  sẽ khác không và có giá trị bằng chuyển vị cưỡng bức tương ứng

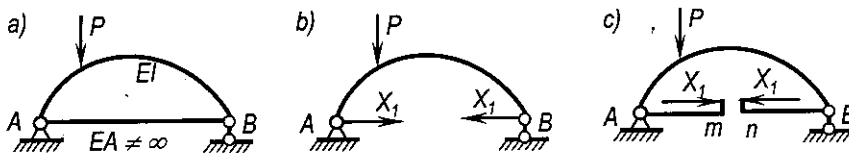
$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, Z) = -a \neq 0.$$

Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị thì điều kiện biến dạng vẫn bằng không (hình 8.12c) bởi vì lúc này chuyển vị tương ứng với cặp ẩn số  $X_1$  là chuyển vị tương đối, tuy gờ  $a$  có chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối giữa hai điểm cắt  $m$  và  $n$  vẫn bằng không

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, Z) = 0.$$

Do đó, để thống nhất điều kiện biến dạng luôn luôn bằng không trong tất cả mọi trường hợp, ta quy định chỉ được phép cắt các liên kết tựa có chuyển vị cưỡng bức.

- 2) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ dàn siêu tĩnh, hệ siêu tĩnh có các thanh hai đầu khớp với độ cứng hữu hạn ( $EA \neq \infty$ ) và tải trọng không tác dụng trên thanh, để thống nhất điều kiện biến dạng luôn luôn bằng không trong mọi trường hợp, ta quy định chỉ được phép cắt các thanh hai đầu khớp và thay thế bằng các cặp lực  $X_k$  ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.



Hình 8.13

Thật vậy, với hệ trên hình 8.13a: nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ thanh căng  $AB$  (hình 8.13b) thì phương trình cơ bản biểu thị chuyển vị tương đối giữa  $A$  và  $B$  theo phương  $AB$ , chuyển vị này khác không vì trong thanh  $AB$  có biến dạng dọc trục; nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh  $AB$  (hình 8.13c) thì chuyển vị tương đối giữa hai điểm  $m$  và  $n$  bằng không và phương trình cơ bản luôn bằng không.

### 8.2.2. Hệ phương trình chính tắc

Trong giáo trình này ta chỉ nghiên cứu những hệ thỏa mãn điều kiện áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, với những hệ này ta có thể biểu thị phương trình cơ bản thứ  $k$  của hệ (8.2) dưới dạng:

$$\begin{aligned} \Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P, t, Z) &= \Delta_{X_k X_1} + \Delta_{X_k X_2} + \dots + \Delta_{X_k X_k} + \dots + \Delta_{X_k X_n} + \\ &+ \Delta_{X_k P} + \Delta_{X_k t} + \Delta_{X_k Z} = 0. \end{aligned}$$

Để cho gọn, ta bỏ bớt các chỉ số  $X$

$$\Delta_{k1} + \Delta_{k2} + \dots + \Delta_{kk} + \dots + \Delta_{kn} + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0.$$

trong đó:

$\Delta_{km}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do lực  $X_m$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{kP}, \Delta_{kt}, \Delta_{kZ}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do riêng tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $\delta_{km}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do riêng lực  $X_m = 1$  gây ra trong hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta_{km} = \delta_{km} X_m.$$

Do đó phương trình cơ bản thứ  $k$  có dạng:

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{kk} X_k + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0.$$

Với hệ có bậc siêu tĩnh bằng  $n$  sau khi lần lượt cho  $k = 1, 2, \dots, n$  ta sẽ có hệ  $n$  phương trình cơ bản của phương pháp lực như sau:

$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0;$	(8.3)
$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2Z} = 0;$	
.....	
$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kk}X_k + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0;$	
.....	
$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nZ} = 0.$	

Hệ phương trình (8.3) gọi là *hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực*. Các hệ số  $\delta_{km}$  (với  $k \neq m$ ) của phương trình chính tắc gọi là *hệ số phụ*. Các hệ số  $\delta_{kk}$  gọi là *hệ số chính*. Các số hạng  $\Delta_{kP}, \Delta_{kt}, \Delta_{kZ}$  gọi là *số hạng tự do*.

Ý nghĩa vật lý của các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình (8.3) là các chuyển vị, do đó để xác định chúng, ta cần vận dụng công thức chuyển vị đã biết trong chương 7.

### 1. Cách tính các hệ số phụ và hệ số chính

Áp dụng công thức chuyển vị (7.23), sau khi thay  $\Delta_{km} = \delta_{km} X_m$ , ta được:

$$\delta_{km} X_m = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds.$$

Chia cả hai vế cho  $X_m$  ta có:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_m}{GA} ds. \quad (8.4)$$

Tương tự:

$$\delta_{kk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_k}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_k}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_k}{GA} ds. \quad (8.5)$$

trong đó:

$\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$  – các biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc, lực cắt do riêng lực  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$  – cũng là những đại lượng trên nhưng do riêng lực  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

Đối với những trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" theo Vêrêxaghin, ta có:

$$\begin{aligned} \delta_{km} &= (\bar{M}_k)(\bar{M}_m) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_m) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_m); \\ \delta_{kk} &= (\bar{M}_k)(\bar{M}_k) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_k) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_k). \end{aligned} \quad (8.6)$$

trong đó:

$(\bar{M}_k), (\bar{N}_k), (\bar{Q}_k)$  – các biểu đồ nội lực do riêng lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$(\bar{M}_m), (\bar{N}_m), (\bar{Q}_m)$  – các biểu đồ nội lực do riêng lực  $X_m = 1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Từ các công thức trên ta thấy luôn luôn có:

$$\delta_{kk} > 0; \quad \delta_{km} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad (8.7)$$

vì trong công thức xác định  $\delta_{kk}$  (8.5), các hàm số dưới dấu tích phân đều là bình phương của nội lực nên luôn luôn dương còn trong công thức xác định  $\delta_{km}$  (8.4) thì các hàm số đó có dấu bất kỳ. Ngoài ra theo định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị, ta có:

$$\delta_{km} = \delta_{mk}. \quad (8.8)$$

## 2. Cách tính các số hạng tự do

Ta lần lượt xác định các số hạng tự do tương ứng với các nguyên nhân:

### a) Tải trọng

$\Delta_{kP}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do riêng các tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó khi áp dụng công thức chuyển vị (7.23) cho trường hợp này ta chỉ cần thay chỉ số  $m$  bằng chỉ số  $P$ . Ngoài ra để nhấn mạnh rằng chuyển vị  $\Delta_{kP}$  là do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, ta thêm chỉ số  $o$  vào các biểu thức nội lực và phản lực.

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_P^o}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_P^o}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_P^o}{GA} ds. \quad (8.9)$$

trong đó:  $M_P^o, N_P^o, Q_P^o$  – biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc, lực cắt do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Trong trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" ta có:

$$\Delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o) + (\bar{N}_k)(N_P^o) + (\bar{Q}_k)(Q_P^o), \quad (8.10)$$

trong đó:  $(M_P^o), (N_P^o), (Q_P^o)$  – các biểu đồ nội lực do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

**Chú ý:** Trong những cấu kiện chịu uốn của hệ, ta thường có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

### b) Thay đổi nhiệt độ

$\Delta_{kt}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$ , do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, sự thay đổi nhiệt độ không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định nên ta xác định  $\Delta_{kt}$  theo (7.27) hoặc (7.28). Theo (7.28):

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (8.11)$$

trong đó  $\Omega(\bar{M}_k)$  và  $\Omega(\bar{N}_k)$  – diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc do riêng lực  $X_k = I$  gây ra trong hệ cơ bản.

Các ký hiệu còn lại cũng có ý nghĩa như đã chỉ dẫn khi thiết lập công thức (7.28).

c) Chuyển vị gối tựa

$\Delta_{kZ}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các liên kết tựa gây ra trong hệ cơ bản. Trong trường hợp hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định nên theo (7.26), ta có:

$$\Delta_{kZ} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_j, \quad (8.12)$$

trong đó:

$Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức cho biết tại liên kết thứ  $j$  của hệ siêu tĩnh;

$\bar{R}_{jk}$  – phản lực tại liên kết  $j$  do lực  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Dấu tổng được thực hiện theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.

### 8.2.3. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh

Khi tính hệ siêu tĩnh ta phải xác định được nội lực tại bất kỳ vị trí nào của hệ. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cách xác định các đại lượng đó sau khi đã biết giá trị của các ẩn  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

#### 1. Cách tính trực tiếp

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn  $X_k$ , ta xem các lực này như ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản với giá trị vừa tìm được. Lúc này, có thể thay việc tính nội lực trên hệ siêu tĩnh bằng cách tính nội lực trên hệ cơ bản chịu các nguyên nhân bên ngoài và các lực  $X_k$ . Vì hệ cơ bản thường là tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã biết để xác định các đại lượng cần tìm.

#### 2. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Giả sử cần tính đại lượng  $S$  tại một vị trí bất kỳ của hệ. Đại lượng  $S$  có thể là phản lực tại một gối tựa nào đó hay mômen uốn, lực dọc, lực cắt. Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta thay việc tính đại lượng  $S$  trong hệ siêu tĩnh bằng cách tính đại lượng  $S$  trong hệ cơ bản nhưng do các tải trọng và các lực  $X_k$  cùng đồng thời tác dụng gây ra.

Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì các nguyên nhân do thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức gối tựa không gây ra nội lực trong hệ cơ bản. Do đó, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$S = S_{(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z)} = S_{X_1} + S_{X_2} + \dots + S_{X_n} + S_P^o,$$

trong đó:  $S_{X_1}, S_{X_2}, \dots, S_{X_n}, S_P^o$  là giá trị của đại lượng  $S$  lần lượt do riêng từng nguyên nhân  $X_1, X_2, \dots, X_n, P$  gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $\bar{S}_k$  là giá trị của đại lượng  $S$  do riêng lực  $X_k = I$  gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$S_{X_k} = \bar{S}_k X_k. \quad (8.13)$$

Thay (8.13) vào biểu thức trên ta được biểu thức tổng quát để xác định nội lực trong hệ siêu tĩnh:

$$S = \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_n X_n + S_P^o. \quad (8.14)$$

Trong trường hợp cần tìm các biểu đồ nội lực, cũng lý luận tương tự, ta có biểu thức tổng quát sau:

$$(S) = (\bar{S}_1) X_1 + (\bar{S}_2) X_2 + \dots + (\bar{S}_n) X_n + (S_P^o) \quad (8.15)$$

$(\bar{S}_k)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do riêng lực  $X_k = I$  gây ra trong hệ cơ bản;

$(S_P^o)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Các biểu thức (8.14) và (8.15) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn  $M$ , ta cần thay thế ký hiệu  $S$  bằng ký hiệu tương ứng  $M$ .

Dùng các biểu thức này có lợi khi đã có sẵn các trạng thái đơn vị tức là đã biết các giá trị  $\bar{S}_k$ . Đối với dầm và khung siêu tĩnh, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số.

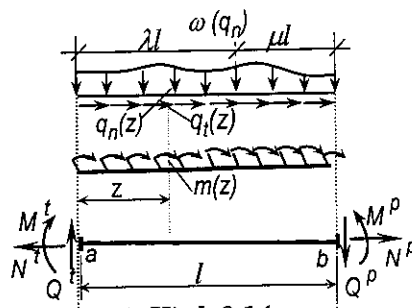
### 3. Cách vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc theo biểu đồ mômen uốn

Trong trường hợp dầm và khung gồm những thanh thẳng, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định chuyển vị, do đó trong các khâu tính toán trung gian ta không cần vẽ các biểu đồ đơn vị  $(\bar{Q}_k)$  và  $(\bar{N}_k)$ . Bởi vậy, nếu vẽ biểu đồ  $(Q)$  và  $(N)$  theo cách trên sẽ bất lợi vì không có sẵn các biểu đồ  $(\bar{Q}_k)$  và  $(\bar{N}_k)$ . Trong những trường hợp này, nên vẽ biểu đồ  $(M)$  trước tiên theo biểu thức (8.15), sau đó căn cứ vào biểu đồ  $(M)$  để suy ra biểu đồ  $(Q)$  và  $(N)$ .

Cách vẽ biểu đồ ( $Q$ ) và ( $N$ ) theo biểu đồ ( $M$ ) dựa trên cơ sở khảo sát sự cân bằng của từng đoạn thanh được tách riêng ra đồng thời chú ý tới liên hệ vi phân đã biết:

$$Q = \frac{dM}{dz} - m; \quad \frac{dN}{dz} = -q_t.$$

Khi thực hiện, cần tách từng đoạn thanh trong đó tải trọng liên tục.



Hình 8.14

Để tiện lợi cho việc áp dụng ta lập công thức xác định lực cắt, lực dọc ở hai đầu của một đoạn thanh thẳng chịu tải trọng phân bố liên tục với quy luật bất kỳ như trên hình 8.14:

- lực phân bố pháp tuyến với cường độ  $q_n(z)$ ;
- lực phân bố tiếp tuyến với cường độ  $q_t(z)$ ;
- mômen phân bố với cường độ  $m(z)$ .

Sau khi tách thanh  $ab$  (hình 8.14) ra khỏi hệ thanh ta cần thay thế tác dụng của phần còn lại bằng các lực cắt, lực dọc chưa biết và các mômen uốn đã biết từ biểu đồ ( $M$ ). Các nội lực chưa biết được giả thiết là dương và vẽ theo quy ước về dấu đã quy định.

Từ các điều kiện cân bằng mômen đối với điểm  $b$  và điểm  $a$ , ta suy ra:

$$\begin{aligned} Q^t &= \frac{l}{l}(M^p - M^t) + \mu \cdot \omega(q_n) - \frac{\omega_m}{l}; \\ Q^p &= \frac{l}{l}(M^p - M^t) - \lambda \cdot \omega(q_n) - \frac{\omega_m}{l}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

trong đó:

- $Q^t, M^t$  và  $Q^p, M^p$  – lần lượt là lực cắt, mômen uốn tại đầu trái và đầu phải thanh  $ab$  đối với người quan sát đứng sao cho lực phân bố hướng xuống phía dưới;
- $\omega(q_n)$  – hợp lực của tải trọng phân bố hay diện tích biểu đồ tải trọng phân bố  $q_n$  trên thanh  $ab$ ;
- $\omega(q_t)$  – hợp lực của tải trọng phân bố hay diện tích biểu đồ tải trọng phân bố  $q_t$  trên thanh  $ab$ ;
- $\lambda$  và  $\mu$  – lần lượt là tỉ số khoảng cách từ hợp lực  $\omega_q$  đến đầu trái và đầu phải thanh  $ab$  so với chiều dài theo phương ngang  $l$  của thanh  $ab$ .

$\omega_m$  – hợp lực của mômen phân bố hay diện tích biểu đồ mômen phân bố  $m$  trên thanh  $ab$ .

Từ các điều kiện cân bằng hình chiếu lên phương ngang, ta có hệ thức:

$$N^p = N^t + \omega(q_t). \quad (8.17)$$

Sau khi xác định được các lực ở hai đầu thanh ta dễ dàng vẽ được biểu đồ nội lực trong thanh theo quy cách đã trình bày trong chương 2.

**Trường hợp đặc biệt:**

- ◆ Khi thanh chịu các tải trọng phân bố đều, ( $q_n = const$ ;  $q_t = const$ ;  $m = const$ ): giá trị của lực cắt và lực dọc được xác định như sau:

$$\begin{cases} Q^t = tg\beta + \frac{l}{2}q_n - m; \\ Q^p = tg\beta - \frac{l}{2}q_n - m; \\ N^p = N^t + q_t l. \end{cases} \quad \text{với:} \quad tg\beta = \frac{M^p - M^t}{l}. \quad (8.18)$$

Ta thấy  $\beta$  chính là góc nghiêng so với đường chuẩn của đường nối hai tung độ mômen uốn ở hai đầu đoạn thanh. Dấu của  $tg\beta$  được xác định như sau: đặt bút dọc theo đường chuẩn của biểu đồ mômen uốn, quay bút trong miền có biểu đồ mômen tới đường nối hai tung độ ở hai đầu đoạn thanh, nếu chiều quay thuận chiều kim đồng hồ thì  $tg\beta$  dương và ngược lại.

- ◆ Khi thanh không chịu tải trọng phân bố ( $q_n = 0$ ;  $q_t = 0$ ;  $m = 0$ ): giá trị của lực cắt và lực dọc được xác định như sau:

$$\begin{cases} Q^t = Q^p = tg\beta \\ N^p = N^t. \end{cases} \quad (8.19)$$

Các hệ thức về lực dọc nêu trên thường chưa đủ để vẽ biểu đồ lực dọc. Trong thực hành, cần vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt đã biết trên cơ sở khảo sát cân bằng của các nút hoặc của từng phần hệ được tách ra khỏi hệ thanh.

### 8.3. ÁP DỤNG

#### 8.3.1. Khung siêu tĩnh chịu tải trọng bất động

*Ví dụ 8.3.* [6] Vẽ biểu đồ nội lực trong khung cho trên hình 8.15a.





Quá trình tính toán được thực hiện theo thứ tự như sau:

1) *Xác định bậc siêu tĩnh.* Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng 2.

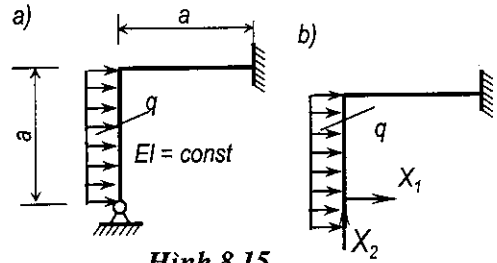
2) *Chọn hệ cơ bản.* Có nhiều cách chọn hệ cơ bản, ở đây ta chọn hệ cơ bản như trên hình 8.15b.

3) *Thiết lập hệ phương trình chính tắc.*

Hệ có  $n = 2$  nên ta có hai phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$



Hình 8.15

Để xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc ta sử dụng các công thức (8.6) và (8.10) với chú ý là bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt khi tính các chuyển vị. Ta có:

$$\delta_{km} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_m); \quad \delta_{kk} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_k); \quad \Delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o).$$

Như vậy, cần vẽ các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$  và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 8.16a, b, c). Ta có:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} + a^2 \cdot a \right] = \frac{4a^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3EI};$$

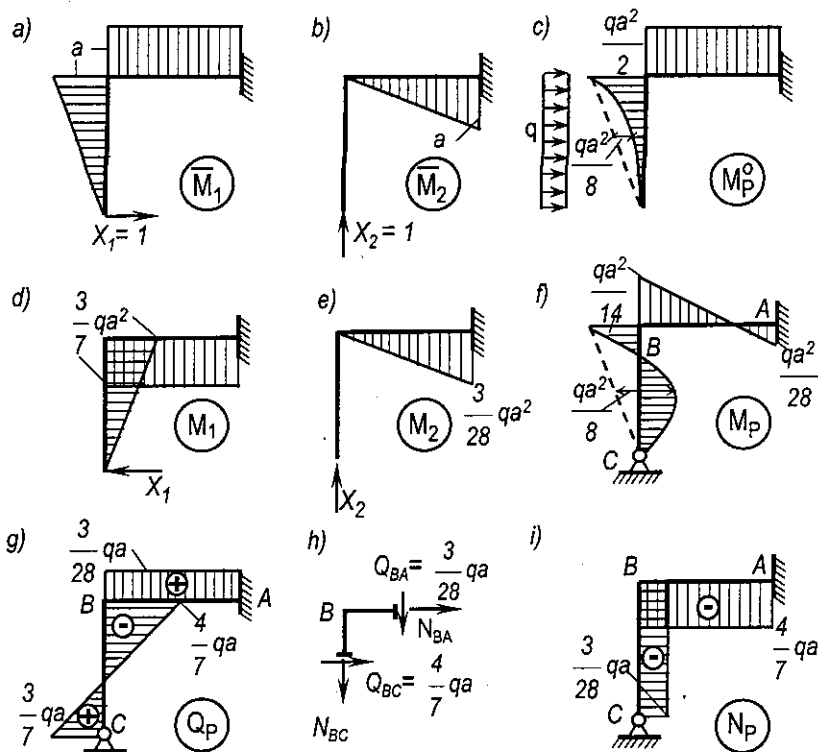
$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} a = -\frac{a^3}{2EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2} a \frac{2a}{3} - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{2} a \cdot a \right] = \frac{5qa^4}{8EI};$$

$$\Delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\frac{1}{EI} \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EI}.$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\frac{4a^3}{3EI} X_1 - \frac{a^3}{2EI} X_2 + \frac{5qa^4}{8EI} = 0; \quad -\frac{a^3}{2EI} X_1 + \frac{a^3}{3EI} X_2 - \frac{qa^4}{4EI} = 0.$$



Hình 8.16

Hay  $\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0$ ;  $-\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0$ .

4) Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn  $X_1, X_2$ . Kết quả:

$$X_1 = -\frac{3}{7}qa; \quad X_2 = \frac{3}{28}qa.$$

5) Vẽ biểu đồ mômen uốn. Trong ví dụ này ta vẽ biểu đồ mômen uốn theo nguyên lý cộng tác dụng. Từ biểu thức (8.14) ta có:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (M_P^0).$$

Như vậy, để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh ta cần:

- Nhân các tung độ của biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  với giá trị  $X_1 = -3qa/7$  sẽ được biểu đồ  $(M_1)$  ngược chiều thứ căng với biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  (hình 8.16d).
- Nhân các tung độ của biểu đồ  $(\bar{M}_2)$  với giá trị  $X_2 = 3qa/28$  sẽ được biểu đồ  $(M_2)$  (hình 8.16e).
- Cộng ba biểu đồ: biểu đồ  $(M_1)$ , biểu đồ  $(M_2)$  và biểu đồ  $(M_P^0)$  ta sẽ được biểu đồ mômen uốn cuối cùng cần tìm  $(M_P)$  (hình 8.16f).

6) Vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ mômen uốn

- Trên thanh ngang: biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn và có giá trị xác định theo (8.19):

$$Q_{BA} = tg\beta_{BA} = +\frac{1}{a}\left(\frac{qa^2}{28} + \frac{qa^2}{14}\right) = +\frac{3}{28}qa.$$

- Trên thanh đứng: biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất, ta chỉ cần xác định giá trị của lực cắt tại các đầu thanh  $Q_{CB}$  và  $Q_{BC}$  rồi nối lại với nhau bằng đường thẳng. Theo công thức (8.18) ta có:

$$Q_{CB} = Q^t = tg\beta_{CB} + \frac{qa}{2} = -\frac{qa^2}{14} \frac{1}{a} + \frac{qa}{2} = +\frac{3}{7}qa;$$

$$Q_{BC} = Q^p = tg\beta_{CB} - \frac{qa}{2} = -\frac{qa^2}{14} \frac{1}{a} - \frac{qa}{2} = -\frac{4}{7}qa.$$

Biểu đồ lực cắt vẽ trên hình 8.16g.

7) Vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt bằng cách tách nút

Trong trường hợp này  $q_t = 0$  nên lực dọc không thay đổi trong từng thanh, do đó chỉ cần xác định một giá trị lực dọc tại một tiết diện nào đó trong mỗi thanh là đủ để vẽ biểu đồ.

Tách nút  $B$  (hình 8.16h), sau khi đặt tại những tiết diện bị cắt các lực cắt có giá trị và chiều đã biết theo biểu đồ  $Q$  đồng thời đặt các lực dọc  $N_{AB}$  và  $N_{BC}$  chưa biết (giả thiết là dương), ta viết phương trình cân bằng hình chiếu:

$$\sum X = N_{AB} + \frac{4}{7}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{AB} = -\frac{4}{7}qa;$$

$$\sum Y = -N_{BC} - \frac{3}{28}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{BC} = -\frac{3}{28}qa.$$

Biểu đồ lực dọc vẽ trên hình 8.16i

**Ví dụ 8.4.** [6] Vẽ biểu đồ ( $M$ ), ( $N$ ), ( $Q$ ) cho khung trên hình 8.17a. Cho biết thanh  $AB$  có độ cứng khi kéo hoặc nén là  $EA = EI/10l^2$ . Ảnh hưởng của lực dọc cần được xét đến trong thanh  $AB$  khi tính chuyển vị.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh có hai đầu khớp như trên hình 8.17b.

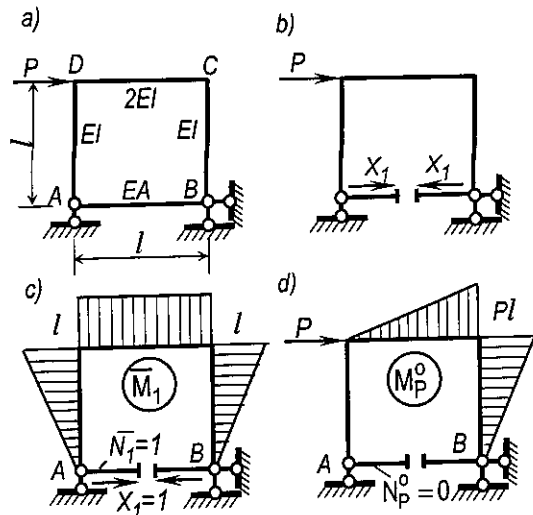
Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Để xác định  $\delta_{11}$  và  $\Delta_{1P}$  ta cần vẽ biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  và  $(M_P^0)$  (hình 8.17c, d).

Ngoài ra, vì chỉ yêu cầu xét đến ảnh hưởng của lực dọc trong thanh AB, nên ta chỉ cần xác định lực dọc trong thanh AB do  $X_1=l$  gây ra và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản, kết quả ghi trên hình 8.17c, d.

Trong trường hợp này, hệ số  $\delta_{11}$  và số hạng tự do  $\Delta_{1P}$  được xác định như sau:



Hình 8.17

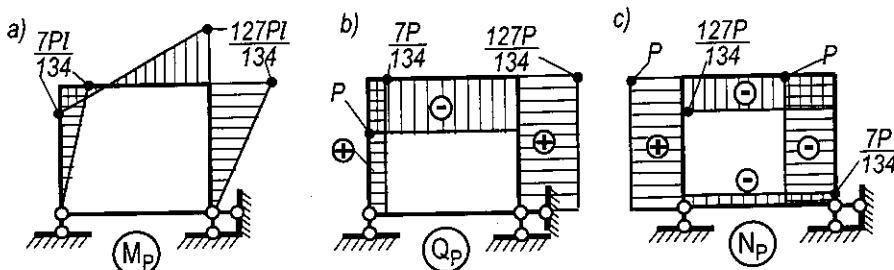
$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) + (\bar{N}_1)(\bar{N}_1) = 2 \frac{1}{EI} \frac{1 \cdot 1 \cdot 2l}{3} + \frac{l^3}{2EI} + \frac{1}{EA} 1 \cdot 1 \cdot l = \frac{67l^3}{6EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^0) = \frac{1}{2EI} \frac{Pl^2}{2} l + \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{7Pl^3}{12EI}.$$

Thay các trị số này vào phương trình chính tắc và giải ra ta được:

$$X_1 = -\frac{7P}{134}.$$

Cũng thực hiện các bước tiếp theo tương tự như trong ví dụ trên, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn, lực cắt và lực dọc như trên hình (8.18a, b, c).



Hình 8.18

### 8.3.2. Hệ siêu tĩnh chịu sự thay đổi nhiệt độ

**Ví dụ 8.5.** [6] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung chịu biến thiên nhiệt độ (hình 8.19a). Các tiết diện có hình chữ nhật, chiều cao  $h$  và độ cứng  $EI$  không đổi, Vật liệu của khung có hệ số giãn nở vì nhiệt là  $\alpha$ .

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng một. Hệ cơ bản chọn như trên hình 8.19b.

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ  $(\bar{M}_1)$ ,  $(\bar{N}_1)$  và áp dụng các công thức (8.6), (8.11). Kết quả vẽ các biểu đồ như trên hình 8.19c, d.

Ta có:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1.l}{2} \frac{2l}{3} + 1.l.l + \frac{1}{2} l.l \frac{2l}{3} \right) = \frac{5l^3}{3EI}.$$

Khi tính  $\Delta_{1t}$ , để tránh sai lầm về dấu, nên quy định chiều nhìn của người quan sát nhằm phân định rõ phía trên và phía dưới để xác định dấu của các đại lượng  $t_2$ ,  $t_1$  và mômen uốn. Trong trường hợp này, nếu quy định người quan sát đứng ở bên trong khung, đầu hướng ra ngoài khung thì  $t_2 = +2t$ ;  $t_1 = t$  còn diện tích các biểu đồ mômen uốn mang dấu dương.

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_1) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_1) = \\ &= \frac{\alpha}{h} (2t - t) \left[ -\frac{1}{2} l.l - l.l - \frac{1}{2} l.l \right] + \alpha \frac{2t + t}{2} [-l.l] = -\alpha t l \left( \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right). \end{aligned}$$

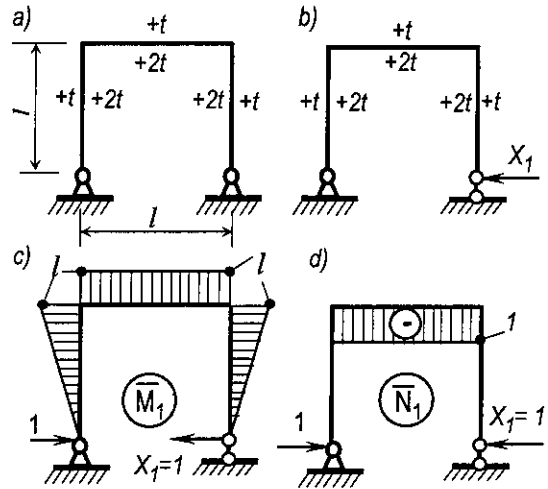
Thay các kết quả vào phương trình chính tắc, ta được:

$$X_1 = \frac{3EI\alpha t \left( \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right)}{5l^2}.$$

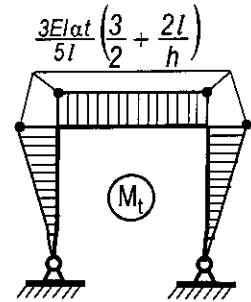
Vẽ biểu đồ mômen uốn theo biểu thức:

$$(M_t) = (\bar{M}_1) X_1.$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 8.20. Để vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc ta cũng tiến hành theo cách đã trình bày trong ví dụ 8.3.



Hình 8.19



Hình 8.20

**Nhận xét:** Biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh có thể căng ở về phía có độ biến thiên nhiệt độ thấp. Thật vậy, sự biến thiên nhiệt độ có khuynh hướng gây ra biến dạng làm căng thép có độ biến thiên nhiệt độ cao, nhưng mômen uốn là nội lực có khuynh hướng chống lại biến dạng đó nên căng về phía có độ biến thiên nhiệt độ thấp.

### 8.3.3. Hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa

**Ví dụ 8.6.** [6] Cho khung siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa như trên hình 8.21. Xác định các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng hai.

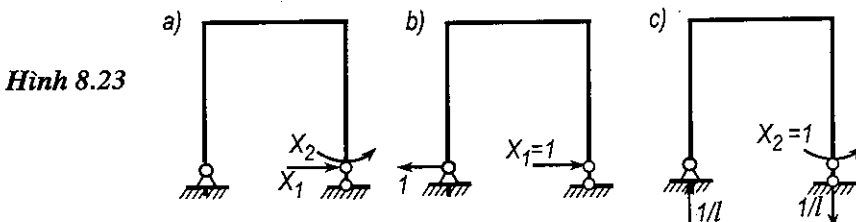
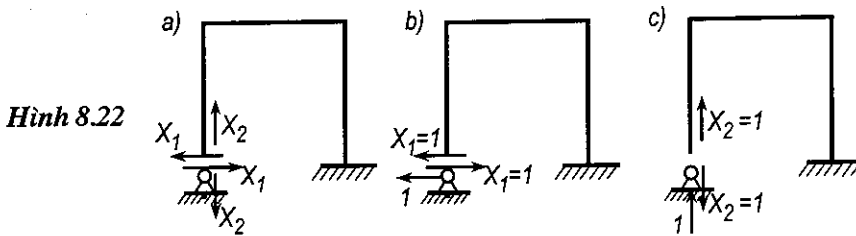
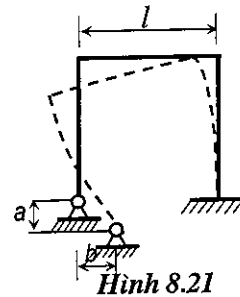
Ta sẽ xác định các số hạng tự do với hai cách chọn hệ cơ bản như sau:

a) Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị (hình 8.22a).

Để xác định  $\Delta_{kZ}$ , ta cần tìm phản lực  $\bar{R}_{jk}$  tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản. Trên hình 8.22b, c, cho kết quả tìm các phản lực khác không. Áp dụng công thức (8.12) ta được:

$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[-1 \cdot b] = b;$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -[-1 \cdot a] = a.$$



b) Chọn hệ cơ bản bằng cách loại trừ liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức (hình 8.23a).

Trên các hình 8.23b, c ghi kết quả tính các phản lực cần thiết. Theo công thức (8.12), ta có:

$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[-1 \cdot b] = b;$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -\left[-\frac{1}{l} \cdot a\right] = \frac{a}{l};$$

### 8.3.4. Dàn siêu tĩnh

Trước tiên ta cần lưu ý một số đặc điểm của hệ dàn:

#### 1. *Bậc siêu tĩnh*

Trong bài toán dàn, nên vận dụng trực tiếp các công thức (1.4) và (1.5) để xác định bậc siêu tĩnh.

◆ Đối với hệ dàn không nối với đất:  $n = D + 3 - 2M$ ; (8.20)

◆ Đối với hệ dàn nối với đất:  $n = D + C - 2M$ , (8.21)

trong đó:

$n$  – bậc siêu tĩnh;  $D$  – số thanh trong dàn;

$C$  – số liên kết tựa tương đương loại một;  $M$  – số mắt dàn.

#### 2. *Hệ phương trình chính tắc*

Hệ phương trình chính tắc vẫn có dạng (8.3). Song các công thức xác định các hệ số và số hạng tự do đơn giản hơn vì các thanh trong dàn chỉ chịu lực dọc. Để lập các công thức ta giả thiết hệ cơ bản được chọn là tĩnh định.

◆ *Các hệ số:* 
$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{(EA)_i} l_i, \quad (8.22)$$

$\bar{N}_{ik}$  và  $\bar{N}_{im}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do các ản  $X_k=1$  và  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

◆ *Các số hạng tự do do nguyên nhân:*

• *Tải trọng* 
$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{iP}^o}{(EA)_i} l_i, \quad (8.23)$$

• *Thay đổi nhiệt độ:* 
$$\Delta_{kt} = \sum \alpha_{ci} \Omega (\bar{N}_{ki}) = \sum \alpha_{ci} l_i \bar{N}_{ki} \quad (8.24)$$

• Chuyển vị gối tựa  $\Delta_{kz} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_j$  (8.25)

Trong các công thức trên:

$N_{iP}^0$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

$t_{ci}$  – độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh thứ  $i$ ;

$Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức cho biết tại liên kết thứ  $j$  của hệ siêu tĩnh;

$\bar{R}_{jk}$  – phản lực tại liên kết  $j$  do lực  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

**Chú ý:** Dấu tổng trong các công thức (8.22), (8.23) áp dụng cho tất cả các thanh trong dàn, kể cả các thanh bị cắt khi chọn hệ cơ bản. Dấu tổng trong công thức (8.24) áp dụng cho các thanh có nhiệt độ thay đổi. Dấu tổng trong công thức (8.25) được thực hiện theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.

### 3. Xác định nội lực trong dàn siêu tĩnh

Lực dọc trong thanh thứ  $i$  của dàn được xác định theo biểu thức:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{iP}^0. \quad (8.26)$$

**Ví dụ 8.7.** [6] Cho dàn siêu tĩnh chịu tải trọng như trên hình 8.24a. Xác định lực dọc trong các thanh 2-8, 2-3 và 2-9. Cho biết  $EA = const$ .

1) *Tìm bậc siêu tĩnh.* Áp dụng công thức (8.21) cho trường hợp này ta có:

$$D = 21; C = 3; M = 10. \quad \text{Do đó: } n = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4.$$

2) *Chọn hệ cơ bản.* Hệ đối xứng và tải trọng tác dụng đối xứng, nếu chọn hệ cơ bản đối xứng và dùng các cặp ẩn đối xứng thì phương trình chính tắc và số ẩn chỉ còn hai. Với hệ cơ bản chọn như trên hình 8.24b, nội lực ở các trạng thái đơn vị chỉ phân bố cục bộ trong từng khoang dàn.

3) *Hệ phương trình chính tắc:*

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần tính nội lực do các cặp lực  $X_1, X_2$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Sơ đồ tính những nội lực này lần lượt vẽ trên hình 8.24c, d, e.

Theo (8.22) và (8.23) đồng thời chú ý là  $EA = const$ , ta có:

$$\delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} \bar{N}_{im} l_i; \quad \Delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} N_{iP}^0 l_i.$$



Các khâu tính toán được thực hiện trên bảng 8.2. Do tính đối xứng nên chỉ cần tính với nửa hệ rồi nhân đôi kết quả. Để tiện tính toán ta chia đôi kết quả tính của thanh 3-8 trước, sau đó chỉ cần nhân đôi kết quả tổng cộng. Có thể thực hiện điều này bằng cách chia đôi chiều dài của thanh 3-8.

Trên cột 1 ghi tên các thanh. Trên cột 2 ghi chiều dài các thanh. Trên cột 3, 4 và 5 lần lượt ghi nội lực trong các thanh do lực  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Để xác định những nội lực này ta vận dụng phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã biết.

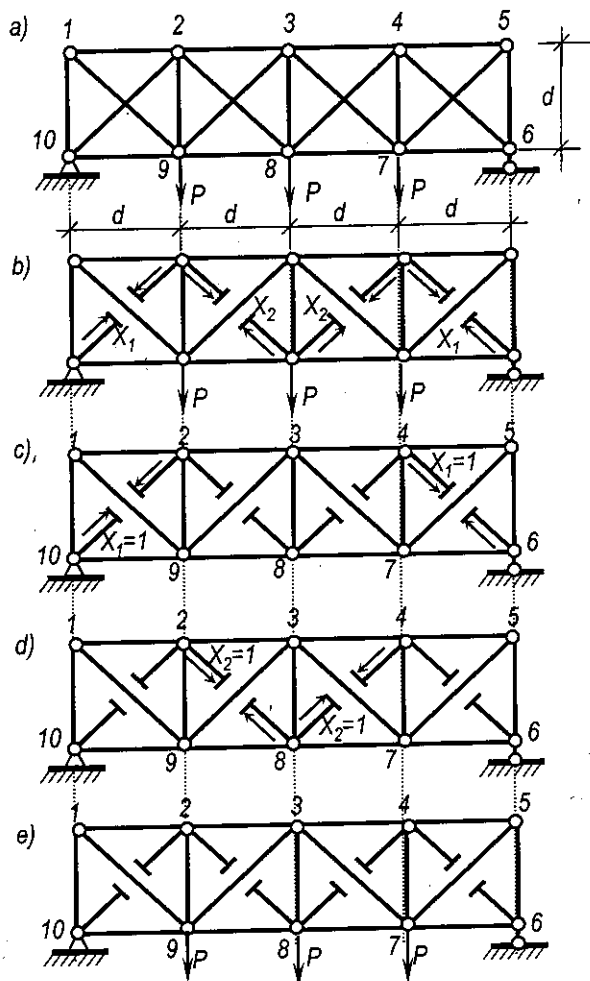
Trên các cột 6, 7 và 8 lần lượt tính các tích số  $(\bar{N}_{i1})^2 l_i$ ,  $(\bar{N}_{i2})^2 l_i$ ,  $(\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2}) l_i$  cho từng thanh để phục vụ cho việc tìm  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$  và  $\delta_{22}$ . Lấy tổng kết quả tính trong những cột này rồi nhân với thừa số  $2/EA$  ta được:

$$\delta_{11} = 4(1 + \sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 9,656 \frac{d}{EA}; \quad \delta_{22} = (5 + 4\sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 10,656 \frac{d}{EA};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{d}{EA}.$$

Trên các cột 9, 10 ta xác định các tích số  $\bar{N}_{i1} N_{iP}^0 l_i$  và  $\bar{N}_{i2} N_{iP}^0 l_i$  cho từng thanh để phục vụ cho việc tính  $\Delta_{1P}$  và  $\Delta_{2P}$ . Lấy tổng các kết quả tính trong các cột rồi nhân với thừa số  $2/EA$  ta được:

$$\Delta_{1P} = 3(2 + \sqrt{2}) \frac{Pd}{EA} = 10,242 \frac{Pd}{EA};$$



Hình 8.24

$$\Delta_{2P} = -\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \frac{Pd}{EA} = -4,120 \frac{Pd}{EA}$$

**Bảng 4.2**

Thanh	$l_i$	$\bar{N}_{i1}$	$\bar{N}_{i2}$	$N_{iP}^o$	$\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i1} l_i$	$\bar{N}_{i2} \bar{N}_{i2} l_i$	$\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2} l_i$	$\bar{N}_{i1} N_{iP}^o l_i$	$\bar{N}_{i2} N_{iP}^o l_i$
1-2	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3}{2}P$	$\frac{1}{2}d$	0	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$	0
2-3	d	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{2}P$	0	$\frac{1}{2}d$	0	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$
1-10	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3}{2}P$	$\frac{1}{2}d$	0	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$	0
2-9	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}d$	0	0
1-9	$\sqrt{2}d$	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}P$	$\sqrt{2}d$	0	0	$3Pd$	0
10-2	$\sqrt{2}d$	1	0	0	$\sqrt{2}d$	0	0	0	0
2-8	$\sqrt{2}d$	0	1	0	0	$\sqrt{2}d$	0	0	0
9-3	$\sqrt{2}d$	0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}P$	0	$\sqrt{2}d$	0	0	$-Pd$
10-9	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}d$	0	0	0	0
9-8	d	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	0	$\frac{1}{2}d$	0	0	$-\sqrt{2}Pd$
3-8	$\frac{1}{2}d$	0	$-\sqrt{2}$	$P$	0	d	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}Pd$
$\Sigma$					$2(1+\sqrt{2})d$	$(2,5+2\sqrt{2})d$	$\frac{1}{2}d$	$3(1+\frac{\sqrt{2}}{2})Pd$	$-(1+\frac{3\sqrt{2}}{4})Pd$

Thay các giá trị của  $\delta_{km}$  và  $\Delta_{kP}$  vào hệ phương trình chính tắc ta được:

$$9,656 X_1 + X_2 + 10,242 P = 0; \quad X_1 + 10,656 X_2 - 4,120 P = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình:  $X_1 = -1,11P$ ;  $X_2 = 0,49P$ .

4) *Xác định nội lực.* Áp dụng công thức (8.24) đồng thời sử dụng kết quả tính các  $\bar{N}_{i1}$ ,  $\bar{N}_{i2}$  và  $N_{iP}^o$  trên bảng 8.2 ta có:

$$N_{28} = 0.(-1,11P) + 1.(0,49P) - 0 = 0,49P;$$

$$N_{23} = 0.(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) - \frac{3}{2}P = -1,85P;$$

$$N_{29} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) + 0 = 0,44P.$$

### 8.3.5. Hệ liên hợp siêu tĩnh

Hệ liên hợp siêu tĩnh tuy đa dạng nhưng về cách tính theo phương pháp lực thì cũng tương tự như nhau. Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ liên hợp siêu tĩnh theo phương pháp lực thông qua trường hợp hệ dầm cứng - vòm dẹt trên hình 8.25a.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh chịu nén ở giữa nhịp (hình 8.25b). Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

trong đó:

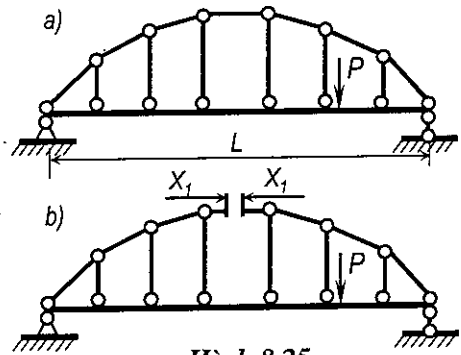
- ◆  $\delta_{11}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_1$  do lực  $X_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Chuyển vị này bao gồm ba thành phần:

- Do biến dạng dọc trục trong những thanh thuộc hệ vòm dẹt và trong những thanh chống đứng. Nếu gọi  $\bar{N}_{i1}$  là lực dọc trong thanh thứ  $i$  của hệ vòm dẹt hoặc hệ thanh chống đứng do lực  $X_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ bằng  $\sum (\bar{N}_{i1})^2 l_i / (EA)_i$ . Trong đó  $l_i$  và  $A_i$  là chiều dài và diện tích tiết diện của thanh thứ  $i$ . Dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh thuộc hệ thống nói trên.
- Do biến dạng uốn của dầm dưới tác dụng của lực  $X_1=1$ . Nếu gọi  $(\bar{M}_1)$  là biểu đồ mômen uốn trong dầm do lực  $X_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ là  $(\bar{M}_1) (\bar{M}_1)$ .
- Do biến dạng nén của dầm dưới tác dụng của lực xô. Từ hình 8.25b ta thấy lực xô do  $X_1=1$  gây ra bằng  $1$ , do đó áp dụng công thức chuyển vị ta sẽ xác định được thành phần này bằng  $1 \cdot 1L / (EA)_{dầm}$ .

Vậy: 
$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\bar{N}_{i1}^2 l_i}{EA_i} + (\bar{M}_1) (\bar{M}_1) + \frac{L}{(EA)_{dầm}}.$$

- ◆  $\Delta_{1P}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_1$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.



Hình 8.25

Chuyển vị này chỉ có một thành phần do biến dạng uốn của dầm nếu tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm. Hai thành phần còn lại bằng không vì tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản không gây ra lực dọc trong các thanh thuộc hệ vòm dẹt, hệ thanh chống đứng và trong dầm. Nếu gọi  $(M_P^o)$  là biểu đồ mômen uốn trong dầm do tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản thì:

$$\Delta_{IP} = (\overline{M}_I) (M_P^o).$$

Sau khi tìm được  $X_I$ , có thể xác định nội lực trong hệ liên hợp theo công thức chung đã thiết lập trong mục 8.2. Trong trường hợp này, ta có:

\* Nội lực tại tiết diện  $k$  trong dầm cứng:

$$M_k = \overline{M}_{kl} X_I + M_k^o; \quad Q_k = \overline{Q}_{kl} X_I + Q_k^o; \quad N_k = \overline{N}_{kl} X_I,$$

trong đó:

$\overline{M}_{kl}, \overline{Q}_{kl}, \overline{N}_{kl}$  – nội lực tại tiết diện  $k$  của dầm cứng do lực  $X_I=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$M_k^o, Q_k^o$  – nội lực tại tiết diện  $k$  của dầm cứng do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

\* Lực dọc trong thanh thứ  $i$  thuộc hệ vòm dẹt hoặc hệ thanh chống đứng

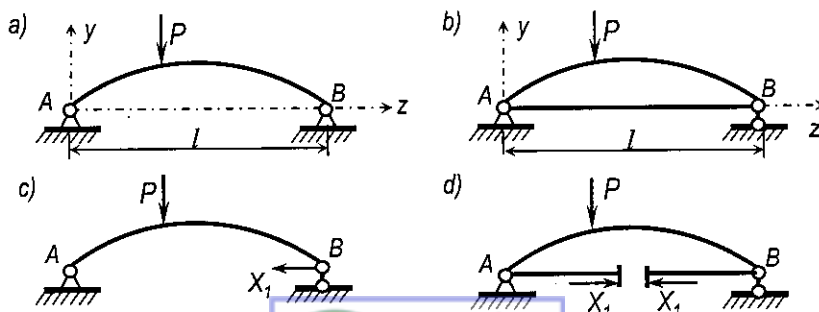
$$N_i = \overline{N}_{iI} X_I,$$

$\overline{N}_{iI}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do lực  $X_I=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

### 8.3.6. Vòm siêu tĩnh

Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ vòm hai khớp (hình 8.26a) và hệ vòm hai khớp có thanh căng (hình 8.26b) chịu tải trọng theo phương pháp lực.

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản của vòm hai khớp như trên hình 8.26c. Hệ cơ bản của vòm hai khớp có thanh căng chọn bằng cách cắt thanh căng như trên hình 8.26d.



Hình 8.26  
VIỆN  
HUBT  
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

Phương trình chính tắc:  $\delta_{11} X_I + \Delta_{1P} = 0$ .

1) **Xác định  $\delta_{11}$ .** Theo (8.5):

$$\delta_{11} = \sum \int \overline{M}_I^2 \frac{ds}{EI} + \sum \int \overline{N}_I^2 \frac{ds}{EA} + \sum \int \nu \overline{Q}_I^2 \frac{ds}{GA}$$

a) Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng: Các nội lực do lực  $X_I = 1$  gây ra trong hệ cơ bản bao gồm:

- Nội lực trong vòm:  $\overline{M}_I = -1 \cdot y$ ;  $\overline{N}_I = -1 \cdot \cos \varphi$ ;  $\overline{Q}_I = -1 \cdot \sin \varphi$ .
- Nội lực trong thanh căng:  $\overline{N}_I^{tc} = 1$ .

Do đó:

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} + \int_0^l \cos \varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l \nu \sin^2 \varphi \frac{dz}{GA \cos \varphi} + \frac{l}{(EA)_{tc}}$$

trong đó  $(EA)_{tc}$  – độ cứng của thanh căng khi chịu kéo.

b) Trường hợp vòm hai khớp: Có thể xem vòm hai khớp như trường hợp đặc biệt của vòm hai khớp có thanh căng với  $(EA)_{tc} = \infty$ . Do đó ta có:

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} + \int_0^l \cos \varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l \nu \sin^2 \varphi \frac{dz}{GA \cos \varphi}$$

2) **Xác định  $\Delta_{1P}$ .** Đối với cả hai loại vòm, số hạng này đều được xác định theo công thức (8.9):

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{(-y)M_P^o dz}{EI \cos \varphi} + \sum \int \frac{(-\cos \varphi)N_P^o dz}{EA \cos \varphi} + \sum \int \nu \frac{(-\sin \varphi)Q_P^o dz}{GA \cos \varphi}$$

3) **Xác định nội lực.** Sau khi giải phương trình chính tắc để tìm  $X_I$  ta có thể xác định nội lực trong vòm theo các biểu thức sau:

$$M = -y X_I + M_P^o; \quad N = -\cos \varphi X_I + N_P^o; \quad Q = -\sin \varphi X_I + Q_P^o,$$

trong đó:

$M, N, Q$  – các biểu thức giải tích của nội lực do các nguyên nhân gây ra trong vòm siêu tĩnh;

$M_P^o, N_P^o, Q_P^o$  – các biểu thức giải tích của nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nội lực trong thanh căng (nếu có) được xác định bằng ẩn  $X_I$ :  $N_{tc} = X_I$ .

## 8.4. CÁCH XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

Công thức chuyển vị Maxwell - Morh là tổng quát, áp dụng cho hệ siêu tĩnh cũng như tĩnh định. Khi sử dụng công thức này ta cần quan niệm hệ tương ứng với hai trạng thái: trạng thái "m" là trạng thái thực của hệ, trạng thái "k" là trạng thái khả dĩ tạo ra bằng cách đặt một lực  $P_k = 1$  có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm. Ngoài ra cần chú ý là trạng thái "k" phải xảy ra trên hệ giống như hệ đã cho.

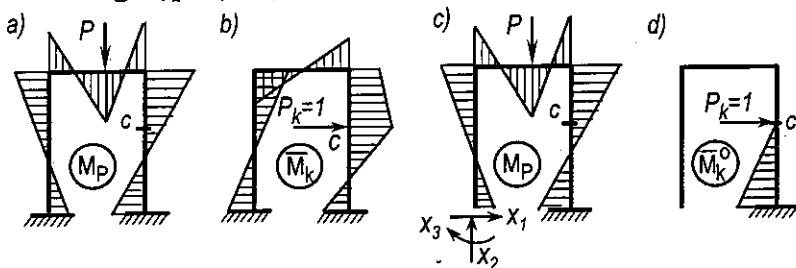
Như vậy, muốn tìm chuyển vị trong hệ siêu tĩnh theo công thức (7.23) ta cần:

- \* Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu (hình 8.27a).
- \* Tính trạng thái "k" tức là tính hệ siêu tĩnh đó một lần nữa với lực  $P_k = 1$ . Trên hình 8.27b vẽ trạng thái "k" với giả thiết cần tìm chuyển vị ngang tại C:

Do đó, để tính một chuyển vị nào đó trong hệ siêu tĩnh ta cần phải tính hệ siêu tĩnh hai lần với hai nguyên nhân khác nhau. Khối lượng tính toán sẽ nặng nề.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một cách khác đơn giản hơn.

### 8.4.1. Trường hợp hệ chịu tải trọng.



Hình 8.27

Ta sẽ chứng minh:

Để xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh chịu tải trọng ta cần:

- \* Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu.
- \* Tính trạng thái "k". Trạng thái này chỉ cần thực hiện trên một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.
- \* Áp dụng các công thức chuyển vị đã biết ở chương 7. Nghĩa là:

$$\Delta_{kP} = (M_P)(\bar{M}_k^0) \quad (8.27)$$

trong đó:

- $(M_P)$  – biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;
- $(\bar{M}_k^o)$  – biểu đồ mômen uốn do lực  $P_k = 1$  có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm, gây ra trong hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.

Để cho đơn giản, ta viết công thức chuyển vị cho trường hợp dầm và khung đồng thời biểu thị theo cách nhân biểu đồ; điều này không ảnh hưởng gì đến các kết luận chung.

Để chứng minh, ta xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 8.27a. Giả sử chọn hệ cơ bản như trên hình 8.27c. So sánh hai hệ  $a)$  và  $c)$  ta thấy: nếu các lực  $X_1, X_2$  và  $X_3$  là nghiệm của hệ phương trình chính tắc khi tính hệ siêu tĩnh  $a)$  theo hệ cơ bản  $c)$ , thì hai hệ này sẽ làm việc hoàn toàn giống nhau nghĩa là nội lực, biến dạng chuyển vị trong hai hệ hoàn toàn như nhau. Do đó, muốn xác định chuyển vị trong hệ  $a)$ , ta chỉ cần xác định chuyển vị trong hệ cơ bản  $c)$ . Để tìm chuyển vị trong hệ  $c)$  ta cần tạo trạng thái "k" trên hệ tương ứng với hệ  $c)$  (hình 8.27d) tức là trên hệ cơ bản. Đó là điều cần chứng minh.

**Chú ý:**

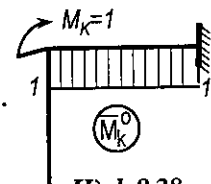
1. Vì có thể tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho, nên hệ cơ bản này có thể chọn khác với hệ cơ bản đã dùng khi tìm  $(M_P)$ . Nên chọn hệ cơ bản sao cho biểu đồ  $\bar{M}_k^o$  đơn giản để nhân biểu đồ được dễ dàng.
2. Cũng có thể chứng minh được:  $\Delta_{kP} = (M_P^o)(\bar{M}_k)$ , (8.28)

**Ví dụ 8.8.** Xác định góc xoay tại nút của khung đã xét trong ví dụ 8.3.

Trong ví dụ 8.3 đã vẽ biểu đồ  $(M_P)$  của hệ (hình 8.16f). Để tìm góc xoay ở nút ta cần tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản suy ra từ siêu tĩnh đã cho và vẽ biểu đồ  $(\bar{M}_k^o)$  (hình 8.28).

Nhân biểu đồ  $(M_P)$  với biểu đồ  $(\bar{M}_k^o)$ , ta được:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} \cdot a \cdot 1 \right] = -\frac{qa^3}{56EI}$$

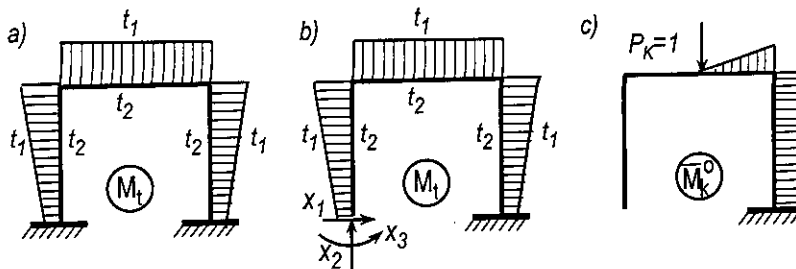


Góc xoay cần tìm quay ngược chiều kim đồng hồ.

#### 8.4.2. Trường hợp hệ chịu biến thiên nhiệt độ và chuyển vị gối tựa

Ta vận dụng cách lập luận tương tự như trên để nghiên cứu chuyển vị trong trường hợp này.

Xét khung siêu tĩnh chịu tác dụng của sự biến thiên nhiệt độ (hình 8.29a).



Hình 8.29

Giả sử khi tính nội lực ta chọn một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho như trên hình 8.29b. Nếu các lực  $X$  là nghiệm của hệ phương trình chính tắc thì hệ  $b$ ) sẽ làm việc giống như hệ  $a$ ). Do đó, muốn tìm chuyển vị trong hệ  $a$ ) ta chỉ cần tìm chuyển vị trong hệ  $b$ ) và trạng thái "k" cần tạo ra khi xác định chuyển vị của hệ  $b$ ) có thể thực hiện trên hệ cơ bản (hình 8.29c).

Chuyển vị trong hệ  $b$ ) do hai nguyên nhân gây ra:

- Do các ẩn số  $X$ : Vì nội lực do các lực  $X$  gây ra chính là nội lực trong hệ siêu tĩnh nên thành phần chuyển vị này bằng  $(\bar{M}_k^o)(M_t)$ .
- Do nhiệt độ: Cần chú ý rằng nhiệt độ chỉ không gây ra nội lực trong hệ cơ bản tĩnh định nhưng vẫn gây ra chuyển vị. Gọi  $\Delta_{kt}^o$  là thành phần chuyển vị do thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\Delta_{kt} = (M_t)(\bar{M}_k^o) + \Delta_{kt}^o, \quad (8.29)$$

với 
$$\Delta_{kt}^o = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_k^o) + \sum \alpha_c \Omega(\bar{N}_k^o),$$

trong đó:

$(M_t)$  – biểu đồ mômen uốn do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$\Omega(\bar{M}_k^o), \Omega(\bar{N}_k^o)$  – diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc trong các thanh của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của công thức (8.29).

Cũng lập luận tương tự như vậy ta lập được công thức tính chuyển vị khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa:



$$\Delta_{kZ} = (M_Z)(\bar{M}_k^o) + \Delta_{kZ}^o, \quad \text{với} \quad \Delta_{kZ}^o = -\sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j. \quad (8.30)$$

Trong đó:

$(M_Z)$  – biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$\bar{R}_{jk}^o$  – phản lực tại gối thứ  $j$  của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của các công thức (8.30).

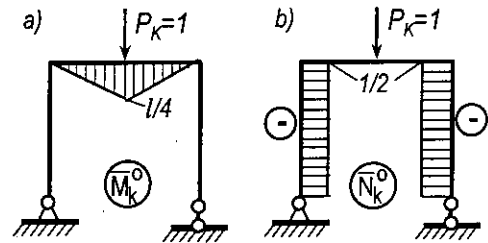
**Ví dụ 8.9.** Xác định độ võng tại giữa nhịp thanh ngang của khung đã xét ở ví dụ 8.5.

Nguyên nhân gây ra chuyển vị trong khung là nhiệt độ, do đó ta sử dụng công thức (8.29) để xác định chuyển vị cần tìm.

Thứ tự thực hiện như sau:

1) Vẽ biểu đồ  $(M_t)$ . Bài toán này đã xét trong ví dụ 5.6, kết quả tìm được như trên hình 8.20.

2) Tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản tĩnh định và vẽ các biểu đồ  $(\bar{M}_k^o)$ ,  $(\bar{N}_k^o)$  (hình 8.30a, b).



Hình 8.30

3) Xác định chuyển vị theo (8.29):

$$\begin{aligned} \Delta_{kt} &= (M_t)(\bar{M}_k^o) + \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega (\bar{M}_k^o) + \sum \alpha t_c \Omega (\bar{N}_k^o) = \\ &= -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{3EI\alpha t}{5l} \left[ \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right] + \frac{\alpha}{h} t \frac{1}{2} \frac{1}{4} l + \frac{3}{2} \alpha t \left[ -\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right] = -\frac{\alpha t l}{80} \left[ 129 + 2 \frac{l}{h} \right]. \end{aligned}$$

Dấu trừ chứng tỏ chuyển vị ngược chiều với  $P_k$  tức là hướng lên trên.

### 8.4.3. Trường hợp hệ dàn siêu tĩnh

Để tìm chuyển vị trong hệ dàn siêu tĩnh ta có thể sử dụng các kết luận về khả năng tạo trạng thái khả dĩ trong hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ như đã nêu ở trên và các công thức áp dụng cho riêng hệ dàn.

Trong trường hợp này, ta có:

$$\Delta_{km} = \sum_i \bar{N}_{ik}^o N_{im} \frac{l_i}{(EA)_i} + \sum_i \alpha t_c l_i \bar{N}_{ik}^o + -\sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j \quad (8.31)$$

trong đó:

$\Delta_{km}$  – chuyển vị do các nguyên nhân "m" gây ra trong hệ siêu tĩnh;

$N_{im}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do các nguyên nhân "m" gây ra trong dàn siêu tĩnh;

$\bar{N}_{ik}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do lực  $P_k=1$  gây ra ở trạng thái "k";

$\bar{R}_{jk}^o$  – phản lực tại liên kết tựa thứ  $j$  do lực  $P_k=1$  gây ra ở trạng thái "k".

Trạng thái "k" được tạo ra trong một hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ suy ra từ dàn siêu tĩnh đã cho.

## 8.5. MỘT SỐ BIỆN PHÁP ĐƠN GIẢN HÓA KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẬC CAO

### 8.5.1. Biện pháp giảm nhẹ khối lượng tính toán

Trong thực tế ta thường gặp những hệ siêu tĩnh có bậc cao, khi tính những hệ này cần chú ý tìm các biện pháp để *giảm nhẹ khối lượng tính toán*. Hệ cơ bản giữ một vai trò quan trọng trong các khâu tính toán. Với một hệ siêu tĩnh có thể có nhiều phương án chọn hệ cơ bản khác nhau miễn là hệ cơ bản phải bất biến hình. Việc chọn dùng hệ cơ bản có ảnh hưởng quan trọng đến khối lượng tính toán trong các khâu sau: xác định nội lực (vẽ biểu đồ), xác định các hệ số và số hạng tự do và đặc biệt là trong khâu giải hệ phương trình chính tắc. Như vậy, *hệ cơ bản hợp lý* là hệ cơ bản chọn sao cho việc tính toán được đơn giản trong các khâu đã nêu ở trên.

Để đạt được yêu cầu nêu trên, *nên chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ thành nhiều bộ phận độc lập với nhau*. Lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ, việc xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không.

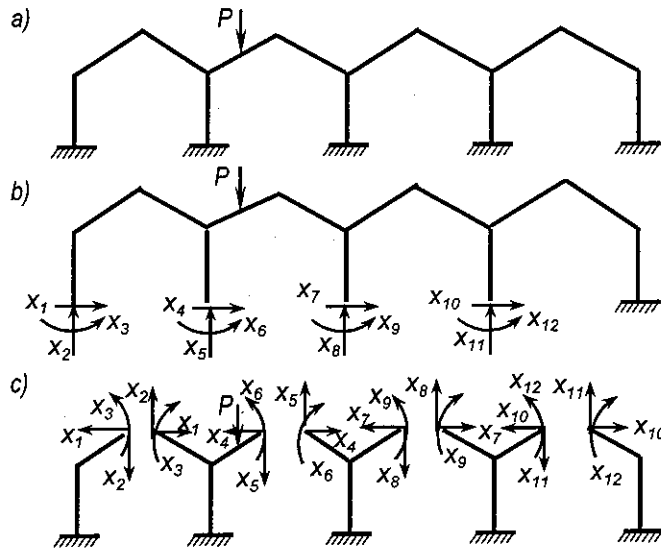
Ví dụ với hệ siêu tĩnh trên hình 8.31a, ta có thể nêu ra hai cách chọn hệ cơ bản như trên hình 8.31b và c để so sánh.

*Hệ cơ bản 8.31b*: Nội lực trong hệ này nói chung phân phối trên toàn hệ (chẳng hạn, dưới tác dụng của riêng lực  $X_I = 1$ , biểu đồ  $\bar{M}_I$  phân bố trên phần lớn các thanh của hệ cơ bản). Do đó, xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức, tất cả các hệ số phụ đều tồn tại.

*Hệ cơ bản 8.31c*: Hệ cơ bản này gồm nhiều bộ phận độc lập với nhau, mỗi biểu đồ nội lực đơn vị chỉ phân bố trong hai bộ phận lân cận của hệ cơ

bản. Do đó, việc vẽ các biểu đồ đơn vị sẽ đơn giản hơn, xác định các hệ số và số hạng tự do cũng dễ dàng và nhanh chóng, nhiều hệ số phụ bằng không (chẳng hạn  $\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \dots = 0$ ).

Vậy hệ cơ bản 8.31c hợp lý hơn hệ cơ bản 8.31b.



Hình 8.31

### 8.5.2. Biện pháp sử dụng tính đối xứng của hệ

Trong thực tế ta thường gặp những hệ có hình dạng, kích thước hình học và độ cứng đối xứng qua một trục hoặc hai trục. Nếu biết cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ thì khối lượng tính toán sẽ được giảm nhẹ khá nhiều. Khi tính các hệ siêu tĩnh đối xứng ta có thể vận dụng biện pháp sử dụng các cặp ẩn đối xứng và phản xứng (sẽ trình bày trong mục này) hoặc biện pháp biến đổi sơ đồ tính (xem [6, 9]).

Những biện pháp này cho phép thay thế việc giải hệ  $n$  phương trình bằng cách giải hai hệ phương trình nếu hệ có một trục đối xứng hoặc bốn hệ phương trình nếu hệ có hai trục đối xứng, trong đó tổng số các phương trình này bằng  $n$ . Cần chú ý là các biện pháp vận dụng tính chất đối xứng không làm tăng khối lượng tính toán trong các khâu khác mà còn góp phần giảm nhẹ hơn.

Giả sử xét hệ siêu tĩnh đối xứng như trên hình 8.32a. Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình 8.32b. Các ẩn trong hệ cơ bản đối xứng nói chung gồm hai loại:

- \* Loại ẩn có tính chất đối xứng hay phản xứng. Ví dụ cặp ẩn số  $X_2$  có tính đối xứng, cặp  $X_3$  có tính phản xứng.
- \* Loại ẩn chỉ có vị trí đối xứng còn về trị số thì khác nhau. Ví dụ hai ẩn  $X_1$  và  $X_4$ .

Để triệt để sử dụng tính chất đối xứng, ta phân tích từng cặp hai ẩn chỉ có vị trí đối xứng thành hai cặp ẩn: một cặp đối xứng và một cặp phản xứng. Ví dụ, phân tích hai ẩn  $X_1$  và  $X_4$  thành hai cặp: cặp  $Y_1$  đối xứng và cặp  $Y_4$  phản xứng (hình 8.32c). Tất nhiên hai cặp ẩn mới  $Y_1$  và  $Y_4$  phải thỏa mãn điều kiện:

$$Y_1 + Y_4 = X_1; \quad Y_1 - Y_4 = X_4.$$

Cách phân tích này luôn thực hiện được vì  $Y_1$  và  $Y_4$  là nghiệm duy nhất của các ẩn  $X_1$  và  $X_4$ .

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_4); \quad Y_4 = \frac{1}{2}(X_1 - X_4).$$

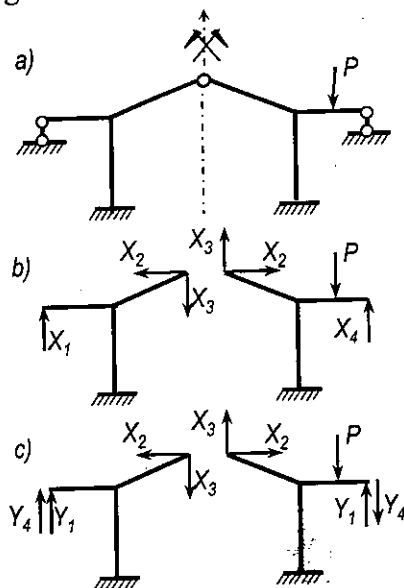
Sau khi đã phân tích như trên ta sẽ thực hiện tính toán với các ẩn mới  $Y_1$ ,  $Y_4$  và các ẩn về bản chất đã mang tính chất đối xứng hoặc phản xứng  $X_2$  và  $X_3$ .

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}Y_4 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}Y_4 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} &= 0; \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} &= 0. \end{aligned}$$

Trong trường hợp này:

- \* Các cặp ẩn  $Y_1$  và  $X_2$  đối xứng nên các biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  và  $(\bar{M}_2)$  đối xứng.
- \* Các cặp ẩn  $X_3$ ,  $Y_4$  phản xứng nên các biểu đồ  $(\bar{M}_3)$  và  $(\bar{M}_4)$  phản xứng.



Hình 8.32

Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng sẽ bằng không. Do đó các chuyển vị  $\delta_{km}$  sẽ bằng không khi một chỉ số của nó biểu thị cặp ẩn đối xứng còn một chỉ số biểu thị cặp ẩn phản xứng. Cụ thể là các chuyển vị  $\delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{41} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{24} = \delta_{42} = 0$ .

Lúc này hệ phương trình chính tắc sẽ phân ra thành hai hệ phương trình độc lập:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} &= 0 \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Một hệ (hệ a) chỉ chứa những cặp ẩn đối xứng còn một hệ (hệ b) chỉ chứa những cặp ẩn phản xứng.

Với hệ siêu tĩnh đối xứng bậc  $n$ , nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng như đã nói ở trên thì ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: một hệ có  $n_1$  phương trình và một hệ có  $n_2$  phương trình với  $n_1 + n_2 = n$ .

Kết luận vừa thu được ở trên không phụ thuộc vào nguyên nhân tác dụng, nghĩa là nguyên nhân tác dụng có thể bất kỳ. Trường hợp đặc biệt khi:

### ***1. Nguyên nhân tác dụng đối xứng***

Chẳng hạn hệ chịu tải trọng tác dụng đối xứng, lúc này biểu đồ ( $M_P^o$ ) đối xứng nên  $\Delta_{3P} = \Delta_{4P} = 0$ .

Thay vào hệ (b) ta được hệ phương trình thuần nhất, vì định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực luôn luôn khác không nên

$$X_3 = Y_4 = 0.$$

Như vậy, ta có thể kết luận: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các cặp ẩn phản xứng bằng không.

### ***2. Nguyên nhân tác dụng phản xứng***

Cũng lý luận tương tự như trên, ta đi đến kết luận sau: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các cặp ẩn đối xứng bằng không.

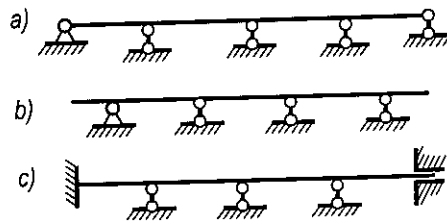
**Chú thích:** Trong trường hợp hệ có hai trục đối xứng, nếu cũng vận dụng biện pháp như đã nói ở trên với cả hai trục đối xứng thì hệ phương trình chính tắc sẽ

phân thành bốn hệ phương trình độc lập. Gọi  $n_1, n_2, n_3, n_4$  – lần lượt là số phương trình của bốn hệ nói trên, ta có  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ .

## 8.6. CÁCH TÍNH DẦM LIÊN TỤC

*Dầm liên tục là hệ chỉ có một thanh thẳng đặt trên nhiều gối tựa, số gối tựa lớn hơn hai.*

Trên hình 8.33a, b, c là ba loại dầm liên tục thường gặp trong thực tế: dầm liên tục đơn giản (hình 8.33a), dầm liên tục có đầu thừa (hình 8.33b), và dầm liên tục có đầu ngàm (hình 8.33c).



Hình 8.33

Trừ trường hợp đặc biệt, dầm trên hình 8.34 là tĩnh định, còn nói chung dầm liên tục là siêu tĩnh.



Hình 8.34

Để tìm bậc siêu tĩnh của dầm liên tục ta có thể sử dụng công thức (1.3) đã nêu ở chương 1. Tuy nhiên, nếu chú ý là một dầm tĩnh định chỉ cần nối với trái đất bằng ba liên kết thanh sắp xếp hợp lý thì ta có thể tìm được bậc siêu tĩnh của dầm liên tục theo công thức đơn giản sau:

$$n = C - 3,$$

trong đó:  $n$  – bậc siêu tĩnh của dầm liên tục;

$C$  – số liên kết tựa tương đương loại một.

Với hệ trên hình 8.33c:  $C = 8$  nên bậc siêu tĩnh của hệ bằng  $n = 8 - 3 = 5$ .

Trong thực tế, dầm liên tục thường chịu tải trọng thẳng đứng, lúc đó gối tựa cố định chỉ có hiệu quả tương đương gối tựa di động, nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục. Bởi vậy trong trường hợp này ta có thể tìm bậc siêu tĩnh tương ứng của dầm theo công thức:

$$n = C_{lg} + N, \quad (8.32)$$

trong đó:

$C_{lg}$  – số gối tựa trung gian (không tính hai liên kết ở ngoài cùng) của dầm, không cần phân biệt là gối di động hay gối tựa cố định;

$N$  – số ngàm của dầm, không cần phân biệt là ngàm hay ngàm trượt.

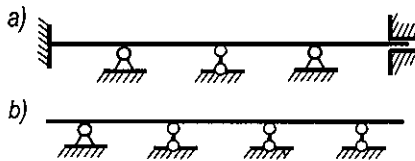
Ví dụ, trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng:

- với hệ trên hình 8.35a, ta có:

$$C_{tg} = 3; N = 2, \text{ do đó } n = 3 + 2 = 5;$$

- với hệ trên hình 8.35b, ta có:  $C_{tg} = 2;$

$N = 0;$  vậy  $n = 2.$



Hình 8.35

**Chú ý:** để đảm bảo cho dầm liên tục không biến hình, ít nhất phải có một liên kết nối với trái đất có khả năng ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục, chẳng hạn một ngàm hay một gối tựa cố định.

Có nhiều cách tính dầm liên tục. Trong mục này ta vận dụng phương pháp lực để tính dầm liên tục theo *phương trình ba mômen*. Ngoài ra còn các phương pháp khác như: phương pháp tiêu cự mômen (xem [6]), phương pháp chuyển vị (sẽ đề cập trong chương 9)...

Dầm liên tục chỉ là trường hợp đặc biệt của hệ siêu tĩnh nói chung, khi vận dụng phương pháp lực ta có thể cụ thể hóa hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực nhằm phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản hơn.

Trước tiên, ta nghiên cứu cách tính dầm liên tục đơn giản, trên cơ sở đó dễ dàng suy ra cách tính dầm liên tục có đầu thừa hoặc đầu ngàm. Xét dầm liên tục đơn giản có tiết diện không đổi trong từng nhịp, chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa như trên hình 8.36a.

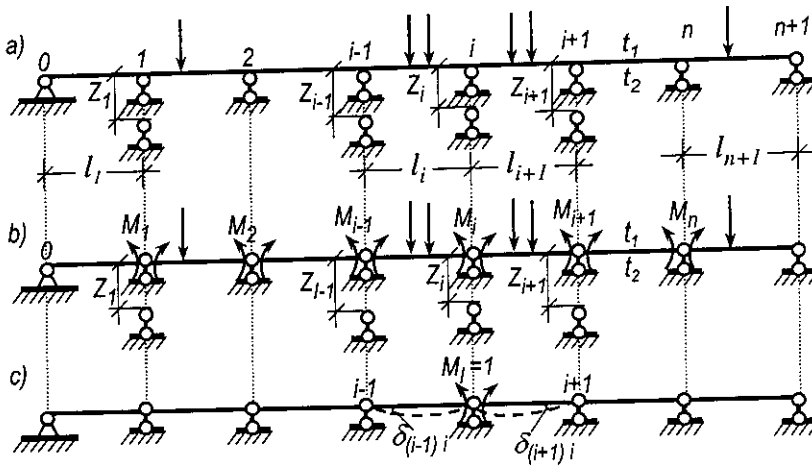
Giả sử dầm có  $n$  gối tựa trung gian tức là có  $(n+1)$  nhịp; ta đánh số thứ tự các gối tựa và các nhịp theo đúng quy định như trên hình 8.36a. Với cách đánh số như vậy, theo (8.30) bậc siêu tĩnh tương ứng của hệ sẽ bằng  $n$ .

Chọn hệ cơ bản như trên hình 8.36b với các ẩn  $X_i$  là các mômen uốn  $M_i$  tại gối tựa thứ  $i$ . Như vậy hệ phương trình chính tắc sẽ biểu thị điều kiện các góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên mỗi gối tựa trung gian bằng không.

Hệ cơ bản này có ưu điểm là chia dầm thành nhiều bộ phận độc lập với nhau nên sẽ cho nhiều hệ số phụ bằng không. Thật vậy, dưới tác dụng của riêng ẩn  $M_i = 1$ , biến dạng chỉ xảy ra trong hai nhịp lân cận thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$  (hình 8.36c) do đó chỉ tồn tại các chuyển vị xoay tương đối giữa hai

tiết diện (chuyển vị tương ứng với các ẩn số) ở hai bên gối tựa trung gian thứ  $(i-1)$ , thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$ . Như vậy, với hệ cơ bản đã chọn ta có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} \delta_{ki} = \delta_{ik} = 0 & \quad \text{khi} \quad k \neq (i-1), i \text{ và } (i+1); \\ \delta_{ki} = \delta_{ik} \neq 0 & \quad \text{khi} \quad k = (i-1), i \text{ và } (i+1). \end{aligned}$$



Hình 8.36

Lúc này, phương trình thứ  $i$  của hệ phương trình chính tắc biểu thị điều kiện góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa trung gian thứ  $i$  bằng không, sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it} = 0, \quad (8.33)$$

trong đó:

$\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}$  – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  lần lượt do các mômen đơn vị  $M_{i-1}, M_i$  và  $M_{i+1}$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{iP}, \Delta_{iZ}, \Delta_{it}$  – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  lần lượt do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa và do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

◆ **Xác định các hệ số:**

Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính toán, ta thiết lập sẵn các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Khi xác định các đại lượng này ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, còn biến dạng dọc trục sẽ không tồn tại với sơ đồ tính đã chấp nhận và khi dầm chỉ chịu tải trọng vuông góc với trục dầm.



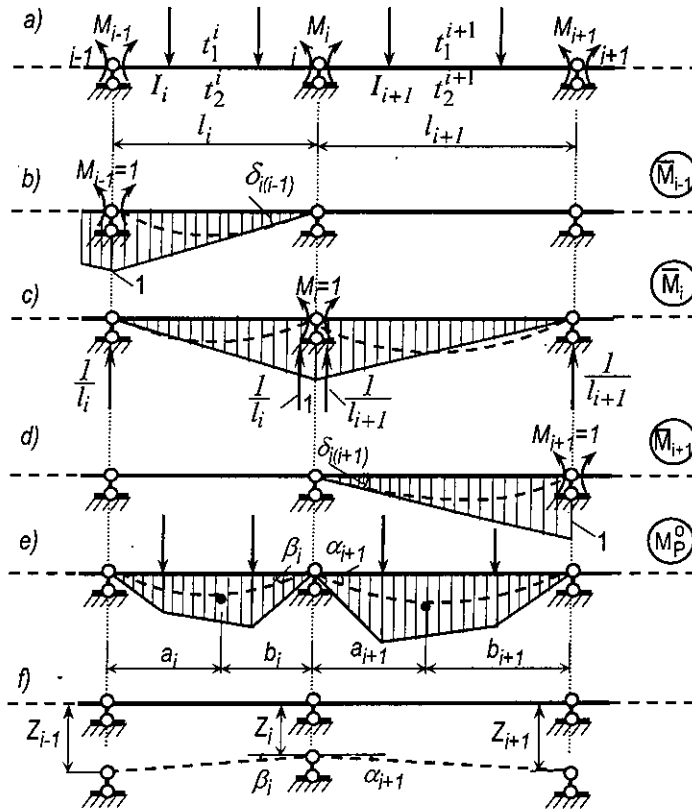
Trên hình 8.37a, b, c, d là sơ đồ tính và các biểu đồ mômen uốn đơn vị cần thiết trong hệ cơ bản để xác định các hệ số.

Thực hiện phép nhân các biểu đồ, ta có:

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EI_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i};$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EI_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}};$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}.$$



Hình 8.37

Thay các trị số vừa tính được vào phương trình chính tắc (8.31) ta được:

$$\frac{l_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left[ \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right] M_i + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it} = 0.$$

Biến đổi phương trình trên bằng cách nhân hai vế với  $6EI_o$ , trong đó  $I_o$  là hằng số bất kỳ thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó trong dầm.

$$l_i \frac{I_o}{I_i} M_{i-1} + 2 \left[ l_i \frac{I_o}{I_i} + l_{i+1} \frac{I_o}{I_{i+1}} \right] M_i + l_{i+1} \frac{I_o}{I_{i+1}} M_{i+1} + 6EI_o (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it}) = 0.$$

Đặt

$$\lambda_i = l_i \frac{I_o}{I_i}, \quad (8.34)$$

và gọi là *chiều dài quy ước* của nhịp  $i$ , ta có:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EI_o (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it}) = 0. \quad (8.35)$$

Phương trình (8.35) gọi là *phương trình ba mômen* biểu thị sự liên hệ giữa ba mômen uốn chưa biết ở ba gối tựa trung gian liên tiếp  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  và  $M_{i+1}$ .

◆ *Xác định số hạng tự do  $\Delta_{iP}$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản*

Góc xoay tương đối  $\Delta_{iP}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_P^o),$$

trong đó  $(M_P^o)$  là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 8.37e). Thực hiện nhân biểu đồ ta được:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}}, \quad (8.36)$$

trong đó:

$\omega_i$  và  $\omega_{i+1}$  – diện tích biểu đồ mômen uốn  $(M_P^o)$  tại nhịp  $i$  và nhịp  $(i+1)$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$a_i$ ,  $b_i$  – khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn  $(M_P^o)$  trong nhịp  $i$  tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó;

$a_{i+1}$ ,  $b_{i+1}$  – các khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn  $(M_P^o)$  trong nhịp  $(i+1)$  tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó.

◆ *Xác định số hạng tự do  $\Delta_{iZ}$  do chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản*

Góc xoay tương đối  $\Delta_{iZ}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa  $i$  do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức (8.12):

$$\Delta_{iZ} = - \sum_j \bar{R}_{ji} Z_j,$$

trong đó:

$\bar{R}_{ji}$  – phản lực tại gối  $j$  do các mômen  $M_i = l$  gây ra trong hệ cơ bản;  
 $Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa thứ  $j$ .

Nếu quy ước các chuyển vị lún xuống dưới là dương ta được:

$$\Delta_{iZ} = - \left[ -\frac{l}{l_i} Z_{i-1} + \frac{l}{l_i} Z_i + \frac{l}{l_{i+1}} Z_i - \frac{l}{l_{i+1}} Z_{i+1} \right],$$

hay

$$\Delta_{iZ} = \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right], \quad (8.37)$$

trong đó  $Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1}$  – độ lún tại các gối tựa thứ  $(i-1)$ , thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$  với quy ước hướng xuống phía dưới là dương.

Cũng có thể thiết lập được công thức (8.37) qua hình 8.37f.  $\Delta_{iZ}$  chính là tổng hai góc  $\beta_i$  và  $\alpha_{i+1}$  ở hai bên gối tựa  $i$ :

$$\Delta_{iZ} = \beta_i + \alpha_{i+1} \approx \text{tg}\beta_i + \text{tg}\alpha_{i+1} = \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right].$$

♦ *Xác định số hạng tự do  $\Delta_{it}$  do thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản*

Góc xoay tương đối  $\Delta_{it}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  do thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức (8.11).

Nếu chú ý là lực dọc trong dầm bằng không, ta có:

$$\Delta_{it} = \left[ \frac{\alpha l_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha l_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right], \quad (8.38)$$

trong đó:

$h_i, h_{i+1}$  – chiều cao của tiết diện dầm tại nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ ;

$t_{1i}, t_{1(i+1)}$  – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ trên của nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ ;

$t_{2i}, t_{2(i+1)}$  – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ dưới của nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ .

Thay các số hạng tự do đã tìm được vào phương trình chính tắc (8.35) ta được phương trình ba mômen viết cho gối tựa trung gian thứ  $i$ :

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6I_o \left[ \frac{\omega_i a_i}{l_i I_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} I_{i+1}} \right] + 6EI_o \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + 3\alpha EI_o \left[ \frac{l_i}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (8.39)$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trong tất cả các nhịp ( $I = const$ ) ta có thể lấy  $I_o = I$ , lúc đó phương trình ba mômen sẽ có dạng:

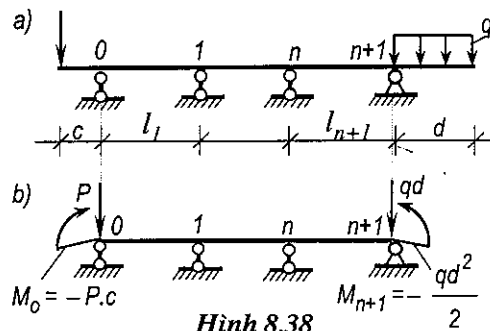
$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6 \left[ \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + 6EI \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + 3EI\alpha \left[ \frac{l_i}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (8.40)$$

Ứng với mỗi gối trung gian của dầm liên tục ta có một phương trình ba mômen, như vậy với dầm liên tục có bậc siêu tĩnh bằng  $n$  ta sẽ viết được  $n$  phương trình ba mômen cho  $n$  gối trung gian, đủ để xác định  $n$  ẩn số  $M_i$ .

*\* Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa*

Ta có thể đưa dầm có đầu thừa chịu tải trọng (hình 8.38a) về dầm liên tục đơn giản (hình 8.38b) bằng cách cắt bỏ các đầu thừa và thay tác dụng của phần đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở các gối biên của dầm liên tục đơn giản.

Nội lực trong dầm liên tục đơn giản trên hình 8.38b được xác định bằng cách sử dụng phương trình ba mômen với mômen uốn tại các gối biên của dầm đã biết, chúng có giá trị bằng mômen tập trung  $M_o$  và  $M_{n+1}$ .



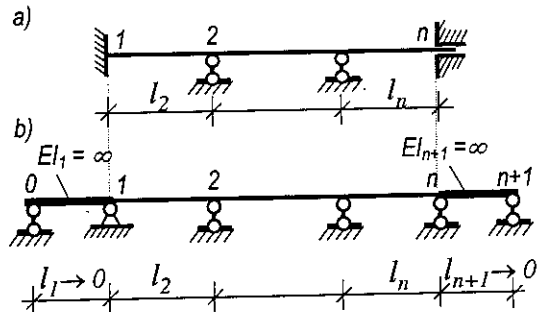
Hình 8.38

Cũng có thể coi các mômen tập trung ở hai đầu dầm như ngoại lực đặt trong nhịp thứ nhất và thứ  $(n+1)$ . Lúc này, mômen tựa  $M_o$  và  $M_{n+1}$  sẽ bằng

không còn các đại lượng  $\omega_l$  và  $\omega_{n+1}$  cần được bổ sung phần ảnh hưởng do các mômen tập trung đó gây ra. Cách này thường phức tạp nên ít được sử dụng.

*\*Trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm*

Trong trường hợp dầm liên tục trên hình 8.39a, ta tưởng tượng thay ngàm và ngàm trượt bằng cách đặt thêm nhịp quy đổi ở hai đầu dầm. Nhịp quy đổi có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng  $EI = \infty$  và có số liên kết tương đương với ngàm (hình 8.39b).



Hình 8.39

Ta đã đưa bài toán dầm liên tục có đầu ngàm về bài toán dầm liên tục đơn giản và có thể áp dụng được phương trình ba mômen như thường lệ. Để thực hiện được đơn giản, nên quan niệm chiều dài của các nhịp quy ước bằng không.

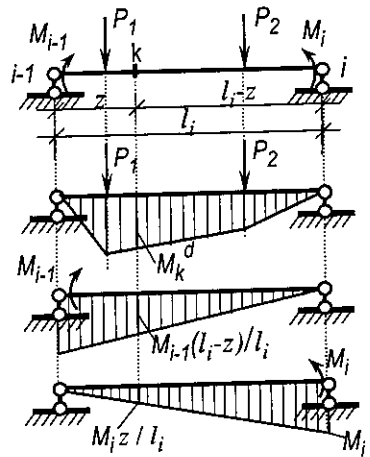
Như vậy, đối với mỗi dầm liên tục bất kỳ khi quy về dầm liên tục đơn giản tương ứng, ta thiết lập được hệ phương trình ba mômen viết cho tất cả các gối trung gian. Sau khi giải hệ phương trình sẽ tìm được tất cả các mômen uốn tại các gối tựa gọi là *mômen tựa*.

Bây giờ còn phải xác định giá trị mômen uốn và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ trong các nhịp của dầm liên tục. Ta xem mỗi nhịp dầm liên tục như một dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối ở hai đầu nhịp, chịu tải trọng và các mômen uốn đã xác định được từ hệ phương trình ba mômen. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng (hình 8.40) ta sẽ tìm được biểu thức mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ  $k$  có hoành độ  $z$  trong nhịp thứ  $i$  của dầm liên tục như sau:

$$M_k = M_k^d + \frac{l_i - z}{l_i} M_{i-1} + \frac{z}{l_i} M_i, \quad (8.41)$$

trong đó  $M_k^d$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  do tải

trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.



Hình 8.40

Từ liên hệ vi phân đã biết ta tìm được biểu thức lực cắt tại tiết diện  $k$ :

$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} - m = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} - m, \quad (8.42)$$

trong đó  $Q_k^d$  - lực cắt tại tiết diện  $k$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

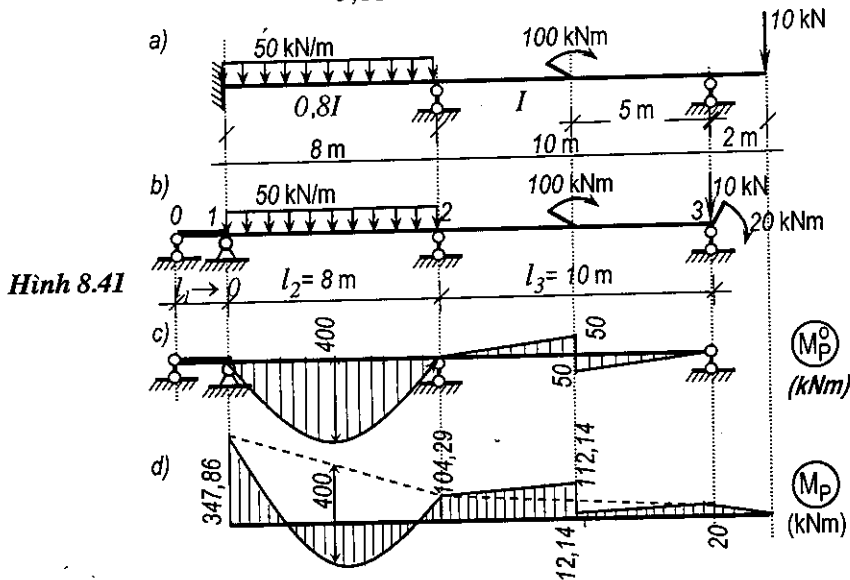
Để tìm phản lực tại gối tựa bất kỳ thứ  $i$ , ta chỉ cần xét cân bằng của phần dầm bị cắt xung quanh gối tựa thứ  $i$ .

**Ví dụ 8.10.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 8.41a.

Sau khi cắt bỏ đầu thừa, thay tác dụng của phần này bằng các lực đặt ở gối biên bên phải và thay ngàm bên trái bằng một nhíp có chiều dài  $l_1 = 0$  ta được sơ đồ tính tương đương như trên hình 8.41b là dầm liên tục đơn giản. Đánh số các gối tựa và nhíp như trên hình 8.41b.

Chọn  $I_0 = I$ , theo (8.34) chiều dài quy ước của các nhíp sẽ là

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{8I_0}{0,8I} = 10 \text{ m}; \quad \lambda_3 = \frac{10I_0}{I} = 10 \text{ m}.$$



1) Lập phương trình ba mômen cho các gối trung gian (gối 1, 2), ta có:

$$\text{khi } i = 1: \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6I \left[ \frac{\omega_1 a_1}{l_1 I} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 \cdot 0,8I} \right] = 0;$$

$$\text{khi } i = 2: \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6I \left[ \frac{\omega_2 a_2}{l_2 \cdot 0,8I} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 I} \right] = 0.$$

2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Kết quả như trên hình 8.41c.

3) Xác định các đại lượng trong số hạng tự do của hệ phương trình ba mômen. Khi xác định các đại lượng thuộc nhịp thứ ba cần chú ý: tuy diện tích  $\omega_3 = 0$  nhưng trọng tâm của hai hình tam giác bằng nhau, trái dấu ở xa vô cùng nên tích số  $\omega_3 b_3$  là vô định. Để khử vô định ta cần xem diện tích  $\omega_3$  là hai hình tam giác, tính tích  $\omega b$  riêng biệt cho từng hình rồi cộng kết quả.

• Nhịp 1:  $\omega_1 = 0$ ;  $a_1 = 0$ .

• Nhịp 2:  $\omega_2 = \frac{ql^3}{12} = \frac{50.8^3}{12} = \frac{6400}{3} \text{ kNm}^2$ ;  $a_2 = b_2 = \frac{l}{2} = 4 \text{ m}$ ;

• Nhịp 3:  $\omega_3 b_3 = -\frac{5.50}{2} \left( 5 + \frac{5}{3} \right) + \frac{5.50}{2} \cdot \frac{2.5}{3} = -\frac{1250}{3} \text{ kNm}^3$ .

4) Thay trị số của các hệ số vào hệ phương trình ba mômen đồng thời chú ý là  $M_3 = -20 \text{ kNm}$ ; ta có:

$$0 + 2(0+10)M_1 + 10 M_2 + 6I \left[ 0 + \frac{6400}{3.8.0,8I} . 4 \right] = 0 ;$$

$$10 M_1 + 2(10+10)M_2 + 10 (-20) + 6I \left[ \frac{6400}{3.8.0,8I} . 4 - \frac{1250}{3.10I} \right] = 0 .$$

$$\text{Hay} \quad 2M_1 + M_2 + 800 = 0; \quad M_1 + 4M_2 + 755 = 0.$$

5) Giải hệ phương trình, ta được:

$$M_1 = -349,286 \text{ kNm}; \quad M_2 = -101,429 \text{ kNm}.$$

6) Tìm biểu đồ mômen uốn tổng cộng. Sau khi đã tìm được các mômen tựa  $M_1, M_2, M_3$  ta vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do riêng các mômen tựa gây ra. Trong mỗi nhịp biểu đồ này có dạng đường thẳng nối liền các tung độ biểu thị mômen tựa ở hai đầu nhịp (đường đứt nét trên hình 8.41d). Gọi biểu đồ này là biểu đồ mômen tựa và ký hiệu là  $(M_{tựa})$ . Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng theo biểu thức sau:

$$(M_P) = (M_P^o) + (M_{tựa}).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.41d (chú ý là cần bổ sung phần biểu đồ mômen uốn ở đầu thừa bên phải).

**Ví dụ 8.11.** [6] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 8.42a khi gối 0 bị lún một đoạn bằng  $\Delta$  và ngàm xoay ngược chiều kim đồng hồ một góc  $\varphi = \Delta/l$ . Cho biết  $EI = const$ .

Trên hình 8.42b trình bày cách đưa dầm có đầu ngàm về dầm liên tục đơn giản. Nếu ta cho gối 3 của dầm thay thế dịch chuyển thẳng đứng một đoạn  $Z_3 = -\varphi l_3 = -\Delta(l_3/l)$  (hướng lên trên) đồng thời cho  $l_3$  tiến tới không thì cách làm việc của dầm này hoàn toàn giống cách làm việc của dầm cho ban đầu.

Thiết lập các phương trình ba mômen cho gối 1 và 2, theo (8.39) ta có:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 6EI \left[ \frac{Z_0 - Z_1}{l_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{l_2} \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 6EI \left[ \frac{Z_1 - Z_2}{l_2} + \frac{Z_3 - Z_2}{l_3} \right] = 0,$$

trong đó:  $l_1 = l_2 = l$ ;  $l_3 = 0$ ;  $M_0 = M_3 = 0$ ;  $Z_0 = \Delta$ ;  $Z_1 = Z_2 = 0$ ;  
 $Z_3 = -\Delta l_3 / l$ .

Sau khi thay thế những giá trị này vào hai phương trình trên, ta có:

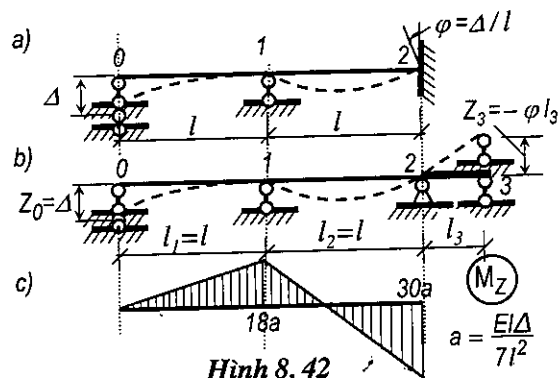
$$4M_1 + M_2 + \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0;$$

$$M_1 + 2M_2 - \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0.$$

Kết quả giải hệ phương trình:

$$M_1 = -\frac{18EI\Delta}{7l^2};$$

$$M_2 = +\frac{30EI\Delta}{7l^2}.$$



Hình 8.42

Trên hình 8.42c vẽ biểu đồ mômen tựa. Biểu đồ này cũng là biểu đồ cần tìm vì trên hệ không có tải trọng.

**Ví dụ 8.12.** [6] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục chịu sự biến thiên nhiệt độ như trên hình 8.43a. Cho biết dầm có tiết diện hình chữ nhật với  $EI = const$ ;  $h = const$ .

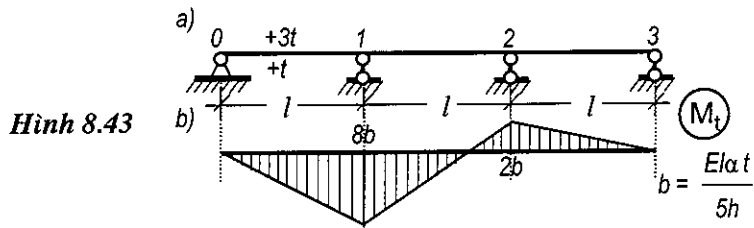
Phương trình ba mômen viết cho gối 1 và gối 2:



$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 3EI\alpha \left[ \frac{l_1}{h_1}(t_{21} - t_{11}) + \frac{l_2}{h_2}(t_{22} - t_{12}) \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 3EI\alpha \left[ \frac{l_2}{h_2}(t_{22} - t_{12}) + \frac{l_3}{h_3}(t_{23} - t_{13}) \right] = 0,$$

trong đó:  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ;  $M_0 = M_3 = 0$ ;  $h_1 = h_2 = h_3 = h$ ;  
 $t_{21} = +t$ ;  $t_{11} = +3t$ ;  $t_{22} = t_{12} = t_{23} = t_{13} = 0$ .



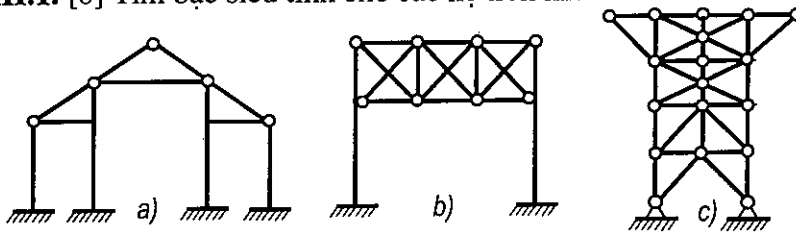
Thay các số liệu trên vào hệ phương trình và giải ra ta được:

$$M_1 = \frac{8EI\alpha t}{5h}; \quad M_2 = -\frac{2EI\alpha t}{5h}.$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 8.43b.

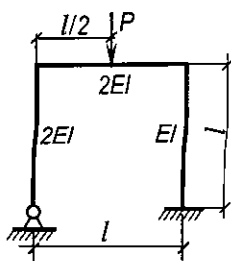
## BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

VIII.1. [8] Tìm bậc siêu tĩnh cho các hệ trên hình VIII.1

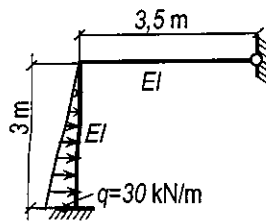


Hình VIII.1

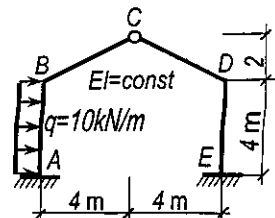
VIII.2 - VIII.4. [8] Vẽ các biểu đồ nội lực trong các khung chịu tải trọng cho trên các hình tương ứng.



Hình VIII.2

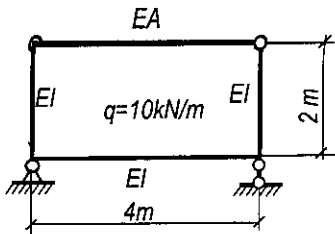


Hình VIII.3

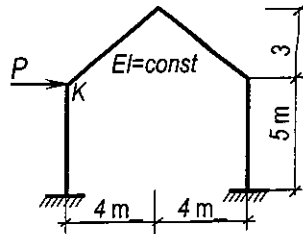


Hình VIII.4

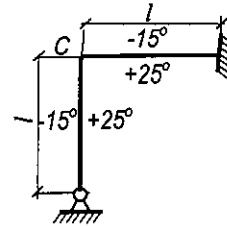
**VIII.5.** [8] Vẽ biểu đồ nội lực trong khung trên hình VIII.5 tương ứng với hai trường hợp: a)  $EA = \infty$ ; b)  $EA = 3EI/a^2$  với  $a = 2$  m.



Hình VIII.5



Hình VIII.6

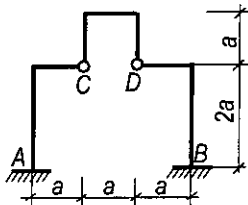


Hình VIII.7

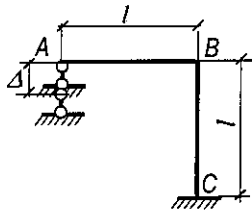
**VIII.6.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn và xác định chuyển vị ngang tại  $K$  trong khung chịu tải trọng cho trên hình VIII.6.

**VIII.7.** [8] Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị thẳng đứng, chuyển vị ngang và góc xoay tại nút  $C$  trong khung chịu biến thiên nhiệt độ như trên hình VIII.7. Cho biết:  $EI = const$ ;  $h = l/10$ .

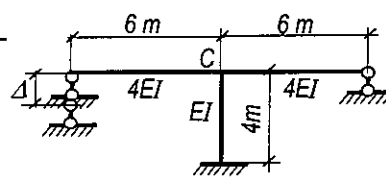
**VIII.8.** [8] Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị thẳng đứng tương đối giữa hai tiết diện  $C$  và  $D$  trong hệ trên hình VIII.8 khi đốt nóng toàn hệ lên  $t^\circ$ . Cho biết:  $EI = const$ .



Hình VIII.8



Hình VIII.9



Hình VIII.10

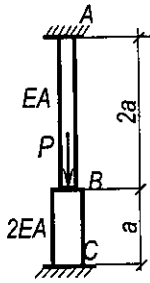
**VIII.9.** [8] Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị ngang tại  $A$  trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình VIII.9. Cho biết:  $EI = const$ .

**VIII.10.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn và xác định góc xoay tại nút  $C$  trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình VIII.10.

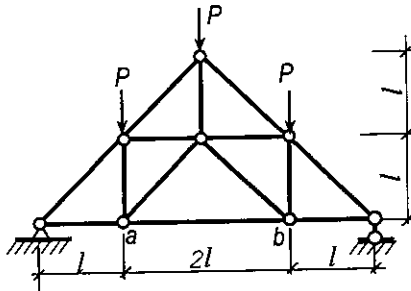
**VIII.11.** [2] Xác định lực dọc trong các đoạn thanh chịu lực như trên hình VIII.11. Cho biết khoảng cách giữa hai ngàm không đổi.

**VIII.12.** [8] Xác định lực dọc trong thanh  $ab$  và chuyển vị thẳng đứng tương đối giữa hai mắt  $a, b$  của dàn chịu tải trọng như trên hình VIII.12. Cho biết  $EA = const$ .

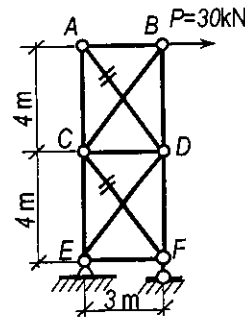
**VIII.13.** [8] Xác định lực dọc trong thanh  $AD$  và  $CF$  của dàn chịu tải trọng như trên hình VIII.13. Cho biết  $EA = const$ .



Hình VIII.11

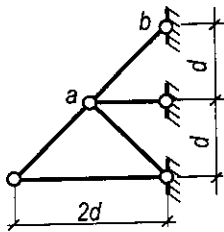


Hình VIII.12

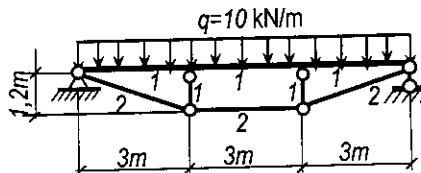


Hình VIII.13

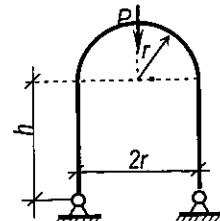
**VIII.14.** [8] Xác định lực dọc trong thanh  $ab$  của dàn trên hình VIII.14 khi đốt nóng thanh  $ab$  lên  $t^\circ$ . Cho biết  $EA = const$ .



Hình VIII.14



Hình VIII.15



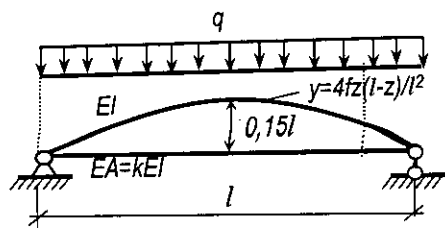
Hình VIII.16

**VIII.15.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm và xác định lực dọc trong các thanh của hệ chịu tải trọng như trên hình VIII.15.

Cho biết:  $E = const$ ; các tiết diện 1 có  $I_1 = 3800 \text{ cm}^4$ ;  $A_1 = 37,5 \text{ cm}^2$ ; các tiết diện 2 có  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$ .

**VIII.16.** [8] Xác định lực xô trong hệ hai khớp có tiết diện không đổi, chịu tải trọng như trên hình VIII.16. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

**VIII.17.** [8] Xác định lực dọc trong thanh căng của vòm thoải hai khớp có dạng parabol, chịu tải trọng như trên hình VIII.17. Cho biết vòm có độ cứng không đổi  $EI$ , độ cứng khi kéo hoặc nén của thanh căng là  $kEI$ .

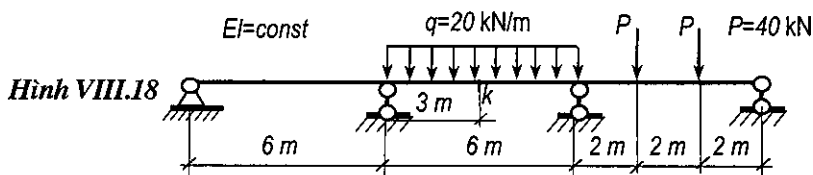


Hình VIII.17

Khảo sát ảnh hưởng của độ cứng của thanh cứng đối với mômen uốn tại tiết diện ở đỉnh vòm.

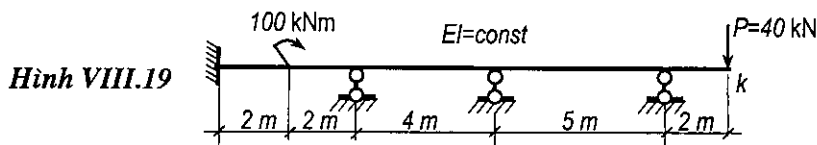
Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục. Đối với vòm thoải, có thể xem  $\cos\varphi \approx 1$  với  $\varphi$  là góc nghiêng của tiếp tuyến tại tiết diện có hoành độ  $z$  của trục vòm so với phương ngang.

**VIII.18.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt và tìm chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện  $k$  trong dầm liên tục chịu tải trọng như trên hình VIII.18.



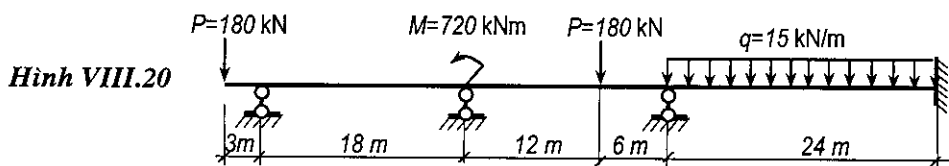
Hình VIII.18

**VIII.19.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt và xác định góc xoay tại tiết diện  $k$  trong dầm liên tục chịu tải trọng như trên hình VIII.19.



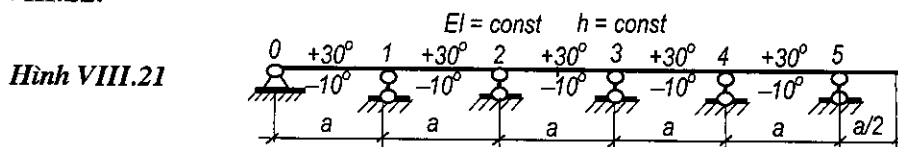
Hình VIII.19

**VIII.20.** [8] Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt trong dầm liên tục chịu tải trọng như trên hình VIII.20.

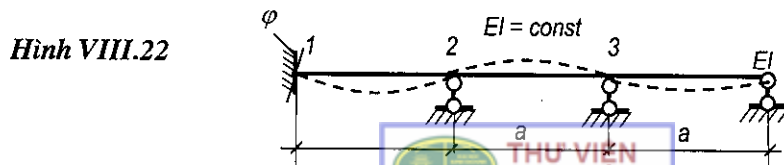


Hình VIII.20

**VIII.21 - VIII.22.** [8] Xác định mômen uốn tại các tiết diện ở trên gối tựa trong dầm liên tục chịu các nguyên nhân như trên hình VIII.21 và VIII.22.



Hình VIII.21



Hình VIII.22

## BÀI TẬP LỚN SỐ 2

### Tính hệ phẳng siêu tĩnh theo phương pháp lực [9]

#### Thứ tự thực hiện:

1. Xác định số ẩn số và chọn hệ cơ bản, viết hệ phương trình chính tắc dưới dạng chữ.
2. Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc bằng cách "nhân" biểu đồ.
3. Viết phương trình chính tắc dưới dạng số và giải hệ phương trình chính tắc.
4. Vẽ biểu đồ mômen uốn ( $M_P$ ) trong hệ siêu tĩnh.
5. Vẽ biểu đồ lực cắt ( $Q_P$ ) và biểu đồ lực dọc ( $N_P$ ) trong hệ siêu tĩnh.
6. Kiểm tra các biểu đồ nội lực bằng cách khảo sát cân bằng của từng phần hệ tách ra hay của toàn hệ.
7. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A hoặc chuyển vị ngang tại B.

#### Các số liệu tính toán:

- Môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén của vật liệu:  $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ .
- Mômen quán tính chính trung tâm:  $I = 10^{-6} \frac{l_1^4}{k_1}$
- Diện tích tiết diện thanh chỉ chịu kéo hoặc nén:  $A = \frac{10 k_1 I}{l_1 l_2}$ .

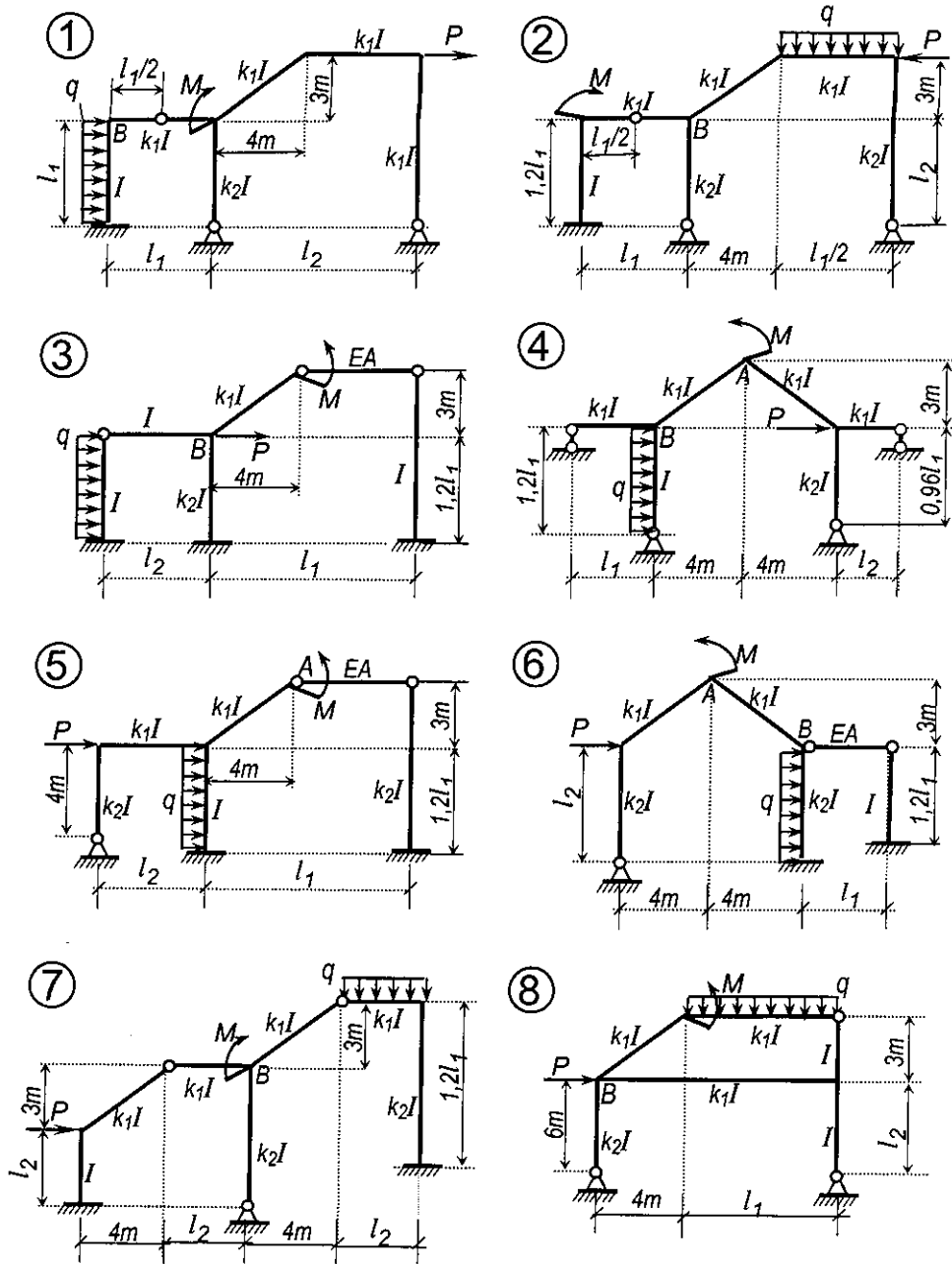
Số liệu hình học

T.T	$l_1$ (m)	$l_2$ (m)	$k_1$	$k_2$
a	10	8	2,0	1,5
b	8	6	2,5	2,0
c	12	10	3,0	2,0
d	9	7	2,0	2,0

Số liệu nguyên nhân

T.T	$q$ (kN/m)	$P$ (kN)	$M$ (kNm)
1	30	80	120
2	40	100	150
3	50	120	100
4	20	100	120

### Sơ đồ hệ và tải trọng



# 9

## PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ VÀ CÁCH TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH

### 9.1. KHÁI NIỆM

Khác với phương pháp lực, trong phương pháp chuyển vị ta dùng tập hợp các biến dạng ở hai đầu mỗi thanh làm các đại lượng cần tìm. Những đại lượng này sẽ tìm được nếu biết chuyển vị tại các nút của hệ. Như vậy, theo phương pháp này ta sẽ chọn ẩn là chuyển vị tại các nút của hệ. Chính vì lẽ đó mà phương pháp được gọi là *phương pháp chuyển vị* (còn gọi là *phương pháp biến dạng*). Sau khi xác định được chuyển vị tại các nút tức là chuyển vị tại các đầu thanh ta sẽ xác định được nội lực, chuyển vị tại tiết diện bất kỳ trong hệ.

#### 9.1.1. Các giả thiết

Ngoài các giả thiết đã nêu trong chương Mở đầu, khi tính hệ thanh theo phương pháp chuyển vị ta thường chấp nhận các giả thiết sau:

1) *Các nút của hệ được xem là cứng. Khi biến dạng, các đầu thanh quy tụ tại mỗi nút sẽ có chuyển vị góc và chuyển vị thẳng như nhau.*

Giả thiết này cho phép ta thay thế việc xác định chuyển vị và biến dạng tại đầu các thanh bằng cách xác định chuyển vị tại các nút. Như vậy, nếu chấp nhận thì số lượng ẩn sẽ giảm xuống được khá nhiều.

Trên thực tế, khi tính hệ khung theo phương pháp lực ta cũng đã chấp nhận giả thiết này.

2) *Khi xét biến dạng của các thanh chịu uốn, bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn.*

Giả thiết này đã được chấp nhận khi xác định chuyển vị như đã biết trong các chương 7, 8 và không ảnh hưởng đến số lượng ẩn của phương pháp chuyển vị. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì về cơ bản, khối lượng tính toán không tăng lên song khi nghiên cứu trạng thái biến dạng và nội lực trong các thanh ta cần xét đến ảnh hưởng của các biến dạng trượt (khi lập các số liệu trong các bảng 9.1 và 9.2).

3) *Khi xét biến dạng của các thanh chịu uốn, bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn.*

Giả thiết này đã được chấp nhận khi xác định chuyển vị như đã biết trong các chương 7, 8. Từ giả thiết này và giả thiết chuyển vị của hệ được xem là nhỏ, ta suy ra kết luận sau:

*Trước và sau biến dạng, khoảng cách giữa hai nút ở hai đầu mỗi thanh, theo phương ban đầu của thanh, không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ và thanh có hai đầu khớp với độ cứng EA khác vô cùng.*

Nếu chấp nhận giả thiết này thì số lượng chuyển vị thẳng cần tìm tại các nút sẽ giảm xuống khá nhiều.

Cũng có thể phủ nhận giả thiết này để tăng độ chính xác của kết quả tính toán. Lúc này, nội dung phương pháp sẽ trình bày trong các mục dưới đây không có gì thay đổi song số lượng ẩn sẽ tăng lên khá nhiều nên thường phải thực hiện tính toán trên máy tính điện tử.

### 9.1.2. Số ẩn số của phương pháp chuyển vị

Số ẩn số của hệ được xác định bằng số chuyển vị độc lập chưa biết của các nút trong hệ.

Nếu thừa nhận các giả thiết đã nêu ở trên thì số ẩn số được xác định theo công thức sau:

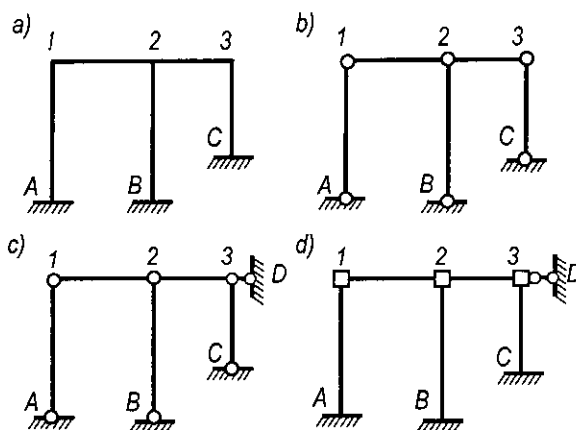
$$n = n_1 + n_2 \quad (9.1)$$

$n_1$  – số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút trong hệ;

$n_2$  – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút trong hệ.

Số chuyển vị xoay  $n_1$  được xác định dễ dàng theo số nút của hệ. Ví dụ, với hệ trên hình 9.1a và 9.2a, ta có  $n_1 = 3$ .

Số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút thường khó thấy ngay được vì chuyển vị thẳng của các nút trong hệ thường không độc lập mà có liên quan với nhau theo giả thiết 3.



Hình 9.1



Để thấy rõ điều này, ta xét khung trên hình 9.1a. Các nút 1, 2, 3 lần lượt bị các thanh A-1, B-2, C-3 ngăn cản nên không có chuyển vị theo phương thẳng đứng, chúng chỉ có thể chuyển vị theo phương ngang. Nhưng khi chuyển vị theo phương ngang, theo giả thiết 3, chiều dài của các thanh 1-2 và 2-3 không đổi nên chuyển vị thẳng theo phương ngang của ba nút 1, 2, 3 bằng nhau. Nói khác đi, chỉ cần biết chuyển vị của một trong ba nút đó là đủ, nghĩa là hệ chỉ có một chuyển thẳng theo phương ngang là chưa biết nên  $n_2 = 1$ . Tuy nhiên, cách lập luận vừa trình bày chỉ áp dụng để dàng cho những hệ đơn giản. Cần có một cách tìm thực hành tổng quát để xác định số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết  $n_2$ .

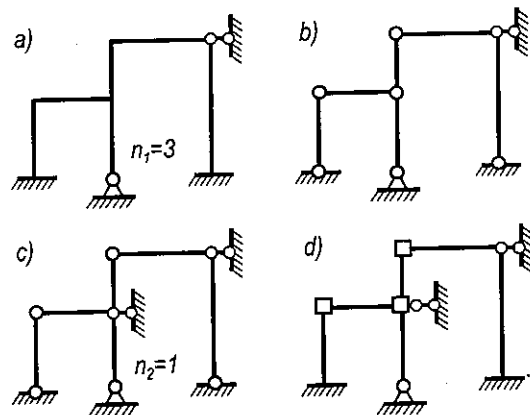
Nếu chấp nhận giả thiết 3, ta có thể xác định  $n_2$  theo cách sau: *Tương tự thay các nút và các liên kết ngàm của hệ bằng các khớp sẽ được một hệ mới, nói chung là biến hình. Thêm vào hệ mới đó các liên kết loại một (liên kết thanh) vừa đủ để sao cho hệ trở thành bất biến hình. Số liên kết cần thêm vào đó chính là số  $n_2$  cần tìm.*

Thật vậy, nếu chỉ nhằm mục đích tìm số lượng chuyển vị thẳng chưa biết của các nút thì sơ đồ hệ đã thay khớp cho ta hình dung được rõ ràng những chuyển vị thẳng của hệ đồng thời thỏa mãn giả thiết 3 khi khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ.

Khi thêm các liên kết loại một vừa đủ để cho hệ bất biến hình tức là ngăn cản các chuyển vị thẳng có thể xảy ra tại các nút hệ, do đó số liên kết thanh phải thêm vào hệ đã thay khớp chính là số chuyển vị thẳng độc lập còn chưa biết của hệ cho ban đầu.

Ví dụ, với hệ trên hình 9.2a, sau khi đặt khớp vào

các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 9.2b, để cho hệ này trở thành bất biến hình cần đặt thêm một liên kết thanh như trên hình 9.2c, như vậy  $n_2 = 1$ . Nếu phủ nhận giả thiết 3 thì  $n_1$  không đổi còn  $n_2$  sẽ tăng lên. Thật vậy, khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì chuyển vị thẳng tại các nút sẽ độc lập với nhau, tại mỗi nút và khớp nói chung tồn tại hai chuyển



Hình 9.2

vị thẳng chưa biết. Do đó  $n_2$  được xác định bằng hai lần số nút và khớp trừ cho số chuyển vị thẳng đã biết (khi tại đó có đặt liên kết ngăn cản chuyển vị thẳng). Ví dụ với hệ trên hình 9.2a, ta có  $n_2 = 2.4 - 1 = 7$ .

Ta thấy, trong phương pháp lực, số ẩn số chính là bậc siêu tĩnh và không đổi. Trong phương pháp chuyển vị, số ẩn số có tính chất quy ước, có thể thay đổi và phụ thuộc vào ba yếu tố sau:

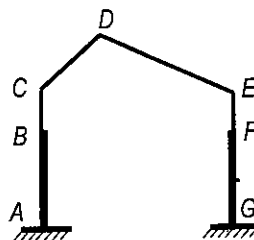
\* Phụ thuộc các giả thiết chấp nhận (như đã trình bày ở trên).

\* Phụ thuộc sơ đồ tính rời rạc hóa chấp nhận.

Chẳng hạn, khi tính hệ có thanh cong, ta thay thanh cong bằng thanh gãy khúc, số ẩn số phụ thuộc số đỉnh của thanh gãy khúc thay thế.

\* Phụ thuộc các phần tử mẫu mà người thiết kế đã có sẵn.

Khi tính theo phương pháp chuyển vị ta cần vận dụng các phần tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Phần tử mẫu đơn giản nhất là thanh thẳng có tiết diện không đổi. Trong một số tài liệu còn cung cấp các phần tử mẫu phức tạp hơn như: thanh gãy khúc hình tam giác, thanh cong, thanh có tiết diện thay đổi...



Hình 9.3

Nếu vận dụng các phần tử mẫu phức tạp này thì số ẩn số của hệ sẽ giảm xuống. Với hệ trên hình 9.3, nếu chỉ dùng các phần tử mẫu dưới dạng thanh thẳng có tiết diện không đổi thì hệ có sáu phần tử, năm nút, do đó  $n = 5 + 4 = 9$ . Nếu dùng phần tử dưới dạng thanh gãy khúc (CDE) và thanh có tiết diện thay đổi (ABC và EFG) thì hệ có ba phần tử, hai nút C và E với hai chuyển vị ngang độc lập tại C và E, do đó  $n = 2 + 2 = 4$ .

## 9.2. CÁCH TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

### 9.2.1. Nội dung phương pháp chuyển vị

Tương tự như phương pháp lực, có thể tóm tắt nội dung phương pháp chuyển vị như sau: để tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ thực.

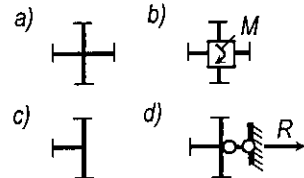
Dưới đây ta sẽ lần lượt triển khai cụ thể nội dung đã nêu của phương pháp.

### 9.2.2. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ.

Những liên kết phụ đặt thêm vào hệ gồm hai loại:

\* **Liên kết mômen:** đặt vào các nút có chuyển vị xoay (hình 9.4a), có tác dụng làm cho nút không thể xoay được nhưng vẫn có thể chuyển vị thẳng (khác với liên kết ngàm vì liên kết ngàm còn ngăn cản cả chuyển vị thẳng). Quy ước vẽ liên kết mômen như trên hình 9.4b. Trong liên kết mômen chỉ phát sinh phản lực mômen  $M$  (phản lực dưới dạng mômen).



Hình 9.4

\* **Liên kết lực:** đặt vào các nút có chuyển vị thẳng (hình 9.4c), được chọn làm ẩn số, có tác dụng làm cho nút không chuyển vị thẳng được. Liên kết lực được mô tả bằng liên kết thanh. Trên hình 9.4d là liên kết lực ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương ngang của nút. Trong liên kết lực chỉ phát sinh phản lực lực  $R$  (phản lực dưới dạng lực) dọc theo trục của liên kết.

Với các hệ trên hình 9.1a, 9.2a, sau khi thêm các liên kết phụ ngăn cản toàn bộ chuyển vị của các nút, ta được hệ cơ bản như trên hình 9.1d, 9.2d.

Điều quan trọng khi lập hệ cơ bản là trong hệ cơ bản chỉ tồn tại những phần tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Nếu dùng hệ cơ bản trong đó có thêm đầy đủ các liên kết ngăn cản như đã nêu ở trên thì yêu cầu này luôn thỏa mãn.

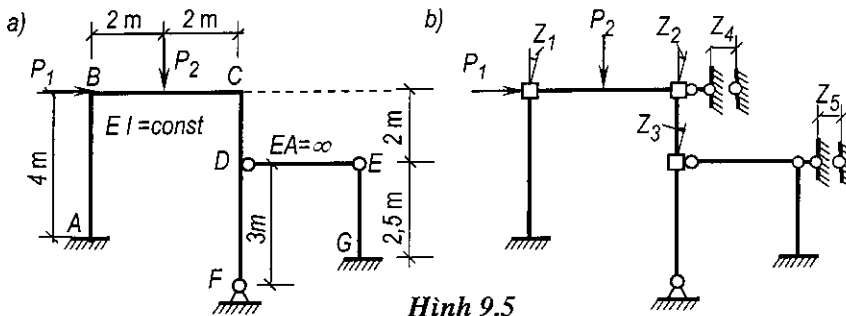
Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố có ảnh hưởng đến số lượng ẩn số nêu ở trên đã được xác định.

### 9.2.3. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong phương pháp lực, hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị là điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Do đó, để xây dựng hệ phương trình chính tắc ta cần so sánh sự khác nhau về mặt chuyển vị và phản lực giữa hệ cơ bản và hệ thực.

Giả sử xét hệ siêu tĩnh như trên hình 9.5a và hệ cơ bản tương ứng như trên hình 9.5b ta thấy:

- ◆ Trong hệ cho ban đầu, chuyển vị tại các nút (chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng theo phương ngang tại các nút  $B, C, D$ ) nói chung tồn tại. Vì không có các liên kết đặt thêm vào nút nên không có phản lực ngăn cản những chuyển vị này.
- ◆ Trong hệ cơ bản, chuyển vị tại các nút nêu ở trên không có vì tại đó tồn tại các liên kết ngăn cản. Trong các liên kết, nói chung tồn tại các thành phần phản lực tương ứng.



Hình 9.5

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực, ta cần tạo ra trong hệ cơ bản những chuyển vị cưỡng bức tương ứng tại các liên kết đặt thêm vào hệ. Lần lượt ký hiệu các chuyển vị là  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$ , với  $Z_k$  là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào hệ. Các chuyển vị này chưa biết và giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị. Tất nhiên, các chuyển vị  $Z_k$  cần phải có giá trị để sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do chúng gây ra và do tải trọng gây ra phải bằng không.

Như vậy, ta có  $n$  điều kiện để xác định  $n$  chuyển vị  $Z_k$  cần tìm như sau:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2)$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = R_{kZ_1} + R_{kZ_2} + \dots + R_{kZ_k} + \dots + R_{kZ_n} + R_{kP},$$

trong đó:

- $R_{kZ_i}$  – phản lực tại liên kết thứ  $k$  trong hệ cơ bản, do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $i$  gây ra;
- $R_{kP}$  – phản lực tại liên kết thứ  $k$  do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $r_{ki}$  là phản lực tại liên kết thứ  $k$  do riêng chuyển vị cưỡng bức  $Z_i=1$  tại liên kết thứ  $i$  gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$R_{kZ_i} = r_{ki}Z_i.$$

Như vậy, điều kiện (9.2) sẽ có dạng:

$$\boxed{r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0,} \quad (9.3)$$

với  $k = 1, 2, \dots, n.$

Đó là hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.

Trong hệ phương trình chính tắc,  $r_{kk}$  là hệ số chính;  $r_{ki}$  là hệ số phụ còn  $R_{kP}$  là số hạng tự do. Để thống nhất, ta quy ước chiều dương của các phản lực này cùng chiều với chiều dương của các chuyển vị cưỡng bức. Theo định lý tương hỗ của các phản lực đơn vị, ta có:

$$r_{ki} = r_{ik}.$$

#### 9.2.4. Cách xác định nội lực trong hệ cơ bản

Để chuẩn bị cho việc xác định các hệ số, số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc và xác định nội lực trong hệ siêu tĩnh sau này, ta cần biết cách vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản chịu tác dụng của các nguyên nhân khác nhau.

##### 1. Biểu đồ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản

Như đã biết, trong hệ cơ bản chỉ bao gồm những phần tử đơn giản, tức là những thanh thẳng có tiết diện không đổi, liên kết ở hai đầu có thể là ngàm, khớp hoặc ngàm trượt. Do đó, tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong từng phần tử. Bởi vậy, để vẽ biểu đồ nội lực  $S_p^0$  trên toàn hệ cơ bản ta chỉ cần vẽ riêng rẽ trên từng phần tử đơn giản của hệ.

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta đã sử dụng phương pháp lực xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau thường gặp trong thực tế. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 9.1.

Với hệ cơ bản của hệ cho trên hình 9.5a, tải trọng chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong phạm vi thanh BC. Sử dụng các số liệu cho trong bảng 9.1 ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản như trên hình 9.6a.

##### 2. Biểu đồ nội lực do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản

Cũng tương tự như trên, để phục vụ cho việc tính toán, người ta dùng phương pháp lực để xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản chịu

tác dụng của các chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị. Nếu bỏ qua biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 9.2.

**Bảng 9.1**

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
1		$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2}{l^3}(1+2a)$	$-\frac{Pa^2}{l^3}(3l-2a)$
2		$\frac{Mb}{l^2}(2a-b)$	$\frac{Ma}{l^2}(a-2b)$	$-\frac{6Mab}{l^3}$	
3		$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
4		0	0	-m	-m
5		$-\frac{\alpha EI}{h}(t_2 - t_1)$ $\alpha$ - hệ số giãn nở dài vì nhiệt		0	
6		$-\frac{Pab}{2l^2} \times$ $\times (2l - a)$	0	$\frac{Pb}{2l} \left[ 3 - \frac{b^2}{l^2} \right]$	$-\frac{Pa^2}{2l^2} \left[ 3 - \frac{a}{l} \right]$

Bảng 9.1 (tiếp)

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
7		$\frac{M}{2} \left[ 1 - \frac{3b^2}{l^2} \right]$	0	$-\frac{3M}{2l^3} (l^2 - b^2)$	
8		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$
9		0	0	-m	-m
10		$-\frac{3\alpha EI}{2h} (t_2 - t_1)$ $\alpha$ - hệ số dẫn nở dài vì nhiệt	0	$-\frac{3\alpha EI}{2hl} (t_2 - t_1)$	
<p><b>Chú thích:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Khi thanh nằm nghiêng so với phương ngang theo góc <math>\varphi</math>, tải trọng thẳng đứng: <ul style="list-style-type: none"> <li>Các kích thước <math>a, b, l</math> là kích thước theo phương ngang.</li> <li>Các công thức về lực cắt cần được nhân với <math>\cos\varphi</math>.</li> </ul> </li> <li>Khi thanh nằm nghiêng so với phương ngang theo góc <math>\varphi</math>, tải trọng thẳng đứng phân bố theo chiều dài xiên của thanh, các số liệu cần được chia cho <math>\cos\varphi</math>.</li> </ol>					

Ví dụ, với hệ cơ bản của hệ cho trên hình 9.5a. Sử dụng các số liệu cho trong bảng 9.2 ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị cưỡng bức  $Z_1$  và  $Z_5$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 9.6b và c.

### 9.2.5. Cách xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc

Về ý nghĩa, các hệ số  $r_{ki}$  và số hạng tự do  $R_{kP}$  chính là phản lực tại liên kết thứ  $k$  lần lượt do chuyển vị cưỡng bức  $Z_i = 1$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó, tuy có nhiều cách xác định khác nhau nhưng biện pháp

đơn giản nhất là vận dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Sau khi vẽ được biểu đồ mômen uốn do các nguyên nhân  $Z_i = l$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta dễ dàng xác định được phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ tức là xác định được các hệ số và số hạng tự do.

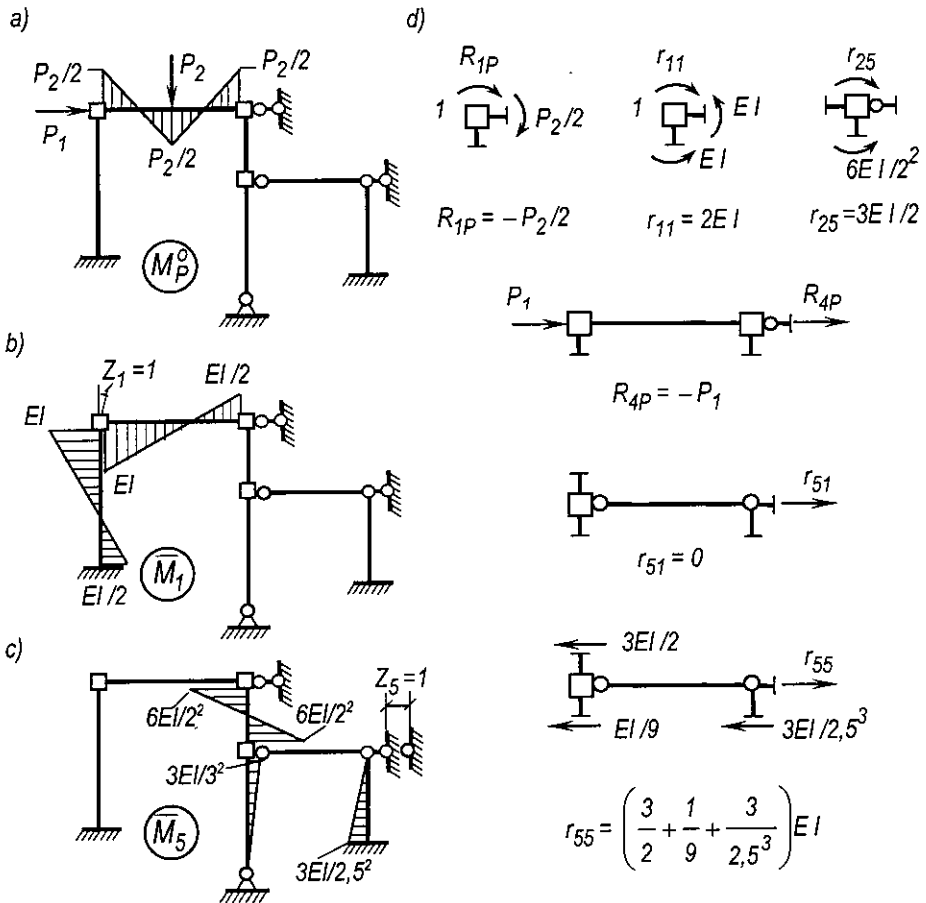
**Bảng 9.2**

TT	Sơ đồ và biểu đồ mômen uốn	$M_0$	$M_1$	$Q_0 = Q_1$
1		$\frac{4EI}{l}$	$-\frac{2EI}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}$
2		$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{12EI}{l^3}$
3		$\frac{3EI}{l}$	0	$-\frac{3EI}{l^2}$
4		$-\frac{3EI}{l^2}$	0	$\frac{3EI}{l^3}$

**Chú thích:**

1. Trong trường hợp 1 và 2, nếu ngàm bên phải là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song vuông góc với trục thanh, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.
2. Trong trường hợp 3 và 4, nếu gối tựa bên phải không thẳng đứng mà nghiêng một góc bất kỳ, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.





Hình 9.6

1. Trường hợp liên kết  $k$  là liên kết mômen:

- ◆ Để xác định  $r_{ki}$  ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $\bar{M}_i$  do  $Z_i = 1$  gây ra trên hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị của  $r_{ki}$  cần tìm.
- ◆ Để xác định  $R_{kP}$  ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $M_P^0$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị cần tìm của  $R_{kP}$ .

2. Trường hợp liên kết  $k$  là liên kết lực

- ◆ Để xác định  $r_{ki}$  ta thực hiện mặt cắt qua liên kết  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $\bar{M}_i$  do riêng  $Z_i = 1$  gây ra trong hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận bất kỳ sao cho dễ dàng tìm được giá trị  $r_{ki}$  từ điều kiện cân bằng hình chiếu.

- ◆ Để xác định  $R_{kP}$  ta thực hiện mặt cắt qua liên kết  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $M_P^o$  do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận nào đó để khảo sát cân bằng.

Trên hình 9.6d lần lượt trình bày cách xác định  $R_{1P}$ ;  $r_{11}$ ;  $r_{25}$ ;  $R_{4P}$ ;  $r_{51}$ ;  $r_{55}$ .

Khi xác định cần chú ý:

- Chiều dương của các chuyển vị và phản lực tương ứng cần chọn thống nhất.
- Các hệ số chính luôn luôn dương, còn các hệ số phụ  $r_{ki} = r_{ik}$  có thể mang dấu bất kỳ hoặc bằng không.
- Khi liên kết  $k$  là liên kết mômen, ta chỉ cần xác định các mômen uốn quanh nút  $k$  là đủ để viết điều kiện cân bằng mômen. Khi liên kết  $k$  là liên kết lực, ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

### 9.2.6. Cách xác định các đại lượng trong hệ siêu tĩnh

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc, ta xác định được các chuyển vị  $Z_k$ . Đó là những giá trị của chuyển vị cần tìm nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Như vậy, các đại lượng trong hệ cho ban đầu chính là các đại lượng tương ứng trong hệ cơ bản do tải trọng và do các chuyển vị cưỡng bức  $Z_k$  vừa tìm được gây ra. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$(SP) = (S_{Z_1}) + (S_{Z_2}) + \dots + (S_{Z_k}) + \dots + (S_{Z_n}) + (S_P^o),$$

trong đó:

- $(SP)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh;
- $(S_P^o)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, cách xác định đã được trình bày ở điểm 9.2.4;
- $(S_{Z_k})$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_k$  gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $(\bar{S}_k)$  là biểu đồ đại lượng  $S$  do riêng chuyển vị cưỡng bức  $Z_k=1$  gây trong hệ cơ bản (đã trình bày ở điểm 9.2.4), ta có:

$$(S_{Z_k}) = (\bar{S}_k)Z_k.$$

Như vậy, ta có thể xác định đại lượng  $S$  trong hệ siêu tĩnh theo biểu thức:

$$(S_P) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_k)Z_k + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_P^o). \quad (9.4)$$

Biểu thức (9.4) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn  $M$  hay độ võng  $y$ , ta cần thay thế ký hiệu  $S$  bằng ký hiệu tương ứng  $M$  hay  $y$ . Đối với các hệ dầm và khung, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số. Sau khi có biểu đồ mômen uốn ta dễ dàng tìm được các biểu đồ lực cắt và lực dọc như đã thực hiện trong phương pháp lực.

Sau khi tìm được các nội lực, ta cần thực hiện kiểm tra kết quả. Trong thực hành, chỉ cần sử dụng điều kiện cân bằng của các nút và của các bộ phận bất kỳ của hệ để kiểm tra kết quả tìm được.

### 9.2.7. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh

**1. Chuyển vị tại nút:** nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay hoặc chuyển vị thẳng tại các nút thì chính là các chuyển vị  $Z_k$  tương ứng đã tìm được sau khi giải hệ phương trình chính tắc.

**2. Chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong các phần tử:** có thể xác định theo một trong ba cách sau:

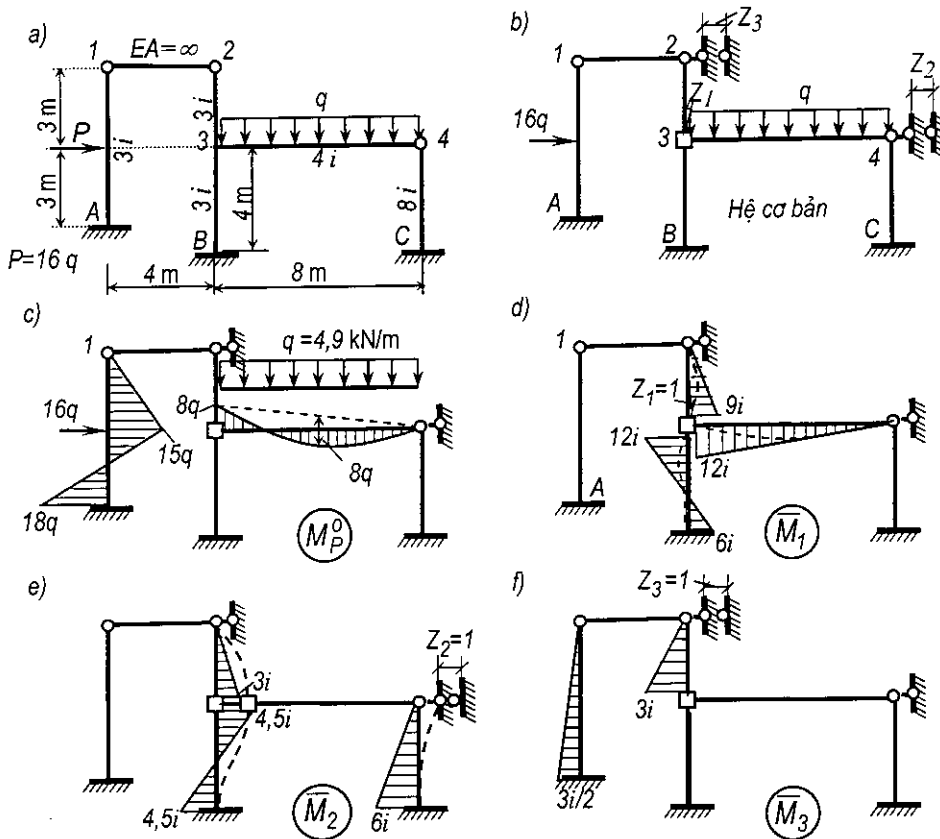
- Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như một nút của hệ. Như vậy, ta đã đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản, không cần thực hiện tính bổ sung nhưng làm tăng số lượng ẩn.
- Sau khi đã biết chuyển vị và nội lực ở hai đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong phần tử đó theo các phương pháp đã trình bày trong chương 7.
- Sau khi đã biết nội lực trong hệ, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với các nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh đã trình bày trong chương 8. Trong thực hành, nên áp dụng cách này.

## 9.3. ÁP DỤNG

**Ví dụ 9.1.** [9] Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cho trên hình 9.7a. Trên hình cho biết các số liệu về độ cứng đơn vị của từng phần tử, biểu thị theo độ cứng đơn vị quy ước  $i = EI/l$  ( $l$  là chiều dài của mỗi thanh tương ứng). Tìm chuyển vị ngang tại 4 và tại điểm đặt lực  $P$ .

Để giải bài toán, ta thực hiện theo thứ tự như sau:

1) Xác định số lượng ẩn số và lập hệ cơ bản. Số chuyển vị xoay chưa biết là 1 (tại nút 3). Số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết là 2 (tại khớp 4 và 2). Do đó  $n=3$ . Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 9.7b, trong đó ta gọi  $Z_1$  là ẩn chuyển vị xoay tại nút 3 còn  $Z_2, Z_3$  là các ẩn chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 4 và 2.



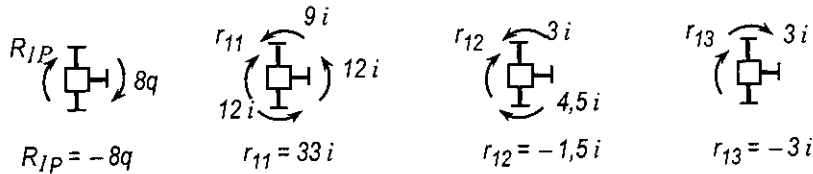
Hình 9.7

2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 9.1, ta vẽ được biểu đồ  $M_P^0$  như trên hình 9.7c.

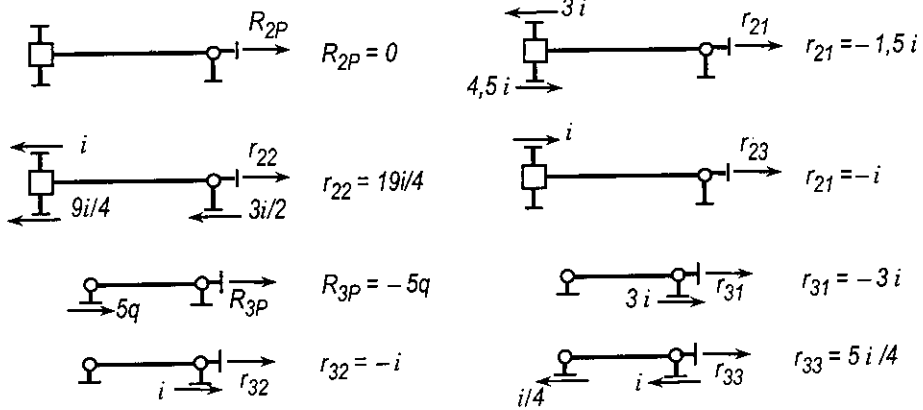
3) Vẽ biểu đồ mômen uốn do từng chuyển vị đơn vị gây ra trong hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 9.2, vẽ các biểu đồ lần lượt do  $Z_1, Z_2, Z_3$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, kết quả như trên các hình 9.7d, e, f. Khi thực hiện, nên căn cứ vào nguyên nhân  $Z_k$ , vẽ phác dạng đường biến dạng tương ứng (đường đứt nét) để đặt đúng chiều thớ căng của biểu đồ mômen uốn, tránh những sai lầm về dấu.

4) Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

Khi xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phản lực mômen trong liên kết mômen, ta tách nút 3 để khảo sát cân bằng. Kết quả ghi trên hình 9.8. Khi xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phản lực lực trong các liên kết lực tại 2 và 4, ta lần lượt tách các bộ phận của hệ như trên hình 9.9 để xét cân bằng. Kết quả ghi trên hình tương ứng.



Hình 9.8



Hình 9.9

5) Lập và giải hệ phương trình chính tắc. Trong trường hợp này, ta có:

$$33 i Z_1 - 1,5 i Z_2 - 3 i Z_3 - 8q = 0;$$

$$-1,5 i Z_1 + 4,75 i Z_2 - i Z_3 = 0;$$

$$-3 i Z_1 - i Z_2 + 1,25 i Z_3 - 5q = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Z_1 = 1,09112 \frac{q}{i} \text{ rad}; \quad Z_2 = 2,08997 \frac{q}{i} \text{ m}; \quad Z_3 = 8,29066 \frac{q}{i} \text{ m}.$$

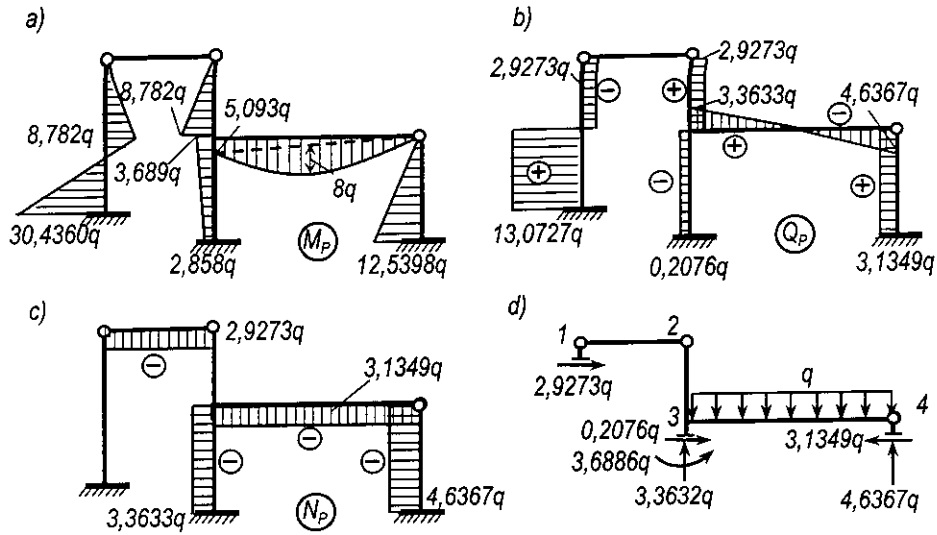
6) Vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ mômen uốn tìm được theo công thức:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (\bar{M}_3)Z_3 + (M_P^0),$$

Kết quả tìm được như trên hình 9.10a.

Từ biểu đồ mômen uốn ta suy ra biểu đồ lực cắt theo nguyên tắc đã trình bày trong phương pháp lực. Kết quả như trên hình 9.10b. Từ biểu đồ lực cắt,

lần lượt tách các nút theo thứ tự 1, 2, 3, 4 để khảo sát cân bằng, ta sẽ vẽ được biểu đồ lực dọc như trên hình 9.10c.



Hình 9.10

7) Kiểm tra kết quả: xét điều kiện cân bằng tại các nút, tiếp đó xét điều kiện cân bằng của một vài bộ phận nào đó của hệ.

Ví dụ, kiểm tra cân bằng của phần bên trên hệ bằng cách thực hiện mặt cắt ngang qua các tiết diện kê bên dưới các khớp và nút 1, 3, 4 (hình 9.10d). Ta có:

$$\sum X = 2,9273q + 0,2076q - 3,1349q = 0;$$

$$\sum Y = 3,3633q + 4,6367q - 8q = 0;$$

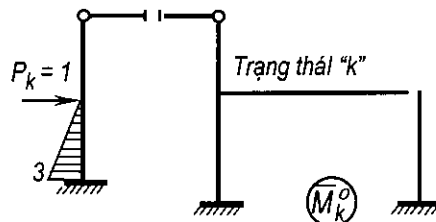
$$\sum M_3 = 2,9273q \cdot 3 - 3,6886q - 4,6367 \cdot 8 + 32q = -0,0003 \approx 0.$$

Các điều kiện cân bằng đều được thỏa mãn.

8) Xác định chuyển vị:

Chuyển vị ngang tại khớp 4 chính là chuyển vị  $Z_2$  vừa tìm được ở trên, do đó  $x_4 = 2,08997q/li$  m; (hướng về bên phải).

Để xác định chuyển vị ngang tại điểm đặt lực  $P$ , ta tạo trạng thái "k" trong hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ của phương pháp lực như trên hình 9.11. Vẽ biểu đồ

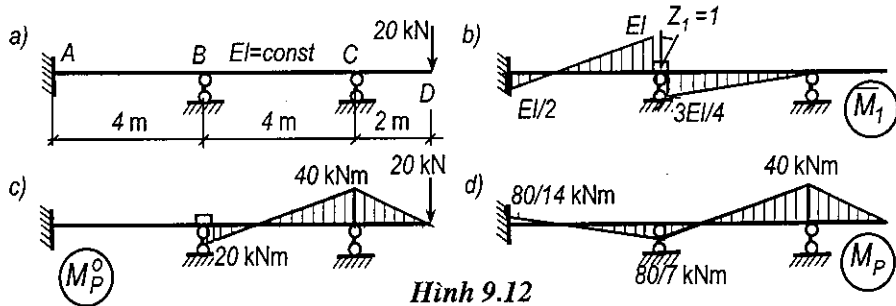


Hình 9.11

mômen uốn ở trạng thái "k" tiếp đó đem nhân với biểu đồ mômen uốn ( $M_P$ ) đã tìm được trên hình 9.10a. Kết quả:

$$x_P = \frac{1}{EI} \left[ \frac{30,436q \cdot 3}{2} \cdot 2 - \frac{8,782q \cdot 3}{2} \cdot 1 \right] = \frac{78,135q}{EI} = \frac{468,81q}{i} \quad (\rightarrow)$$

**Ví dụ 9.2.** [9] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm trên hình 9.12a.



Hình 9.12

Cần lưu ý: khi xác định số ẩn số và hệ cơ bản tương ứng, điều quan trọng là ta có thể dễ dàng vẽ được các biểu đồ mômen uốn cần thiết trong hệ cơ bản. Trong bài toán này, chỉ cần giải với một ẩn số và hệ cơ bản tương ứng như trên hình 9.12b. Phương trình chính tắc:

$$r_{11} Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Biểu đồ  $\bar{M}_1$  được vẽ theo các số liệu 1, 3 trong bảng 9.2, kết quả như trên hình 9.12b. Khi vẽ biểu đồ  $M_P$  ta quy đổi lực đặt tại D về gối C thành một lực thẳng đứng (không gây ra nội lực trong hệ) và một mômen 40 kNm đặt tại C. Sử dụng số liệu thứ 7 trong bảng 9.1 ta dễ dàng vẽ được biểu đồ như trên hình 9.12c. Tách nút B từ các biểu đồ  $\bar{M}_1$  và  $M_P$ , tìm được:

$$r_{11} = 7EI/4; \quad R_{1P} = 20 \text{ kNm}. \quad \text{Suy ra: } Z_1 = -80/7EI.$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm được xác định theo công thức:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_P).$$

Kết quả như trên hình 9.12d.

#### 9.4. SƠ ĐỒ CHUYỂN VỊ THẲNG TẠI CÁC NÚT CỦA HỆ THANH

Khi tính hệ có ẩn là chuyển vị thẳng, ta cần cho nút chuyển vị thẳng bằng đơn vị để xác định nội lực trong hệ cơ bản và xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc. Ta xét hai trường hợp:

\* Khi không chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn, thì tại mỗi nút có hai chuyển vị thẳng. Tuy số ẩn tăng lên song chuyển vị thẳng giữa các nút độc lập với nhau. Chuyển vị thẳng tại mỗi nút chỉ gây ảnh hưởng cục bộ nên dễ dàng vẽ được các biểu đồ theo bảng mẫu 9.2 cho mọi phần tử.

\* Khi chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn, thì số ẩn giảm xuống song chuyển vị thẳng giữa các nút có sự liên quan với nhau. Nói chung, khi một nút nào đó chuyển vị thẳng thì các nút khác cũng có chuyển vị thẳng kéo theo. Muốn vận dụng các số liệu cho trong bảng 9.2 để xác định nội lực ta cần biết giá trị của chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh theo phương vuông góc với trục thanh.

Trong hệ có các thanh đứng song song, việc xác định những thành phần chuyển vị nói trên tương đối dễ dàng. Thật vậy, nếu bỏ qua biến dạng dọc trục của các thanh thì khi một nút nào đó chuyển vị thẳng, các thanh ngang sẽ chuyển vị tịnh tiến nên thành phần chuyển vị nói trên sẽ có giá trị bằng không, các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị thẳng tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh.

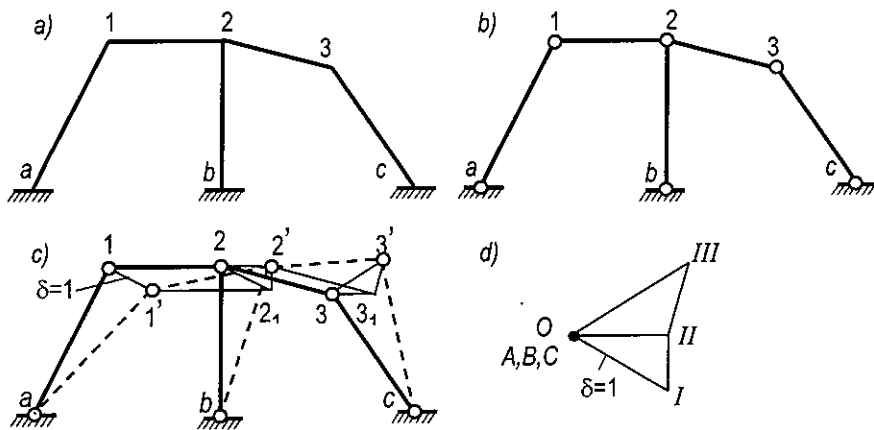
Trong hệ có các thanh đứng không song song, nói chung thành phần chuyển vị thẳng nói trên tồn tại đối với cả thanh ngang và thanh đứng với giá trị khác nhau đối với mỗi thanh đứng. Do đó ta cần nghiên cứu cách xác định giá trị của thành phần chuyển vị này.

Để tìm hiểu cách xác định, ta xét hệ cho trên hình 9.13a. Giả sử gây chuyển vị cưỡng bức tại một nút nào đó của hệ, chẳng hạn nút  $I$  với giá trị  $\delta$  bằng đơn vị theo phương vuông góc với trục thanh  $a-I$ . yêu cầu tìm thành phần chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh, theo phương vuông góc với trục mỗi thanh đó.

Vì chỉ xét chuyển vị thẳng mà không xét đến chuyển vị xoay của các nút cho nên ta có thể thay thế hệ đã cho bằng hệ thanh khớp trong đó các nút và ngầm được thay bằng khớp như trên hình 9.13b. Nếu chú ý đến giả thiết 3 thì khi nghiên cứu chuyển vị thẳng, ta có thể xem các thanh là tuyệt đối cứng. Để xác định các thành phần chuyển vị cần tìm, trước tiên ta xác định chuyển vị của các nút. Trong trường hợp này, các điểm  $a, b, c$  (hình 9.13c) nối với trái đất nên vẫn đứng yên trong quá trình hệ chuyển vị. Khi cho nút  $I$  chuyển vị đến vị trí mới là  $I'$ , thanh  $a-I$  sẽ có vị trí  $a-I'$ . Bây giờ cần tìm vị trí mới  $2'$  và  $3'$  của các nút 2 và 3.



Điểm 2 có liên quan đến các điểm 1 và b bằng các thanh 2-1 và 2-b. Các điểm 1 và b có vị trí mới đã được xác định nên ta có thể xác định vị trí mới của 2 bằng hình học như sau: nếu giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh 2-b thì thanh 1-2 sẽ chuyển dời tịnh tiến tới  $1'-2_1$  do kết quả chuyển vị của thanh a-1, tiếp đó, vì điểm 1' được giữ cố định tại vị trí mới nên điểm  $2_1$  chỉ có thể chuyển dời theo phương vuông góc với thanh 1-2 (chú ý là chuyển vị được xem là nhỏ). Mặt khác, nếu giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh 1-2 thì điểm 2 chỉ có thể chuyển dời so với điểm b theo phương vuông góc với thanh 2-b. Nhưng điểm 2 bị ràng buộc bởi cả hai thanh đó nên vị trí mới 2' của điểm 2 chính là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh b-2 và 1-2 lần lượt kẻ từ 2 và  $2_1$ . Sau khi tìm được vị trí mới 2' của 2, ta tìm được vị trí mới 1'-2' và b'-2' của các thanh 1-2 và b-2, tiếp đó suy ra các thành phần chuyển vị cần tìm của thanh 1-2 và b-2 lần lượt là các đoạn  $2_1-2'$  và  $2-2'$  (hình 9.13c).



Hình 9.13

Biết vị trí mới của 2 và của c ta có thể tìm được vị trí mới 3' của 3 theo lập luận tương tự như đã thực hiện đối với điểm 2. Vị trí mới 3' của điểm 3 là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh 3-c và 3-2 lần lượt kẻ từ 3 và  $3_1$ . Thành phần chuyển vị cần tìm của các thanh 3-c và 2-3 lần lượt là các đoạn 3-3' và  $3_1-3'$  trên hình 9.13c.

Từ những nhận xét trên, ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách sử dụng sơ đồ chuyển vị với cách vẽ như sau (hình 9.13d):

Chọn điểm bất kỳ O làm điểm tượng trưng cho các điểm không chuyển vị, các điểm tượng trưng cho chuyển vị của các điểm a, b, c là A, B, C trùng với điểm O. Với một tỷ lệ xích nào đó, từ A kẻ đoạn  $AI = l$  theo phương vuông

góc với thanh  $a-1$ . Như vậy, đoạn  $AI$  biểu thị chuyển vị tương đối giữa hai đầu thanh  $a-1$  theo phương vuông góc với trục thanh  $a-1$ .

Để tìm điểm  $II$  tượng trưng cho chuyển vị của điểm 2 trên sơ đồ chuyển vị, ta thực hiện như sau: điểm 2 thuộc thanh  $1-2$  nên điểm tượng trưng  $II$  tương ứng trên sơ đồ chuyển vị nằm trên đường  $I-II$  vuông góc với thanh  $1-2$ ; mặt khác, điểm 2 còn thuộc thanh  $b-2$  nên điểm tượng trưng  $II$  còn nằm trên đường  $B-II$  vuông góc với thanh  $b-2$ . Trên sơ đồ chuyển vị, các đoạn  $B-II$  và  $I-II$  lần lượt biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh  $b-2$  và  $1-2$  theo phương vuông góc với trục thanh. Tam giác  $B-II-I$  và tam giác  $2-2'-2_I$  đồng dạng nên đoạn  $B-II$  tỷ lệ với đoạn  $2-2'$ ; đoạn  $I-II$  tỷ lệ với đoạn  $2_I-2'$  theo tỷ lệ tương ứng với tỷ lệ xích đã chọn để vẽ sơ đồ chuyển vị.

Tiếp tục thực hiện tương tự như vậy ta sẽ tìm được điểm tượng trưng  $III$  của điểm 3 là giao điểm của đường  $II-III$  vuông góc với thanh  $2-3$  và đường  $C-III$  vuông góc với thanh  $c-3$ . Các tam giác  $C-II-III$  và  $3-3_I-3'$  đồng dạng nên các đoạn  $C-III$  và  $II-III$  tỷ lệ với các đoạn  $3-3'$  và  $3_I-3'$  đồng thời biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh  $c-3$  và  $2-3$  theo phương vuông góc với trục thanh.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị, đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ  $IK$  trên sơ đồ chuyển vị sẽ biểu thị chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh  $ik$  theo phương vuông góc với trục thanh  $ik$ . Để xác định độ dài  $IK$  ta đo trực tiếp trên sơ đồ chuyển vị theo tỷ lệ xích đã chọn hoặc giải các tam giác theo các góc, cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

**Ví dụ 9.3.** [9] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cho trên hình 9.14a.

Hệ có hai ẩn: chuyển vị xoay tại nút 1 và chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 2. Hệ cơ bản như trên hình 9.14b. Biểu đồ  $M_p^0$  (hình 9.14c) và biểu đồ  $\bar{M}_1$  (hình 9.14d) do tải trọng và do chuyển vị xoay  $Z_1 = 1$  gây ra trong hệ cơ bản tìm được dễ dàng theo các số liệu trong bảng 9.1 và 9.2.

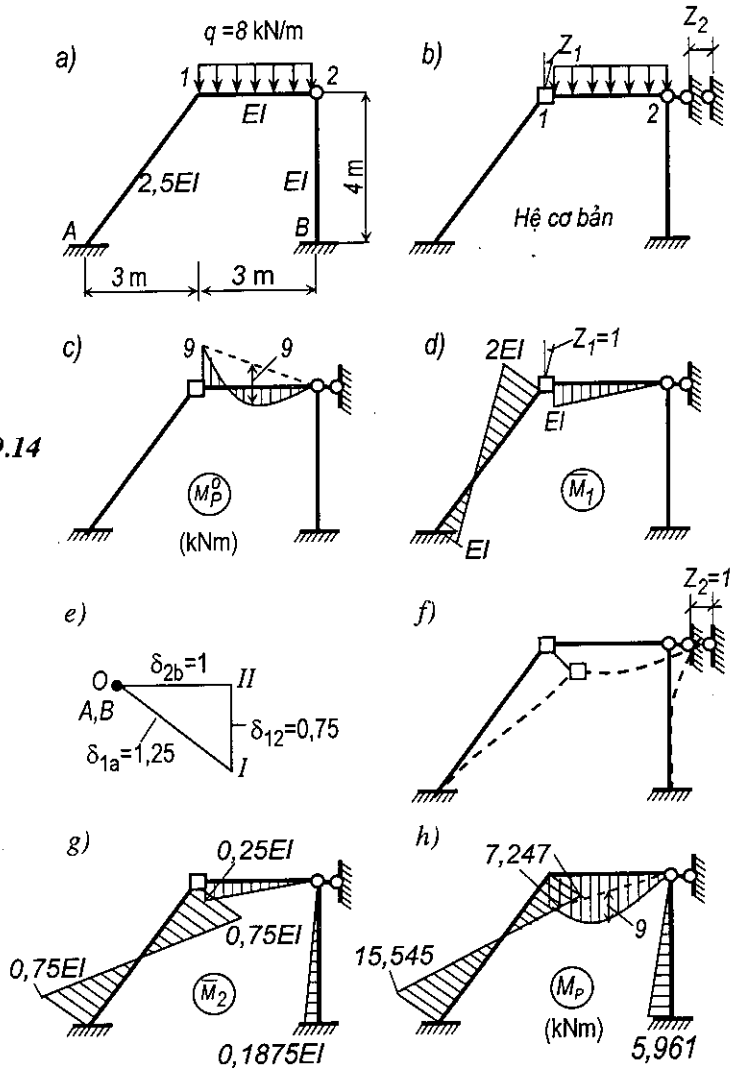
Để vẽ biểu đồ  $\bar{M}_2$  do chuyển vị thẳng  $Z_2 = 1$  gây ra trong hệ cơ bản ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị. Chọn điểm  $O$  bất kỳ, tượng trưng cho tất cả các điểm bất động (hình 9.14e), các điểm  $A, B$  sẽ trùng với  $O$ . Từ  $O$ , ta dựng đoạn  $O-II = \delta_{2b} = 1$  theo phương vuông góc với thanh  $2-B$  ta được điểm tượng trưng  $II$  của điểm 2. Điểm tượng trưng  $I$  chính là giao điểm của đường  $O-I$

vuông góc với thanh  $a-1$  và đường  $II-I$  kẻ từ  $II$  vuông góc với thanh  $1-2$ . Từ sơ đồ chuyển vị ta xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh và được kết quả như sau:

$$\delta_{2b} = B-II = 1; \quad \delta_{12} = I-II = 0,75; \quad \delta_{1a} = A-I = 1,25.$$

Sơ đồ biến dạng tương ứng của hệ như trên hình 9.14f. Vận dụng bảng 9.2 đồng thời căn cứ vào các số liệu vừa tìm được và đường biến dạng của các thanh ta vẽ được biểu đồ  $\bar{M}_2$  như trên hình 9.14g.

Hình 9.14



Quá trình xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được trình bày trong bảng 9.3.

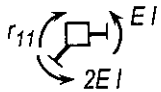
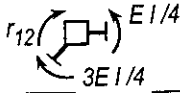
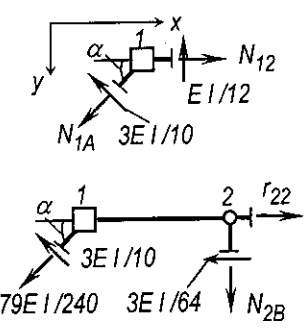
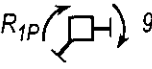
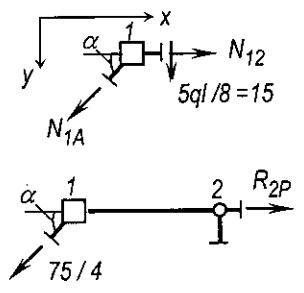
Hệ phương trình chính tắc:

$$3EIZ_1 - \frac{1}{2}EIZ_2 - 9 = 0; \quad -\frac{1}{2}EIZ_1 + \frac{31}{64}EIZ_2 - \frac{45}{4} = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Z_1 = \frac{639}{77EI} \text{ rad}; \quad Z_2 = \frac{2448}{77EI} \text{ m.}$$

Bảng 9.3

Dại lượng	Biểu đồ	Bộ phận tách	Phương trình cân bằng	Kết quả
$r_{11}$	$\bar{M}_1$		$\sum M = r_{11} - EI - 2EI = 0$	$3EI$
$r_{12} = r_{21}$	$\bar{M}_2$		$\sum M = r_{12} - \frac{1}{4}EI + \frac{3}{4}EI = 0$	$-\frac{EI}{2}$
$r_{22}$	$\bar{M}_2$		$\sum Y = N_{1A} \sin \alpha - \frac{3EI}{10} \cos \alpha - \frac{EI}{12} = 0$ <p>Suy ra <math>N_{1A} = \frac{79EI}{240}</math></p> $\sum X = r_{22} - \frac{3EI}{64} - \frac{79EI}{240} \cos \alpha - \frac{3EI}{10} \sin \alpha = 0$	$\frac{31EI}{64}$
$R_{1P}$	$M_P^o$		$\sum M = R_{1P} + 9 = 0$	$-9$
$R_{2P}$	$M_P^o$		$\sum Y = N_{1A} \sin \alpha + 15 = 0$ <p>Suy ra <math>N_{1A} = -\frac{15}{\sin \alpha} = -\frac{75}{4}</math></p> $\sum X = R_{2P} + \frac{75}{4} \cos \alpha = 0$	$-\frac{45}{4}$

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

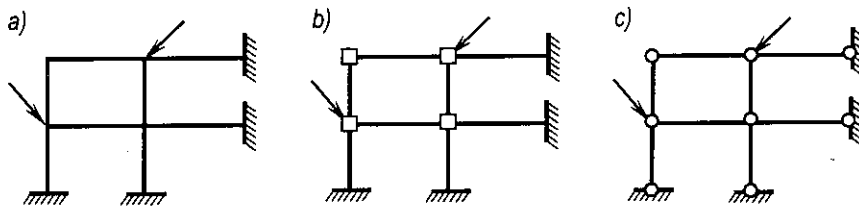
$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 9.14h.

### 9.5. CÁCH TÍNH HỆ CỐ NÚT KHÔNG CHUYỂN VỊ THẲNG CHỊU LỰC TẬP TRUNG CHỈ ĐẶT Ở NÚT

Xét hệ trên hình 9.15a thỏa mãn hai điều kiện nêu trên. Các nút không có chuyển vị thẳng nên trong hệ cơ bản chỉ cần đặt thêm các liên kết mômen (hình 9.15b). Các lực tập trung chỉ đặt ở nút nên mômen uốn trong hệ cơ bản có giá trị bằng không tại mọi tiết diện. Do đó, các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, biểu thị phản lực trong các liên kết mômen, cũng đều bằng không. Như vậy, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất. Mặt khác, người ta đã chứng minh được là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực cũng như trong phương pháp chuyển vị luôn khác không. Do đó hệ phương trình này chỉ thỏa mãn khi các ẩn có giá trị duy nhất bằng không:

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0.$$



Hình 9.15

Thay các  $Z_k = 0$  vào công thức xác định biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^o),$$

đồng thời chú ý là biểu đồ  $(M_P^o)$  không tồn tại, ta thấy mômen uốn trong hệ siêu tĩnh không tồn tại. Do đó lực cắt, đạo hàm của mômen uốn, cũng không tồn tại. Như vậy, nội lực trong hệ chỉ còn lực dọc, nghĩa là hệ sẽ làm việc như một hệ dàn khớp, trong đó các nút và ngàm đều được thay bằng khớp như trên hình 9.15c.

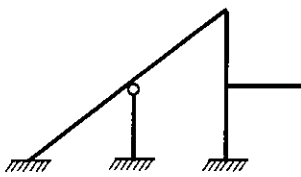
**Kết luận:** trong những hệ siêu tĩnh có các nút không chuyển vị thẳng và chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút, ta có thể thay hệ đó bằng hệ tương đương với các nút và ngàm được thay bằng khớp, tiếp đó tính như một dàn khớp thông thường.

Điều này cho phép ta giải thích được vì sao các mắt của dàn trong thực tế là các nút dàn hồi lại có thể xem gần đúng là các khớp lý tưởng, nếu bỏ qua chuyển vị thẳng của các nút và lực chỉ đặt ở nút.

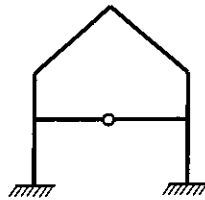
Tất nhiên kết luận trên chỉ là gần đúng bởi vì trong quá trình suy luận ta đã chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục.

## BÀI TẬP CHƯƠNG IX

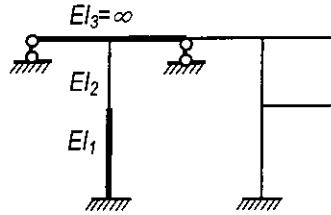
**IX.1 - IX.3.** [8] Xác định số ẩn số và lập hệ cơ bản để tính các hệ cho trên hình IX.1-IX.3 theo phương pháp chuyển vị với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.



Hình IX.1

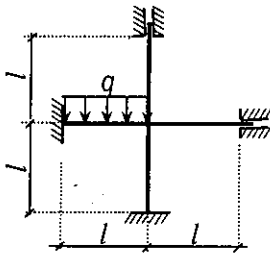


Hình IX.2

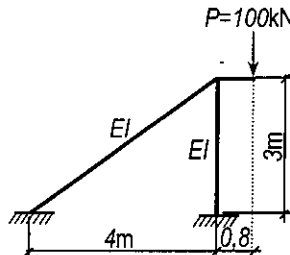


Hình IX.3

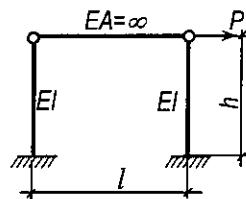
**IX.4 - IX.5.** [8] Vẽ các biểu đồ nội lực cho các khung trên hình IX.4 - IX.6 với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt.



Hình IX.4

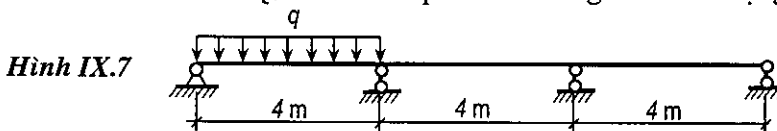


Hình IX.5

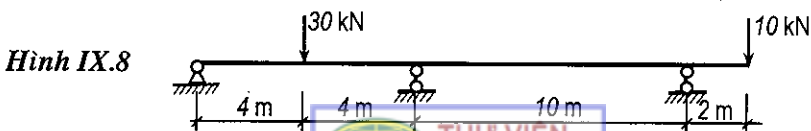


Hình IX.6

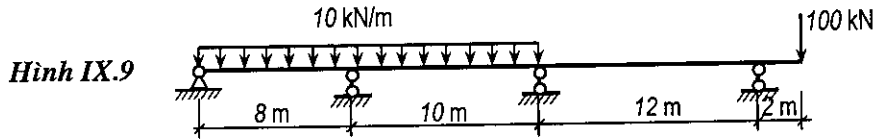
**IX.7 - IX.9.** [9] Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt cho các dầm liên tục trên hình IX.7 - IX.9 với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt.



Hình IX.7

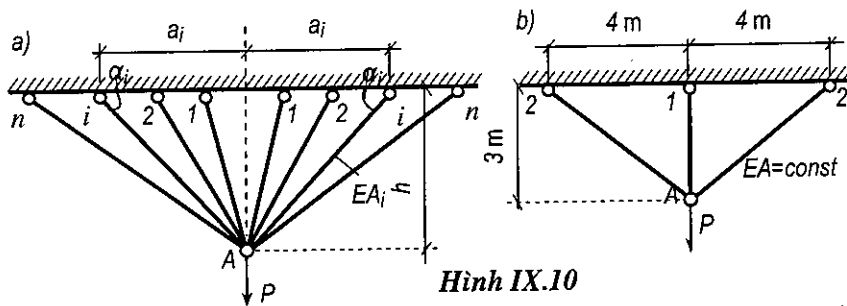


Hình IX.8

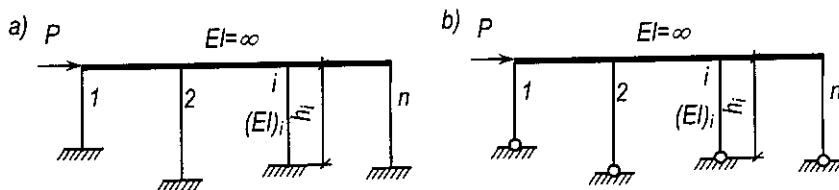


**IX.10.** [8] Cho hệ dàn phẳng gồm  $2n$  thanh, chịu lực thẳng đứng  $P$  đặt tại mắt  $A$  và có kích thước hình học như trên hình IX.10a. Yêu cầu:

1. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại  $A$  và lực dọc  $N_i$  trong thanh bất kỳ thứ  $i$ .
2. Xác định lực dọc  $N_i$  trong các thanh khi  $n = 3$ ;  $h = 3$  m;  $a_1 = 2,5$  m;  $a_2 = 3$  m;  $EA = \text{const}$ .
3. Vận dụng kết quả đã tìm được ở yêu cầu 1, xác định lực dọc  $N_i$  trong các thanh của hệ cho trên hình IX.10b.



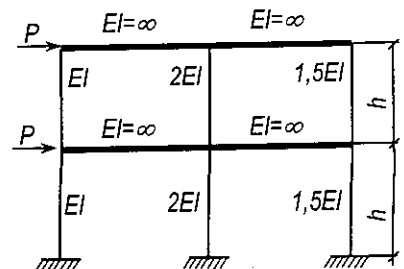
**IX.11.** [9] Cho hệ khung phẳng gồm  $n$  thanh đứng chịu lực  $P$  như trên hình IX.11. Cho biết các thanh ngang có độ cứng bằng vô cùng; thanh đứng thứ  $i$  có độ cứng khi uốn là  $EI_i$ ; chiều cao  $h_i$ . Yêu cầu: xác định mômen uốn lớn nhất về giá trị tuyệt đối trong các thanh đứng tương ứng với hai sơ đồ trên hình IX.11a và IX.11b.



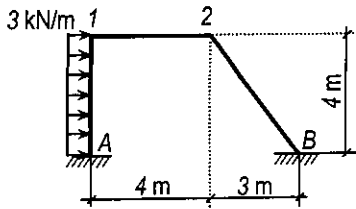
**IX.12.** [9] Vẽ biểu đồ mômen uốn trong các thanh đứng của hệ trên hình IX.12. Cho biết các thanh ngang có độ cứng bằng vô cùng.

**IX.13.** [8] Vẽ các biểu đồ nội lực trong khung chịu tải trọng như trên hình IX.13.

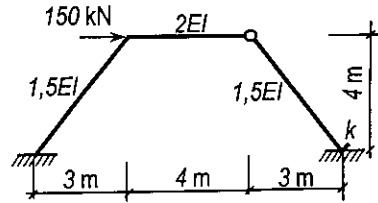
Cho biết:  $EI = \text{const}$ .



IX.14. [9] Tìm giá trị mômen uốn tại tiết diện  $k$  trong hệ trên hình IX.14.



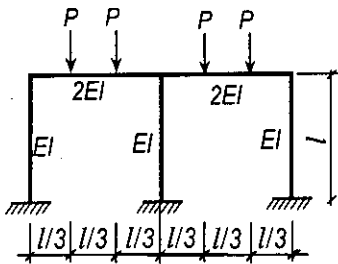
Hình IX.13



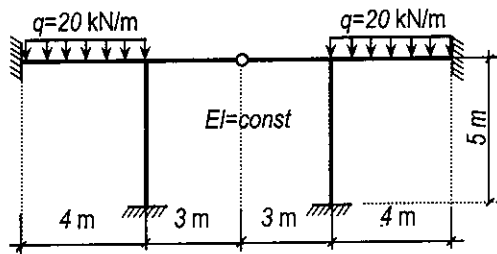
Hình IX.14

IX.15 - IX.17. [9] Vận dụng tính chất đối xứng, tìm sơ đồ tính với nửa hệ tương đương và vẽ biểu đồ mômen uốn trong các hệ trên hình IX.15 - IX.17 với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục

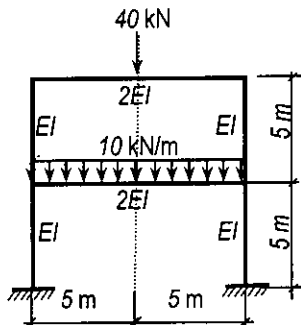
IX.18. [9] Tìm giá trị mômen uốn tại tiết diện  $k$  trong hệ trên hình IX.18.



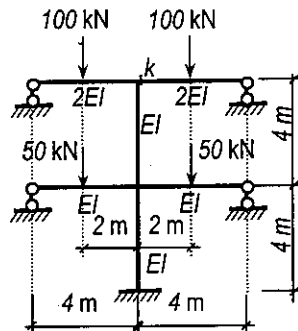
Hình IX.15



Hình IX.16



Hình IX.17



Hình IX.18



# 10

## CÁCH XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

### 10.1. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU HỆ CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Tải trọng di động là tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình, ví dụ như đoàn xe hỏa, đoàn xe ô tô, đoàn người đi trên cầu...

Khác với trường hợp hệ chịu tải trọng bất động, nội lực trong hệ chịu tải trọng di động thay đổi theo vị trí của tải trọng. Do đó khi nghiên cứu cách tính công trình chịu tải trọng di động ta phải giải quyết hai nhiệm vụ sau:

- \* *Xác định vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình, nghĩa là tìm vị trí của tải trọng để sao cho tương ứng với vị trí đó thì đại lượng nghiên cứu (chẳng hạn như mômen uốn, lực cắt, phản lực, chuyển vị...) sẽ có giá trị lớn nhất. Vị trí để tính còn gọi là vị trí bất lợi nhất.*
- \* *Xác định trị số để tính của đại lượng nghiên cứu tương ứng với vị trí để tính của tải trọng. Trị số để tính của đại lượng nghiên cứu là trị số lớn nhất về giá trị tuyệt đối khi tải trọng di động trên công trình.*

Nói chung, về nguyên tắc, muốn tìm vị trí bất lợi nhất và giá trị để tính ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- ◆ Giả thiết coi khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi (điều này phù hợp với các quy định trong quy trình thiết kế) và xác định vị trí của chúng theo một tọa độ chạy  $z$ .
- ◆ Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu  $S$  (nội lực, phản lực hoặc chuyển vị) theo tọa độ chạy  $z$ .
- ◆ Tìm các cực trị của hàm  $S(z)$ . Giá trị cực trị lớn nhất là giá trị để tính còn vị trí tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

Về nguyên tắc, cách giải bài toán cũng tương đối đơn giản nhưng trên thực tế khi vận dụng ta thường gặp nhiều khó khăn vì các hàm  $S(z)$  thường không phải là hàm liên tục về giá trị cũng như về đạo hàm của chúng. Vì vậy, hướng giải quyết này thường không được áp dụng.

Đối với những hệ thanh được phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể giải bài toán đơn giản hơn bằng *phương pháp đường ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ phẳng) hoặc *mặt ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ không gian). Dưới đây ta sẽ nghiên cứu nội dung phương pháp đường ảnh hưởng.

### 10.1.1. Định nghĩa đường ảnh hưởng

*Đường ảnh hưởng  $S$  là đồ thị biểu diễn luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu  $S$  xuất hiện tại một vị trí xác định trên công trình (chẳng hạn phản lực tại liên kết, mômen uốn, lực cắt, lực dọc, chuyển vị tại một tiết diện trên công trình) theo vị trí của một tải trọng tập trung bằng đơn vị lực không thứ nguyên có phương và chiều không đổi di động trên công trình.*

Để cho gọn, ta sẽ ký hiệu đường ảnh hưởng  $S$  là *đ.a.h.  $S$* .

Ngoài định nghĩa trên, trong thực tế còn tồn tại các định nghĩa về đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  khi tải trọng là mômen tập trung di động, khi tải trọng là lực tập trung quay xung quanh một điểm (để tính cần trục) v.v... Trong tài liệu này chỉ đề cập đến các nội dung về đường ảnh hưởng tương ứng với định nghĩa đã nêu ở trên. Trên cơ sở đó, người đọc dễ dàng suy luận cho các trường hợp khác.

### 10.1.2. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng

Theo định nghĩa trên, khi vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  ta thực hiện theo thứ tự như sau:

- 1) Giả thiết trên công trình chỉ có một lực tập trung  $P$  bằng đơn vị đặt cách gốc tọa độ chọn tùy ý một khoảng là  $z$ .
- 2) Xác định đại lượng nghiên cứu  $S$  tương ứng với vị trí của lực  $P$  có tọa độ  $z$  theo các phương pháp tính với tải trọng bất động đã trình bày trong các chương 2, 3, 4, 5. Như vậy ta sẽ được biểu thức giải tích  $S(z)$  của đại lượng nghiên cứu. Biểu thức này là phương trình đường ảnh hưởng  $S$ .
- 3) Cho tọa độ  $z$  biến thiên, tức là tải trọng  $P$  di động trên công trình, căn cứ vào phương trình vừa tìm được, vẽ đồ thị của hàm  $S(z)$ , tức là vẽ được đường ảnh hưởng  $S$ .

**Chú ý :** Nếu đại lượng nghiên cứu  $S$  không phải là một hàm duy nhất liên tục theo tọa độ  $z$  trên toàn bộ công trình thì đường ảnh hưởng  $S$  bao gồm nhiều đoạn với các quy luật biến thiên khác nhau. Trong trường hợp này ta cần lần lượt đặt tải trọng  $P$  trên từng đoạn một để xác định hàm  $S(z)$  tương ứng.

Khi vẽ đường ảnh hưởng cần thống nhất quy ước:



- ◆ Chọn đường chuẩn vuông góc với phương của lực di động hoặc chọn song song với trục của các thanh.
- ◆ Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.
- ◆ Các tung độ dương dựng theo chiều của lực di động.

### 10.1.3. Ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng

Theo định nghĩa và cách vẽ đường ảnh hưởng nêu ở trên, ta suy ra ý nghĩa của một tung độ đường ảnh hưởng như sau:

*Tung độ của đường ảnh hưởng S tại một tiết diện nào đó biểu thị đại lượng S do lực tập trung P bằng đơn vị đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.*

Trong thực tế, lực  $P=1$  là đại lượng có thứ nguyên (TN), do đó ta có:

$$TN \text{ của tung độ đ.a.h. } S = \frac{TN \text{ của } S}{TN \text{ của } P}$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra đơn vị đo của tung độ đ.a.h. S.

Chẳng hạn, nếu lực được đo bằng kN, chiều dài được đo bằng m thì đơn vị của tung độ đ.a.h. phản lực sẽ là kN/kN tức là hư số còn tung độ đ.a.h. mômen uốn là kNm/kN = m v.v...

Để phân biệt rõ khái niệm về đường ảnh hưởng với khái niệm biểu đồ, ta nhớ lại ý nghĩa của một tung độ biểu đồ.

*Tung độ biểu đồ S tại một tiết diện k biểu thị giá trị của đại lượng S tại tiết diện k do các tải trọng đã biết có vị trí không đổi gây ra.*

Như vậy: biểu đồ mô tả sự phân bố của đại lượng nghiên cứu trên tất cả các tiết diện của công trình trong điều kiện tải trọng bất động. Nếu thay đổi vị trí của tải trọng thì biểu đồ cũng thay đổi theo, lúc đó ta phải vẽ lại biểu đồ khác.

Đường ảnh hưởng mô tả sự biến thiên của đại lượng cần nghiên cứu tại một vị trí xác định trên công trình tương ứng với tất cả các vị trí của một tải trọng tập trung P bằng đơn vị. Đường ảnh hưởng không nói lên được sự biến thiên của đại lượng nghiên cứu từ tiết diện này qua tiết diện khác, khi thay đổi vị trí của tiết diện thì cần phải vẽ đường ảnh hưởng khác.

### 10.1.4. Dạng của đường ảnh hưởng

Đ.a.h. S có thể là đường thẳng hoặc cong. Riêng trường hợp đại lượng S là phản lực hoặc nội lực trong hệ tĩnh định, đ.a.h. S bao gồm những đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng tương ứng với một phần xác định của hệ.

Các phần xác định này được giới hạn trong phạm vi mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng  $S$ . Trong trường hợp miếng cứng thành phần của hệ có chứa đại lượng  $S$  thì phạm vi miếng cứng này sẽ được chia thành hai phần xác định bởi mặt cắt qua tiết diện hoặc qua liên kết có chứa đại lượng  $S$ .

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách vẽ các đường ảnh hưởng thông qua các ví dụ về hệ dầm đơn giản. Trên cơ sở những kết quả này có thể suy ra cách vẽ đường ảnh hưởng trong các hệ thanh khác.

**Ví dụ 10.1.** [9] Vẽ các đường ảnh hưởng: phản lực; mômen uốn, lực cắt tại tiết diện  $k, m, n, g$  cho dầm đơn giản có hai đầu thừa trên hình 10.1a khi lực  $P=1$  hướng từ trên xuống dưới di động vuông góc với trục dầm.

*a) Đường ảnh hưởng phản lực*

Theo định nghĩa, đ.a.h. phản lực  $A$  trong dầm đơn giản  $AB$  là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của phản lực  $A$  khi lực  $P=1$  di động trên dầm, tức là khi hoành độ  $z$  của lực đó biến thiên trong khoảng  $(-l_1 \leq z \leq l+l_2)$  nếu chọn gốc tọa độ ở gối  $A$ .

Muốn vậy, ta xác định giá trị của phản lực  $A$  với giả thiết lực  $P=1$  đặt tại hoành độ  $z$  bằng cách viết phương trình cân bằng tĩnh học của dầm dưới dạng tổng mômen đối với điểm  $B$ .

$$\sum M_B = -Al + l(l-z) = 0, \quad \text{hay} \quad \text{đ.a.h. } A = (l-z)/l.$$

Biểu thức đó chứng tỏ phản lực  $A$  là hàm bậc nhất của biến số  $z$ .

Khi  $z$  thay đổi trong khoảng  $(l_1, l+l_2)$  thì đ.a.h.  $A$  có dạng đường thẳng xác định bởi hai điểm:

$$\text{Khi } z = 0; \quad A = +l; \qquad \text{Khi } z = l; \quad A = 0.$$

Tương tự, để vẽ đ.a.h.  $B$  ta viết điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng tổng mômen đối với điểm  $A$ .

$$\sum M_A = Bl - l.z = 0, \quad \text{suy ra} \quad \text{đ.a.h. } B = z/l.$$

$$\text{Khi } z = 0; \quad B = 0. \qquad \text{Khi } z = l; \quad B = +l.$$

Các đường ảnh hưởng phản lực tìm được như trên hình 10.1b và c.

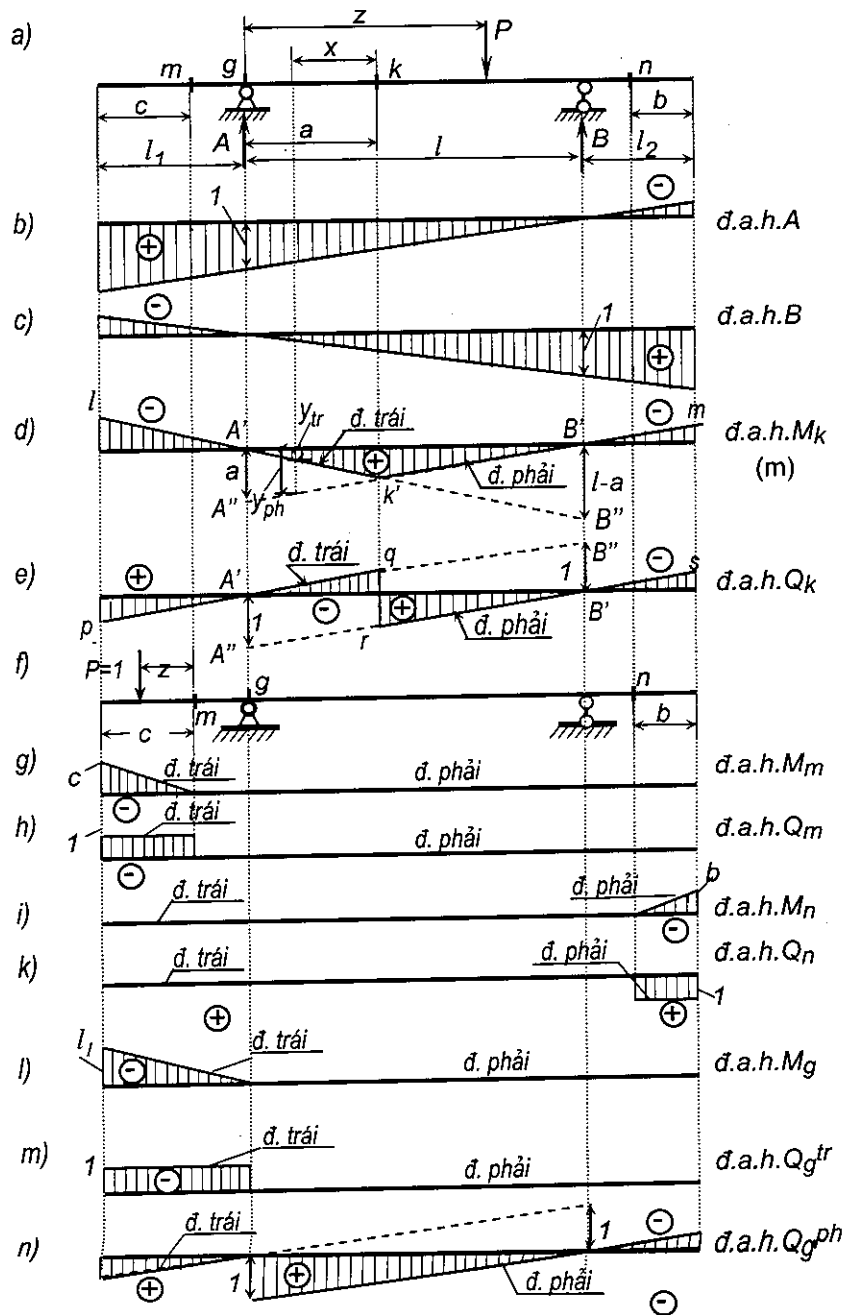
*b) Đường ảnh hưởng nội lực tại một tiết diện trên dầm*

Tiết diện trong dầm bao gồm hai loại:

- \* Tiết diện  $k$  trong khoảng giữa hai gối tựa gọi là tiết diện trong nhịp.



\* Tiết diện  $m, n$  ở đầu thừa của dầm gọi là tiết diện ngoài đầu thừa.



Hình 10.1

Với từng loại tiết diện kể trên, cách thực hiện có khác nhau đôi chút.

Khi tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm, trong dầm không phát sinh lực dọc  $N$  cho nên ta chỉ cần vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn  $M$  và lực cắt  $Q$ .

1. Tiết diện trong nhịp: *đ.a.h*  $M_k$  và *đ.a.h*  $Q_k$ .

Khi di động trên dầm, tải trọng  $P=1$  có thể ở bên trái tiết diện  $k$ , hoặc ở bên phải tiết diện  $k$ . Ứng với mỗi trường hợp đó, phương trình *đ.a.h.* sẽ khác nhau.

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên trái tiết diện  $k$  tức là  $-l_1 \leq z \leq a$ , ta tính mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  bằng cách tưởng tượng cắt dầm tại tiết diện  $k$  thành hai phần và xét điều kiện cân bằng của phần dầm chứa ít lực hơn để cho phương trình được đơn giản (phần bên phải), kết quả:

$$\text{đ.a.h. } M_k = \frac{z}{l}(l-a); \quad \text{đ.a.h. } Q_k = -\frac{z}{l}.$$

Hai biểu thức trên chỉ đúng khi lực  $P=1$  ở phần bên trái tiết diện  $k$ , tức là khi  $-l_1 \leq z \leq a$ . Trên hình 10.1d, e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình trên ứng với vị trí của  $P=1$  ở bên trái tiết diện, gọi là những *đường trái*. Mỗi đường thẳng đó được xác định bằng hai điểm:

Khi  $z = 0: \quad M_k = 0; \quad Q_k = 0.$

Khi  $z = l: \quad M_k = l-a; \quad Q_k = -1.$

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên phải tiết diện  $k$  tức là  $a \leq z \leq (l+l_2)$ , khảo sát sự cân bằng của phần bên trái tiết diện  $k$ , ta tính được mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  như sau

$$\text{đ.a.h. } M_k = \frac{l-z}{l}a; \quad \text{đ.a.h. } Q_k = \frac{l-z}{l}.$$

Khi  $z = 0: \quad M_k = +a; \quad Q_k = +1.$

Khi  $z = l: \quad M_k = 0; \quad Q_k = 0.$

Trên hình 10.1d và e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình tương ứng với các vị trí của tải trọng  $P=1$  ở bên phải tiết diện  $k$ , gọi là những *đường phải*.

Hai đường gãy khúc  $lk'm$  và  $pqrs$  trên hình 10.1d,e lần lượt là *đ.a.h.*  $M_k$  và *đ.a.h.*  $Q_k$  cần tìm.

**Nhận xét :**

- 1) Từ *d.a.h.*  $M_k$  ta nhận thấy đường trái và đường phải giao nhau tại điểm  $k'$  ứng dưới tiết diện  $k$  và đường kéo dài của đường phải cắt đường dóng thẳng đứng ứng dưới gối  $A$  tại điểm  $A''$  với tung độ  $A'A'' = a$  là khoảng cách từ gối tựa trái đến tiết diện  $k$ .
- 2) Từ *d.a.h.*  $Q_k$  ta nhận thấy đường trái và đường phải song song với nhau, đồng thời tại các gối tựa *d.a.h.*  $Q_k$  có tung độ bằng không.
- 3) Đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong dầm đơn giản không có đầu thừa chính là những phần đường ảnh hưởng ở khoảng giữa hai gối tựa của dầm đơn giản có đầu thừa.

**2. Tiết diện ở đầu thừa**

Ví dụ, vẽ *d.a.h.*  $M_m$  và *d.a.h.*  $Q_m$  tại tiết diện  $m$  ở đầu thừa trái của dầm.

- Khi  $P=1$  di động ở phần bên trái tiết diện  $m$ , để cho tiện lợi ta chọn gốc tọa độ  $z$  tại tiết diện  $m$  như trên hình 10.1f và xét sự cân bằng của phần dầm có ít lực (phần đầu thừa), ta được:

$$d.a.h. M_m = -1.z = -z; \quad d.a.h. Q_m = -1; \quad \text{với } (0 \leq z \leq c).$$

Từ hai biểu thức đó ta có: khi  $z = 0$ ;  $M_m = 0$ ;  $Q_m = -1$ ;

$$\text{khi } z = c; M_m = -c; Q_m = -1.$$

Trên hình 10.1g, h ta vẽ các đường trái của *d.a.h.*  $M_m$  và *d.a.h.*  $Q_m$  ứng với khi  $0 \leq z \leq c$ .

- Khi  $P=1$  di động trên phần bên phải tiết diện  $m$ , vẫn xét cân bằng của phần đầu thừa ta có:

$$d.a.h. M_m = 0; \quad d.a.h. Q_m = 0.$$

Như vậy những đường phải của *d.a.h.*  $M_m$  và *d.a.h.*  $Q_m$  hoàn toàn trùng với đường chuẩn.

Cách vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện  $n$  ở đầu thừa bên phải của dầm cũng tương tự như khi vẽ cho tiết diện  $m$ . Kết quả như trên hình 10.1i, k lúc này *d.a.h.* lực cắt mang dấu dương (ngược dấu so với trường hợp *d.a.h.*  $Q_m$ ).

**Nhận xét :**

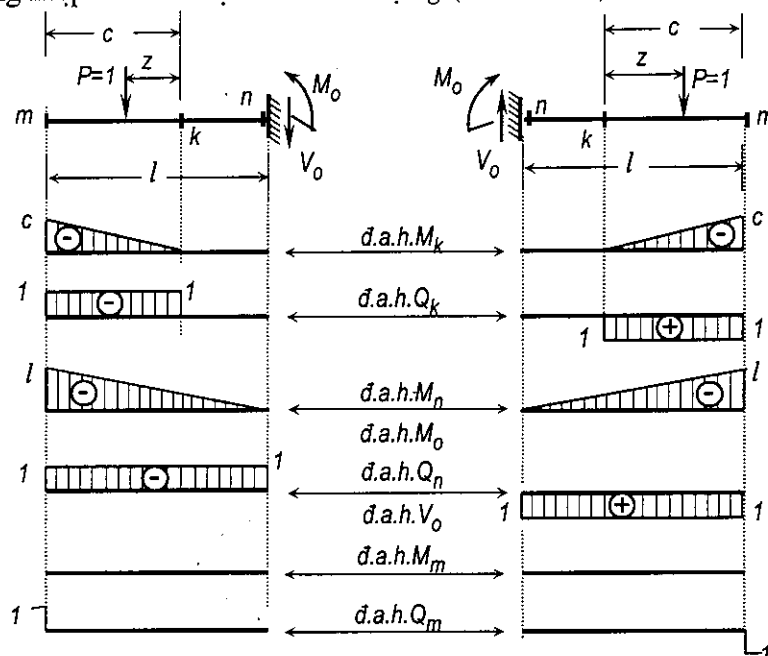
- 1) Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện thuộc đầu thừa trái hoặc phải có dạng hình tam giác trong khoảng từ mút thừa đến tiết diện. Những đường này luôn luôn mang dấu âm và có tung độ lớn nhất tại mút thừa với giá trị bằng khoảng cách từ mút thừa đến tiết diện.

- 2) Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện thuộc đầu thừa có dạng hình chữ nhật với tung độ bằng  $l$ . Nếu tiết diện ở đầu thừa trái thì đ.a.h. mang dấu âm còn nếu tiết diện ở đầu thừa phải thì đ.a.h. mang dấu dương.

### 3. Trường hợp đặc biệt, tiết diện ở trên gối tựa :

Tại tiết diện ở trên gối tựa có phản lực nên nội lực tại tiết diện bên trái gối và tiết diện bên phải gối nói chung sẽ khác nhau. Do đó, cần vẽ hai đường ảnh hưởng tương ứng với hai tiết diện ở hai bên gối tựa.

- ◆ Mômen uốn tại hai tiết diện ở hai bên gối tựa như nhau vì phản lực là lực tập trung nên không làm thay đổi giá trị mômen uốn. Do đó ta có thể vẽ đ.a.h.  $M_g$  tại tiết diện trên gối  $g$  theo mẫu đ.a.h.  $M_m$  của tiết diện  $m$  ở đầu thừa của dầm với giá trị  $c \rightarrow l_l$  hoặc theo mẫu đ.a.h.  $M_k$  của tiết diện  $k$  ở trong nhịp với giá trị  $a \rightarrow 0$ . Kết quả như trên hình 10.1l.
- ◆ Phản lực là lực tập trung ở gối làm thay đổi giá trị lực cắt tại hai tiết diện ở hai bên gối tựa. Do đó ta cần vẽ hai đ.a.h. lực cắt:
- Đ.a.h.  $Q_g^{tr}$  tại tiết diện ở bên trái gối  $g$  theo mẫu đ.a.h.  $Q_m$  của tiết diện ở đầu thừa với tiết diện  $m \rightarrow$  tiết diện  $g$  (hình 10.1m).
- Đ.a.h.  $Q_g^{ph}$  tại tiết diện ở bên phải gối  $g$  theo mẫu đ.a.h.  $Q_k$  của tiết diện trong nhịp với tiết diện  $k \rightarrow$  tiết diện  $g$  (hình 10.1n).





**Ví dụ 10.2.** [9] Vẽ các đường ảnh hưởng: phản lực, mômen uốn và lực cắt trong dầm côngxôn trên hình 10.2 khi lực  $P$  hướng từ trên xuống dưới di động vuông góc với trục dầm.

Đường ảnh hưởng nội lực trong dầm côngxôn được vẽ tương tự như đ.a.h. nội lực tại tiết diện ở đầu thừa đã xét trong ví dụ 10.1. Đường ảnh hưởng của thành phần phản lực mômen và thành phần phản lực đứng tại ngàm trong dầm công xôn có dạng đ.a.h. mômen uốn và lực cắt tại tiết diện ở ngàm. Trên hình 10.2 là kết quả vẽ các đ.a.h. của phản lực và nội lực tại các tiết diện  $k, n, m$  trong dầm công xôn trái và dầm côngxon phải.

## 10.2. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC ĐẠI LƯỢNG NGHIÊN CỨU TƯƠNG ƯNG VỚI CÁC DẠNG TẢI TRỌNG THEO ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

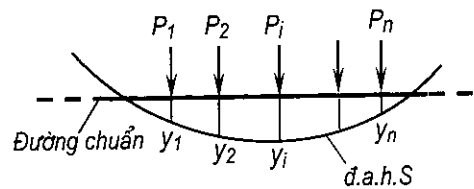
### 10.2.1. Trường hợp đường ảnh hưởng $S$ là đường cong bất kỳ

Để trình bày được tổng quát, ta giả thiết đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu  $S$  là đường cong bất kỳ được mô tả bởi phương trình  $y = f(z)$ .

Có bốn dạng tải trọng thường gặp: *lực tập trung, lực phân bố, mômen tập trung và mômen phân bố*. Dưới đây sẽ lần lượt nghiên cứu cách sử dụng đường ảnh hưởng để tính ảnh hưởng của các dạng tải trọng đó đối với đại lượng  $S$ .

#### 1. Lực tập trung

Giả sử trên công trình có  $n$  lực tập trung  $P_1, P_2, \dots, P_n$  cùng phương tác dụng tại những vị trí xác định (hình 10.3). Yêu cầu xác định ảnh hưởng của các tải trọng đó đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng đã vẽ được theo lực  $P=1$ , tác dụng cùng phương với các lực  $P_i$ .



Hình 10.3

Theo định nghĩa đ.a.h., nếu trên hệ chỉ có một lực  $P_i=1$  tác dụng thì ảnh hưởng của lực này đến đại lượng  $S$  bằng tung độ  $y_i$  của đ.a.h.  $S$  tại tiết diện đặt lực.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, nếu lực đó có giá trị  $P_i$  thì sẽ gây ảnh hưởng đến đại lượng  $S$  gấp  $P_i$  lần và được biểu thị bằng tích số  $P_i y_i$  cùng phương với các lực trên.

Lại vận dụng nguyên lý cộng tác dụng một lần nữa ta có thể biểu thị ảnh hưởng của tất cả các lực đối với đại lượng  $S$  theo đa thức sau:

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_i y_i + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i. \quad (10.1)$$

Như vậy, giá trị của đại lượng  $S$  do các lực tập trung gây ra bằng tổng đại số các tích số giữa giá trị của lực tập trung với tung độ đường ảnh hưởng tại các điểm đặt lực tương ứng.

- ◆ Các lực  $P_i$  hướng theo chiều  $P = 1$  dùng để vẽ đ.a.h. được xem là dương (thường hướng xuống dưới).
- ◆ Dấu của tung độ  $y_i$  lấy theo dấu của đường ảnh hưởng  $S$ .

## 2. Lực phân bố

Giả sử công trình chịu lực phân bố có phương không đổi với cường độ  $q(z)$  theo luật bất kỳ (hình 10.4), yêu cầu xác định ảnh hưởng của lực phân bố đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng đã vẽ được với lực  $P=1$  tác dụng cùng phương với  $q$ .

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng trên chiều dài  $dz$  (phần gạch chéo trên hình 10.4).

Có thể xem phân tố tải trọng này như lực tập trung với giá trị là  $q(z).dz$  và gây ra ảnh hưởng  $dS$  đối với đại lượng  $S$  theo (10.1):

$$dS = q(z).dz.y.$$

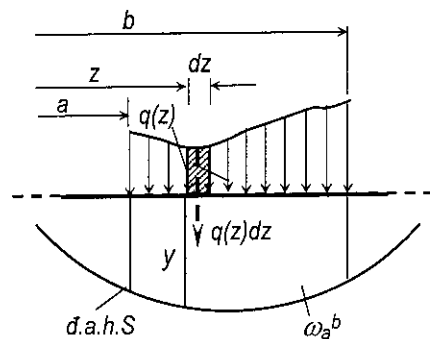
Ảnh hưởng tổng cộng của tất cả các phân tố tải trọng:

$$S = \int dS = \int_a^b q(z).y.dz. \quad (10.2)$$

Trường hợp tải trọng phân bố đều ( $q = const$ ), ta có:

$$S = q \int_a^b y.dz = q\omega_a^b. \quad (10.3)$$

$\omega_a^b$  – diện tích phần đ.a.h. tương ứng với đoạn tải trọng phân bố đều  $q$ .



Hình 10.4

Như vậy, giá trị của đại lượng  $S$  do lực phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ tải trọng  $q$  với diện tích của phần đường ảnh hưởng ứng dưới đoạn tải trọng.

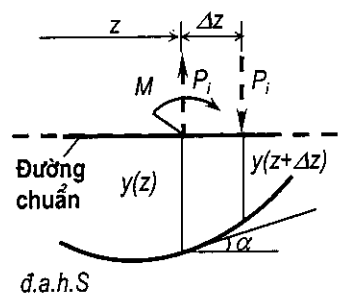
- ◆ Cường độ  $q$  được xem là đương nếu tải trọng phân bố hướng theo chiều lực  $P = 1$  dùng để vẽ đ.a.h.  $S$ .
- ◆ Dấu của diện tích lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

Trường hợp phần đường ảnh hưởng ở phía dưới tải trọng gồm nhiều đoạn có dấu khác nhau ta cần hiểu  $\omega_a^b$  là tổng đại số của các diện tích.

### 3. Mômen tập trung

Giả sử trên công trình có tác dụng mômen tập trung  $M$ , yêu cầu xác định ảnh hưởng của  $M$  đối với đại lượng  $S$  đã biết đường ảnh hưởng (hình 10.5).

Thay thế tác dụng của mômen tập trung  $M$  đặt tại hoành độ  $z$  bằng một ngẫu lực gồm hai lực tập trung  $P$  có cánh tay đòn bằng  $\Delta z$  với  $\Delta z$  tiến tới 0. Theo (10.1), ta xác định được đại lượng  $S$  do ảnh hưởng của hai lực này như sau:



Hình 10.5

$$S = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [P y(z + \Delta z) - P y(z)].$$

Nhưng  $P = M / \Delta z$ , nên: 
$$S = M \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} \right] = M \cdot y'(z),$$

hay

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.4)$$

Như vậy, ảnh hưởng của mômen tập trung đến đại lượng  $S$  bằng giá trị của mômen tập trung nhân với giá trị đạo hàm của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen hay nhân với tang của góc hợp giữa tiếp tuyến của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen với phương của đường chuẩn.

Trường hợp trên kết cấu có nhiều mômen tập trung  $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$  tác dụng, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$S = M_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + M_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + M_i \operatorname{tg} \alpha_i + \dots + M_n \operatorname{tg} \alpha_n,$$

hay

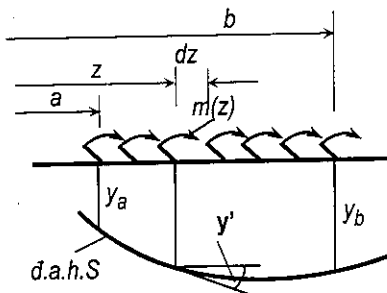
$$S = \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (10.5)$$

- ◆ Công thức trên được thiết lập với chiều mômen vẽ trên hình 10.5 nên khi sử dụng công thức này ta phải xem mômen  $M_i$  là dương nếu quay thuận chiều kim đồng hồ.
- ◆  $\text{tg}\alpha_i$  được xem là dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.

#### 4. Mômen phân bố

Giả sử công trình chịu mômen phân bố theo luật bất kỳ với cường độ  $m(z)$ , tác dụng trên đoạn có hoành độ từ  $a$  đến  $b$  (hình 10.6), yêu cầu xác định ảnh hưởng của lực phân bố đối với đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng  $S$  đã biết.

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tử tải trọng trên chiều dài  $dz$ .



Hình 10.6

Có thể xem phân tử tải trọng này như mômen tập trung với giá trị là  $m(z).dz$  và gây ra ảnh hưởng  $dS$  đối với đại lượng  $S$  theo (10.5):

$$dS = m(z).dz.\text{tg}\alpha = m(z).dz.y'$$

Ảnh hưởng tổng cộng của tất cả các phân tử tải trọng:

$$S = \int dS = \int_a^b m(z).y'.dz$$

Trường hợp mômen phân bố đều ( $m = \text{const}$ ), ta có:

$$S = m \int_a^b y'(z).dz = m.y(z)|_a^b = m(y_b - y_a). \quad (10.6)$$

trong đó  $y_b$  và  $y_a$  lần lượt là tung độ của đ.a.h.  $S$  tại đầu phải và đầu trái đoạn chịu mômen phân bố đều  $m$ .

Như vậy, giá trị của đại lượng  $S$  do mômen phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ mômen  $m$  với hiệu số ( $y_b - y_a$ ) của hai tung độ đ.a.h.  $S$  tại đầu phải và đầu trái đoạn chịu mômen phân bố đều  $m$ .

- ◆ Công thức trên được thiết lập với chiều mômen vẽ trên hình 10.6 nên khi sử dụng công thức này ta phải xem cường độ mômen  $m$  là dương nếu quay thuận chiều kim đồng hồ.
- ◆ Dấu của các tung độ lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

**Ví dụ 10.3.** [9] Sử dụng đường ảnh hưởng để xác định mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $k$  (hình 10.7) do các tải trọng có vị trí cố định gây ra.

Các  $d.a.h.Q_k$  và  $d.a.h.M_k$  vẽ trên hình 10.7b và c. Tại tiết diện  $k$  có mômen và lực tập trung nên cần xác định hai giá trị của mômen uốn và lực cắt ứng với hai tiết diện ở bên trái và bên phải điểm đặt mômen và lực tập trung.

- ♦ Nội lực tại tiết diện bên trái điểm đặt mômen và lực tập trung: lúc này lực tập trung và mômen tập trung ở bên phải  $k$  (bên phải bước nhảy của  $d.a.h.Q_k$  và điểm gãy của  $d.a.h.M_k$ ).

$$Q_k^{tr} = -1 \cdot (1/2) \cdot 2 \cdot (1/3) + 3 \cdot (2/3) - 2 \cdot (-1/6) + 1 \cdot (0 - 1/3) = 5/3 \text{ kN};$$

$$M_k^{tr} = 1 \cdot (1/2) \cdot 2 \cdot (4/3) + 3 \cdot (4/3) + (-2) \cdot (-4/12) + 1 \cdot (0 - 2/3) = 16/3 \text{ kNm}.$$

- ♦ Nội lực tại tiết diện bên phải điểm đặt mômen và lực tập trung: lúc này lực tập trung và mômen tập trung tác dụng ở bên trái  $k$  (bên trái bước nhảy của  $d.a.h.Q_k$  và điểm gãy của  $d.a.h.M_k$ ).

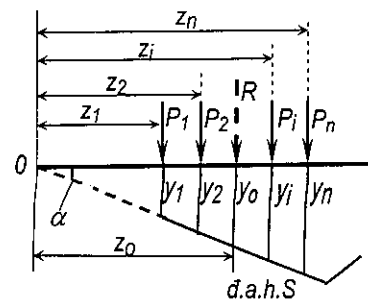
$$Q_k^{ph} = -1 \cdot (1/2) \cdot 2 \cdot (1/3) + 3 \cdot (-1/3) - 2 \cdot (-1/6) + 1 \cdot (0 - 1/3) = -4/3 \text{ kN};$$

$$M_k^{ph} = 1 \cdot (1/2) \cdot 2 \cdot (4/3) + 3 \cdot (4/3) + (-2) \cdot (4/6) + 1 \cdot (0 - 2/3) = 10/3 \text{ kNm}.$$

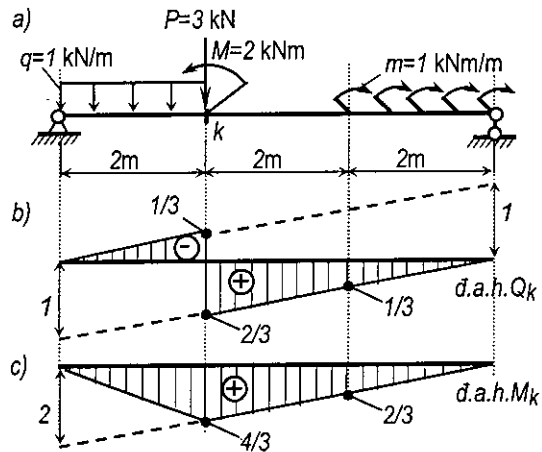
Bạn đọc có thể vẽ các biểu đồ lực cắt và mômen uốn để đối chiếu với những kết quả vừa tìm được.

### 10.2.2. Trường hợp đường ảnh hưởng S có dạng đường thẳng

Trong trường hợp đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng hoặc gồm nhiều đoạn thẳng, ta có thể chứng minh được tính chất sau:



Hình 10.8



Hình 10.7

Khi xác định đại lượng nghiên cứu  $S$  do tải trọng bất kỳ có vị trí xác định gây ra, ta có thể thay thế các tải trọng tác dụng trên từng phần thẳng của đường ảnh hưởng bằng hợp lực của chúng.

Ta sẽ chứng minh tính chất này trong trường hợp tải trọng tập trung (hình 10.8). Giả thiết trên phần thẳng của đường ảnh hưởng có các lực tập trung  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tác dụng. Kéo dài phần đường thẳng tới khi cắt đường chuẩn tại điểm  $O$  và xem  $O$  là gốc tọa độ.

Theo (10.1) ta có:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_i y_i + \dots + P_n y_n.$$

Vì phần đường ảnh hưởng là đường thẳng liên tục nên từ hình 10.8 ta có:

$$y_i = z_i \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{với} \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$$

nên 
$$S = \operatorname{tg} \alpha (P_1 z_1 + P_2 z_2 + \dots + P_i z_i + \dots + P_n z_n),$$

hay

$$S = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n P_i z_i. \quad (10.7)$$

Ta thấy  $P_i z_i$  là mômen của lực  $P_i$  đối với điểm  $O$ .

Theo định lý Varignon (xem [1]): tổng mômen của các lực  $P_i$  đối với điểm  $O$  bằng mômen của hợp lực các lực  $P_i$  đối với điểm đó, nên:

$$\sum_{i=1}^n P_i z_i = R z_o,$$

trong đó:

$R$  – hợp lực của các lực  $P_i$ ;

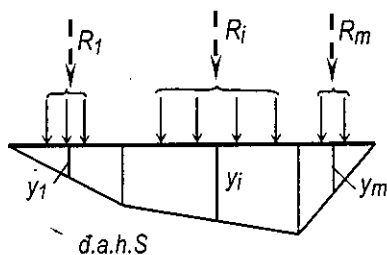
$z_o$  – hoành độ của hợp lực  $R$  kể từ  $O$ .

Do đó, ta có thể viết (10.7) dưới dạng:

$$S = R z_o \operatorname{tg} \alpha.$$

Nhưng  $z_o \operatorname{tg} \alpha = y_o$  nên:  $S = R y_o$ .

Đó là điều cần chứng minh.



Hình 10.9

Trong trường hợp đ.a.h. gồm nhiều đoạn thẳng, muốn áp dụng tính chất trên để tính đại lượng  $S$  ta cần lấy hợp lực từng nhóm tải trọng tác dụng trong từng đoạn thẳng một, rồi cộng các kết quả (xem hình 10.9):

$$S = \sum_{i=1}^m R_i y_i \quad (10.8)$$



Như vậy, nguyên tắc chung khi tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng đối với đại lượng  $S$  là: phát hiện tất cả các vị trí của đoàn tải trọng cho  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) tức là cho cực trị cục bộ, so sánh các  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) với nhau để tìm ra  $\max S_{max}$  (hay  $\min S_{min}$ ), vị trí có  $\max S_{max}$  (hay  $\min S_{min}$ ) là vị trí bất lợi cần tìm.

Để phát hiện cực trị, ta cần vận dụng các biểu hiện của cực trị đã biết trong toán học. Trong thực hành, tải trọng và đường ảnh hưởng có nhiều dạng khác nhau nên khó có thể đưa ra những quy tắc chung để xác định vị trí bất lợi một cách cụ thể. Dưới đây ta sẽ thiết lập một vài quy tắc cụ thể cho một số dạng tải trọng và một số dạng đ.a.h. thường gặp.

### 10.3.1. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một dấu

Khi phương trình đường ảnh hưởng  $S$  liên tục và đạo hàm của nó cũng liên tục thì đ.a.h.  $S$  cong trơn tru. Khi đó, hàm  $S = f(z)$  biểu thị sự biến thiên của đại lượng  $S$  theo vị trí của tải trọng di động sẽ liên tục, đạo hàm  $S' = f'(z)$  cũng liên tục. Bài toán tìm vị trí bất lợi của tải trọng sẽ đưa về bài toán tìm cực trị của hàm  $S = f(z)$ . Đối với những bài toán thường gặp ta cần thực hiện các bước sau:

- 1) Thiết lập biểu thức giải tích của  $S$  theo tọa độ chạy  $z$  là hoành độ của một tải trọng nào đó di động trên đường ảnh hưởng.
- 2) Lấy đạo hàm cấp một và xác định các hoành độ  $z_0$  tương ứng với khi đạo hàm này bằng không.
- 3) Tìm đạo hàm cấp hai của  $S$  và dựa vào dấu của  $S''$  khi  $z = z_0$  để phán đoán về cực đại hay cực tiểu.
- 4) Tính các  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) tương ứng với các  $z_0$ . So sánh các  $S_{max}$  (hay  $S_{min}$ ) để tìm ra  $\max S_{max}$  (hay  $\min S_{min}$ ), vị trí tương ứng của tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

**Chú thích:** Do ý nghĩa thực tế của bài toán, ta cần chọn hoành độ  $z_0$  nằm trong phạm vi đ.a.h. Ngoài ra, cần kiểm tra lại xem khi  $z = z_0$  thì tất cả các tải trọng dùng để thiết lập biểu thức  $S$  có còn nằm trong phạm vi đ.a.h. nữa hay không. Nếu có tải trọng nào đã chạy ra ngoài đ.a.h. thì biểu thức  $S$  tìm được ở bước thứ nhất không phù hợp nữa. Trong trường hợp này ta cần lập lại biểu thức  $S$  tương ứng với tình huống có tải trọng chạy ra ngoài đ.a.h. và so sánh các tung độ trong tất cả các tình huống có thể xảy ra để tìm ra tung độ lớn nhất.

**Ví dụ 10.4.** [6] Xác định vị trí để tính và giá trị để tính cho đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng cong trơn tru chịu tải trọng như trên hình 10.11.



Phương trình đ.a.h.  $y = z - \frac{z^3}{36}$ .

Biểu thức của  $S$ :  $S = f(z) = 10 \left[ z - \frac{z^3}{36} \right] + 20 \left[ (z-2) - \frac{(z-2)^3}{36} \right]$ .

Lấy đạo hàm theo  $z$  và cho bằng không:  $\frac{dS}{dz} = \frac{1}{6} [-15z_o^2 + 40z_o + 140] = 0$   
ta được  $z_o = 14/3$  m (các tải trọng nằm trong phạm vi đường ảnh hưởng).

Đạo hàm cấp hai  $\frac{d^2S}{dz^2} = -5z + \frac{20}{3}$ .

Khi  $z_o = \frac{14}{3}$  m thì  $\frac{d^2S}{dz^2} = -\frac{50}{3}$ .

Dấu trừ biểu thị  $z_o$  cho vị trí cực đại.

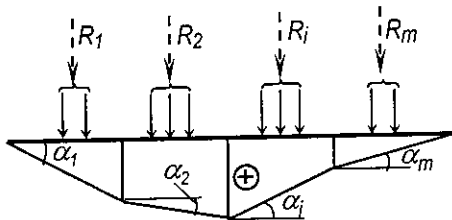
Thay  $z = z_o = 14/3$  m vào biểu thức giải tích của  $S$ , ta được:

$$S_{\text{tính}} = 10[14/3 - (1/36)(14/3)^3] + 20[(14/3-2) - (14/3-2)^3/36] = 4960 / 81.$$

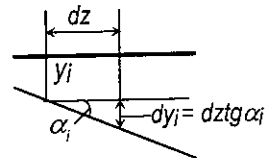
Đơn vị của kết quả bằng đơn vị của lực nhân với đơn vị của tung độ đường ảnh hưởng.

### 10.3.2. Đường ảnh hưởng đa giác có một dấu

Bài toán tìm cực trị có liên quan đến việc khảo sát dấu đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai (hay số gia của đạo hàm cấp một) của hàm  $S$ . Do đó, trước tiên ta cần lập biểu thức của đạo hàm cấp một của hàm  $S$  cho trường hợp đ.a.h. bao gồm các đoạn thẳng.



Hình 10.12



Hình 10.13

Giả sử có đ.a.h. đa giác mang dấu dương như trên hình 10.12. Các cạnh của đa giác nghiêng với phương đường chuẩn theo những góc  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ .

Dưới tác dụng của các tải trọng  $P$ , ta có thể xác định đại lượng  $S$  theo công thức (10.8):

$$S = \sum_{i=1}^m R_i y_i.$$

Nếu giả thiết cho toàn bộ hệ lực dịch chuyển sang bên phải (hoặc bên trái) một đoạn bằng  $dz$  thì các tung độ  $y_i$  sẽ biến thiên một lượng bằng  $dz \operatorname{tg} \alpha_i$  (hình 10.13), do đó đại lượng  $S$  cũng biến thiên một lượng bằng:

$$dS = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i dz.$$

Suy ra

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (10.10)$$

Trong trường hợp đ.a.h. đa giác có một dầm, giải pháp tiện lợi và có hiệu quả nhất là dùng phương pháp thử dần để tìm vị trí bất lợi của tải trọng.

Để giảm nhẹ khối lượng tính toán thử dần, người ta đã chứng minh được tính chất sau đây của đ.a.h. có dạng đa giác (xem [6]):

*Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dầm có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng đó đặt tại một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng. Gọi  $P^*$  là lực đặt tại đỉnh lồi.*

Đó chỉ là điều kiện cần, chưa phải là điều kiện đủ.

Dựa vào tính chất trên, ta có thể tìm vị trí bất lợi và  $S_{\text{tính}}$  bằng phương pháp thử dần như sau:

1- Phát hiện tất cả các vị trí cho  $S_{\text{max}}$  nếu đ.a.h. là dương hoặc  $S_{\text{min}}$  nếu đ.a.h. là âm. Tính các  $S_{\text{max}}$  hoặc  $S_{\text{min}}$ . Muốn vậy, lần lượt đặt từng tải trọng vào từng đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Mỗi lần đặt như vậy ta phải thực hiện các bước sau:

- ◆ Cho đoàn tải trọng dịch sang trái một đoạn  $dz$ . Tính  $dS/dz$  theo (10.10).
- ◆ Cho đoàn tải trọng dịch sang phải một đoạn  $dz$ . Tính  $dS/dz$  theo (10.10).
- ◆ So sánh các giá trị  $dS/dz$  trong hai lần tính.
  - Nếu có sự đổi dấu (đạo hàm cấp một bằng không) thì vị trí này cho ta một  $S_{\text{max}}$  hoặc  $S_{\text{min}}$ . Tính  $S_{\text{max}}$  hoặc  $S_{\text{min}}$ .
  - Nếu không có sự đổi dấu thì cần dịch chuyển đoàn tải trọng tới vị trí khác để sao cho có một tải trọng nào đó đặt ở đỉnh lồi của đ.a.h. Dựa theo chiều

hướng biến thiên của  $dS/dz$  ta thấy: muốn đạt được cực đại, nên dịch chuyển sang bên phải nếu  $dS/dz$  trong cả hai lần tính là dương, còn sang bên trái nếu  $dS/dz$  trong cả hai lần tính là âm. Muốn đạt cực tiểu thì làm ngược lại.

Về nguyên tắc, nếu có  $p$  lực và  $q$  đỉnh lồi thì cần thực hiện các bước tính nêu trên  $p.q$  lần, tuy nhiên ta cần nhận xét trị số của các tải trọng và hình dạng của đ.a.h. để loại trừ bớt những trường hợp vô ích. *Thường nên bố trí các tải trọng lớn trên phần đ.a.h. có tung độ lớn và càng nhiều tải trọng nằm trong phạm vi đ.a.h. càng tốt.*

2- So sánh các  $S_{max}$  (hoặc các  $S_{min}$ ) với nhau để tìm giá trị  $\max S_{max}$  (hoặc  $\min S_{min}$ ). Đó là giá trị  $S_{tính}$  cần tìm.

**Chú thích:**

- ◆ Trường hợp ngoài tải trọng tập trung còn có tải trọng phân bố thì vẫn có thể tìm vị trí bất lợi theo quy tắc trên nếu thay tải trọng phân bố bằng nhiều tải trọng tập trung.
- ◆ Khi đ.a.h. có hai dấu, nếu tải trọng di động gồm những lực độc lập với nhau và khoảng cách cực tiểu giữa chúng đã biết thì ta có thể cắt rời thành từng nhóm để bố trí riêng biệt trên từng phần đ.a.h. dương hoặc âm. Khi bố trí trên phần đ.a.h. dương ta sẽ được  $\max S_{max}$  còn khi bố trí trên phần đ.a.h. âm ta được  $\min S_{min}$ . Trường hợp tải trọng không thể cắt rời ra được, khi bố trí nếu có phần tải trọng nào nằm trên đ.a.h. có dấu khác với dấu đang xét thì ta phải kể đến chúng. Tất nhiên khi đó những tải trọng này sẽ làm cho giá trị của đại lượng nghiên cứu giảm xuống.

**Ví dụ 10.5.** [9] Tìm giá trị để tính của đại lượng  $S$  có đường ảnh hưởng như trên hình 10.14b. Sơ đồ tải trọng di động cho trên hình 10.14a.

Trước tiên ta tính *tang* các góc nghiêng của các đoạn đ.a.h.:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 3/4; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = (4-3)/4 = 1/4; \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = -4/8 = -1/2;$$

- ◆ *Tính thử lần thứ nhất:* Chọn tải trọng  $P_1$  thứ hai làm lực  $P^*$  đặt tại đỉnh có tung độ bằng 10. Tải trọng này được đánh dấu \* như trên hình 10.14c.

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính:

$$dS/dz = (100+100)3/4 + 100(1/4) + 10.60(-1/2) = 175 - 90 > 0.$$

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính:

$$dS/dz = 100(3/4) + (100+100)1/4 + 10.60(-1/2) = 125 - 90 > 0.$$

Ta thấy điều kiện cực trị không thỏa mãn, vị trí này không cho cực đại. Vì trong cả hai lần dịch chuyển  $dS/dz$  đều dương nên ta chuyển dời đoàn tải trọng về phía bên phải.

♦ *Tính thử lần thứ hai:* Khi chuyển đoàn tải trọng về bên phải, lực đầu tiên gặp đỉnh đ.a.h. là lực  $P_1$  thứ ba, do đó ta chọn lực này là lực  $P^*$  và đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 (hình 10.14d).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính:

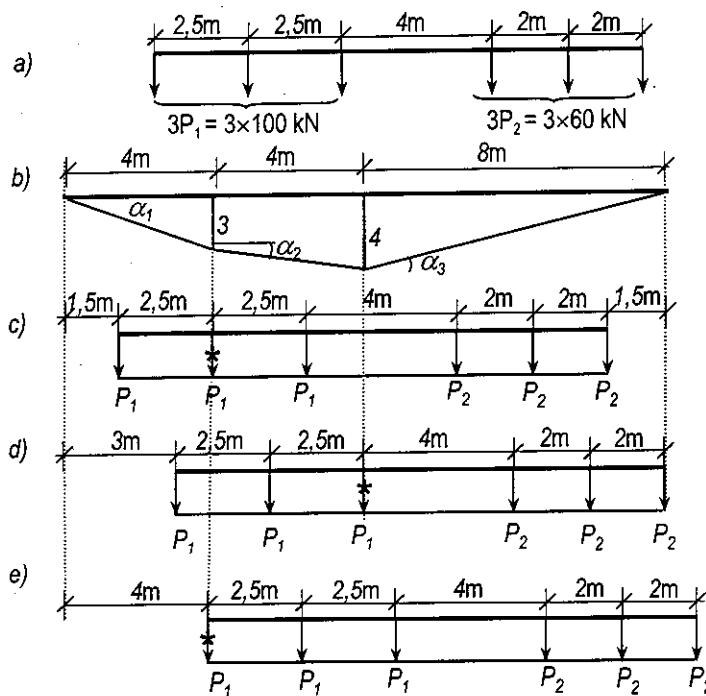
$$dS/dz = 100.3/4 + (100+100).1/4 + 10.60(-1/2) = 125 - 90 > 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính:

$$dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100 - 110 < 0.$$

Điều kiện cực trị thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính  $S_{max}$ :

$$S_{max} = \sum_{i=1}^n P_i y_i = 100.3(3/4) + 100[3 + 1.5.(1/4)] + 100.4 + 60.4.(1/2) + 60.2.(1/2) = 1142,5.$$



Hình 10.14

Chưa kết luận được giá trị 1142,5 là giá trị để tính sau hai lần thử. Có thể tồn tại  $S_{max}$  khác lớn hơn. Do đó cần tiếp tục phát hiện thêm các vị trí khác.

◆ *Tính thử lần thứ ba:* Chọn tải trọng  $P_I$  thứ nhất làm lực  $P^*$  và đặt tại đỉnh có tung độ bằng 3 (hình 10.14e).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn  $dz$ , tính:

$$dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100-110 < 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn  $dz$ , tính:

$$dS/dz = (100+100).1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 50-110 < 0.$$

Ta thấy vị trí này không cho  $S_{max}$ .

Về nguyên tắc, trong trường hợp này có 6 lực và 2 đỉnh lồi nên phải thử 12 lần. Nhưng có thể dựa vào những nhận xét sau để loại trừ bớt những lần thử không cần thiết:

■ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải vị trí trên hình 10.14d thì sẽ có một số tải trọng vượt ra khỏi phạm vi đường ảnh hưởng. Hơn nữa sau lần thử thứ ba ta thấy trong cả hai lần dịch chuyển  $dS/dz$  đều âm, điều đó có nghĩa là nếu dịch chuyển sang bên phải một chút thì cũng không có cực trị mà cần dịch chuyển về bên trái.

■ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái vị trí trên hình 10.14c thì sẽ có một tải trọng  $P_I$  vượt ra ngoài đ.a.h., các tải trọng lớn không đặt vào phạm vi đường ảnh hưởng có tung độ lớn, do đó ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Bởi vậy sau ba lần thử ta có thể kết luận được là giá trị  $max S_{max} = 1142,5$  và vị trí bất lợi như trên hình 10.14d.

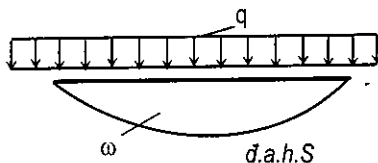
### 10.3.3. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ

1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài đường ảnh hưởng (hình 10.15)

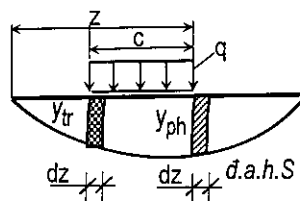
Trong trường hợp này, cần chất tải trọng trên toàn bộ đường ảnh hưởng và tìm  $S_{tính}$  theo công thức:

$$S_{tính} = q \cdot \omega, \tag{10.11}$$

trong đó  $\omega$  – diện tích của toàn bộ đ.a.h.



Hình 10.15



Hình 10.16

## 2. Chiều dài tải trọng nhỏ hơn chiều dài đường ảnh hưởng (hình 10.16)

Ta sẽ chứng minh: Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng phân bố đều sẽ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.

Thật vậy, đại lượng  $S$  tương ứng với một vị trí bất kỳ của tải trọng bằng

$$S = q \cdot \omega_{z-c}^z,$$

trong đó:  $\omega_{z-c}^z$  – diện tích của phần *d.a.h.*  $S$  ứng dưới đoàn tải trọng.

Hàm này liên tục và đạo hàm cấp một của nó cũng liên tục, ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dS}{dz} = q \frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Vị trí bất lợi sẽ xảy ra khi  $d\omega / dz = 0$ .

Khi tải trọng di chuyển với giá trị  $dz$ , diện tích sẽ tăng thêm một lượng bằng  $y_{ph}dz$  (phần gạch chéo một lần trên hình 10.16) và giảm đi một lượng bằng  $y_{tr}dz$  (phần gạch chéo hai lần trên hình 10.16).

Do đó: 
$$d\omega = y_{ph}dz - y_{tr}dz.$$

Suy ra 
$$d\omega / dz = y_{ph} - y_{tr} = 0.$$

Vậy điều kiện cực trị sẽ xảy ra khi  $y_{ph} = y_{tr}$ . Đó là điều cần chứng minh.

## 10.4. KHÁI NIỆM VỀ BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Các công trình trong thực tế thường chịu tác dụng đồng thời của tải trọng bất động và tải trọng di động. Do đó, khi tính toán những công trình này ta cần phải xác định được giá trị bất lợi nhất của nội lực cho từng tiết diện đối với tải trọng di động đã cho kết hợp với nội lực do tải trọng bất động gây ra. Để thực hiện yêu cầu đó ta vận dụng khái niệm về biểu đồ bao nội lực.

*Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất có thể xảy ra tại tiết diện tương ứng do tải trọng bất động và tải trọng di động gây ra.*

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực thông qua một ví dụ cụ thể là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm đơn giản có một đầu thừa (hình 10.17a) chịu tải trọng di động có dạng hai lực tập trung và tải trọng bất động phân bố đều. Tất nhiên, cách vẽ cũng có thể áp dụng cho mọi trường hợp khác.

1) Vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại một số tiết diện chỉ định trên dầm. Trong trường hợp hệ trên hình 10.17a, các tiết diện đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5 và 10. Tất nhiên, càng thực hiện với nhiều tiết diện thì biểu đồ bao tìm được càng sát với kết quả chính xác nhưng khối lượng tính toán sẽ tăng lên theo. Trên hình 10.17c, d, e, f, g là các đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện 1, 2, 3, 4, 5.

2) Xác định nội lực do tải trọng bất động gây ra bằng cách vẽ biểu đồ nội lực hoặc bằng cách sử dụng các đường ảnh hưởng như đã trình bày trong mục 10.2. Kết quả tính ghi trên hình 10.17b và trên cột 2 của bảng 10.1.

**Bảng 10.1**

Tiết diện	M* (kNm)	M <sub>max</sub> (kNm)	M <sub>min</sub> (kNm)	M <sup>b</sup> <sub>max</sub> (kNm)	M <sup>b</sup> <sub>min</sub> (kNm)
1	230	$70 \cdot 2,25 + 30 \cdot 1,25 = 195$	$70(-1) + 30 \cdot 0 = -70$	$230 + 195 = 425$	$230 - 70 = 160$
2	280	$70 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 240$	$70(-2) = -140$	$280 + 240 = 520$	$280 - 140 = 140$
3	150	$70 \cdot 2,25 + 30 \cdot 1,25 = 195$	$70(-3) = -210$	$150 + 195 = 345$	$150 - 210 = -60$
4	-160	0	$70(-4) = -280$	$-160 + 0 = -160$	$-160 - 280 = -440$
5	-40	0	$70(-2) = -140$	$-40 + 0 = -40$	$-40 - 140 = -180$

3) Xác định các giá trị để tính max hoặc min của nội lực cho từng tiết diện.

Tương ứng với mỗi tiết diện ta vận dụng phương pháp đã trình bày trong mục 10.3 để tìm vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động, tiếp đó suy ra giá trị để tính.

Ví dụ với tiết diện 1 (hình 10.17c):

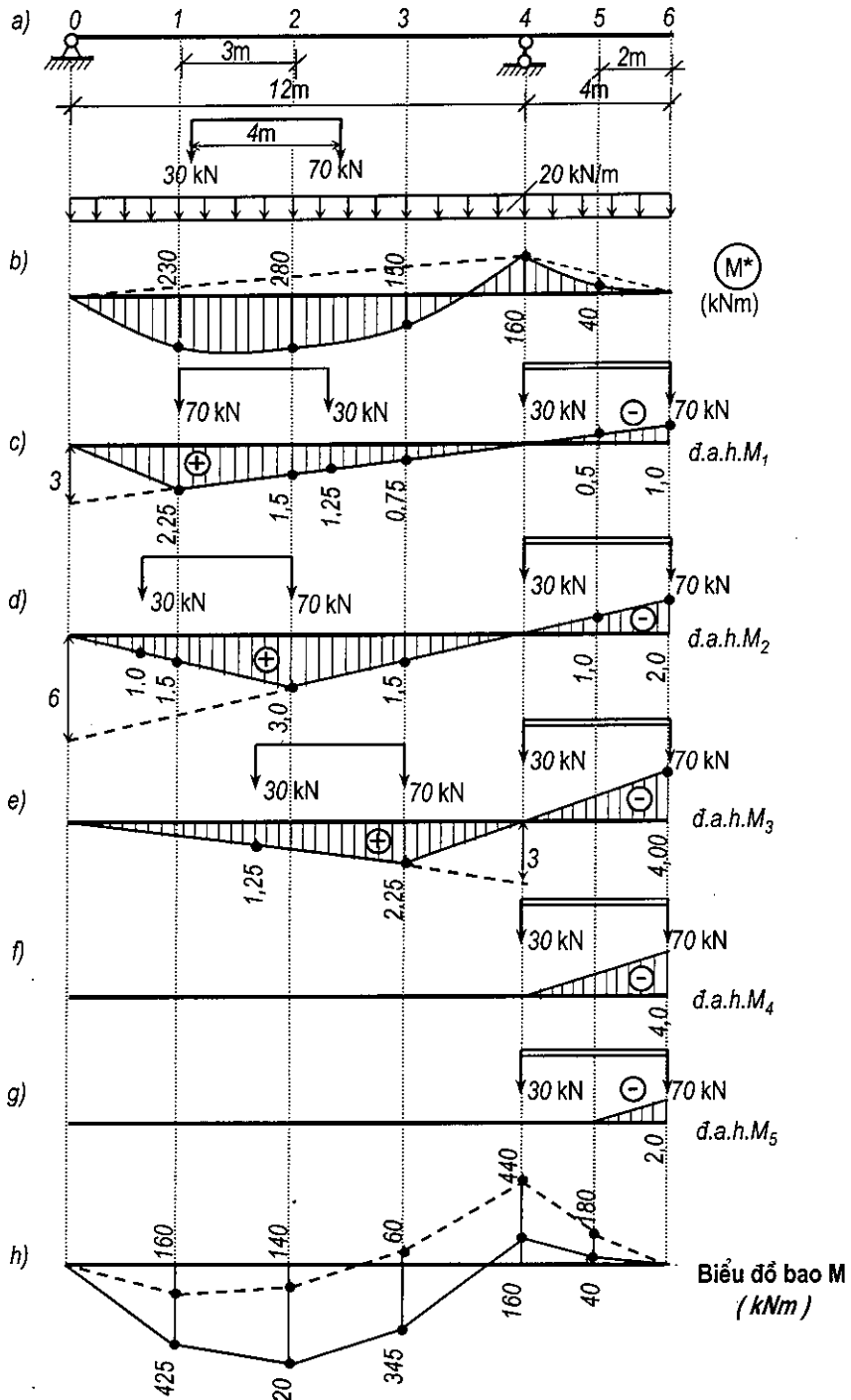
- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên *d.a.h.*  $M_1$  tương ứng với dấu dương là vị trí của lực có một nét nối ngang. Giá trị để tính tương ứng:

$$M_{1,max} = 70 \cdot 2,25 + 30 \cdot 1,25 = 195 \text{ kNm.}$$

- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên *d.a.h.*  $M_1$  tương ứng với dấu âm là vị trí của lực có hai nét nối ngang. Giá trị để tính tương ứng:

$$M_{1,min} = 70 \cdot (-1) + 30 \cdot 0 = -70 \text{ kNm.}$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ tính được các giá trị  $M_{k,max}$  và  $M_{k,min}$  do tải trọng di động gây ra. Kết quả tính ghi trên các cột 3 và 4 của bảng 10.1.



Hình 10.17



4) Vẽ biểu đồ bao nội lực do tải trọng di động và bất động đồng thời gây ra. Sau khi đã tính được các giá trị max và min của nội lực do tải trọng di động gây ra, đem cộng đại số những giá trị này với các giá trị nội lực tại từng tiết diện tương ứng lấy trên biểu đồ do tải trọng bất động gây ra ta sẽ tính được các tung độ của biểu đồ bao nội lực:

$$M_{k,max}^b = M_{k,max} + M_k^* \quad (10.12)$$

$$M_{k,min}^b = M_{k,min} + M_k^* \quad (10.13)$$

Ví dụ, tại tiết diện  $l$  ta có:  $M_{l,max}^b = 195 + 230 = 425 \text{ kNm}$ .

$$M_{l,min}^b = -70 + 230 = 160 \text{ kNm}.$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ tìm được các tung độ của biểu đồ bao. Kết quả tính ghi trên các cột 5 và 6 của bảng 10.1.

Sau khi dựng các tung độ tìm được và nối lại với nhau bằng các đoạn thẳng, ta sẽ được biểu đồ bao mômen uốn max (đường liền nét) và biểu đồ bao mômen uốn min (đường đứt nét) như trên hình 10.17h.

Cần chú ý là với cách làm như vậy ta chỉ được các giá trị đúng của biểu đồ bao tại các tiết diện đã chỉ định. Trên thực tế biểu đồ bao có dạng đường cong chứ không phải là đường đa giác như đã tìm được.

## 10.5. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC TRONG HỆ SIÊU TĨNH

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh thông qua trường hợp dầm liên tục.

Để giải chính xác bài toán này ta cần vẽ đường ảnh hưởng của nội lực tại nhiều tiết diện khác nhau, tìm vị trí bất lợi của các tải trọng tạm thời và tiếp đó thực hiện theo các quy cách đã trình bày trong mục 10.4. Tuy nhiên, cần thấy là đối với các hệ siêu tĩnh, cách làm này thường đòi hỏi tốn nhiều công sức.

Để bài toán được đơn giản trong thực hành thường cho phép áp dụng giả thiết: xem tải trọng tạm thời tác dụng trên từng nhịp dầm có vị trí cố định, có thể vắng mặt hoặc có mặt đồng thời trên một số nhịp để sao cho gây ảnh hưởng bất lợi nhất đối với nội lực tại tiết diện đang xét.

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách giải thông qua trường hợp dầm liên tục bốn nhịp cho trên hình 10.18a.

Giả sử dầm chịu tải trọng lâu dài như trên hình 10.18a và chịu tải trọng tạm thời như trên hình 10.18b.

Trên hình 10.18c là biểu đồ mômen uốn do tải trọng lâu dài gây ra còn trên các hình 10.18d, e, f, g là biểu đồ mômen uốn do tải trọng tạm thời lần lượt đặt trong từng nhịp gây ra.

Để tìm giá trị  $M_{k,max}$  cho tiết diện  $k$  bất kỳ của dầm liên tục ta cộng đại số giá trị mômen  $M_k^*$  tương ứng tại tiết diện đó do tải trọng lâu dài gây ra (tìm theo biểu đồ 10.18c) với những giá trị mômen dương  $M_k^+$  do tải trọng tạm thời trên từng nhịp dầm gây ra. Các tải trọng gây ra mômen âm tại tiết diện không gây ảnh hưởng bất lợi khi tìm  $M_{k,max}$  nên coi như không có mặt. Như vậy ta có:

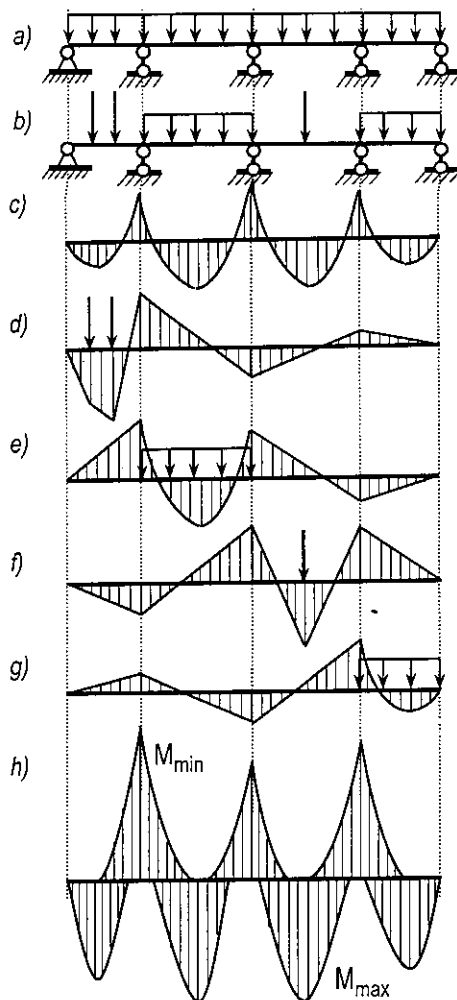
$$M_{k,max} = M_k^* + \sum M_k^+$$

Tương tự, để tìm giá trị  $M_{k,min}$  cho tiết diện  $k$  bất kỳ ta cộng đại số giá trị của mômen  $M_k^*$  do tải trọng lâu dài gây ra với các giá trị mômen âm  $M_k^-$  do tải trọng tạm thời trên từng nhịp gây ra:

$$M_{k,min} = M_k^* + \sum M_k^-$$

Như vậy, với mỗi tiết diện  $k$  của dầm liên tục ta có một giá trị  $M_{k,max}$  và một giá trị  $M_{k,min}$ . Dựa vào những giá trị này ta vẽ được hai đường cong gọi là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm (hình 10.18h).

Để vẽ biểu đồ bao lực cắt của dầm ta cũng thực hiện các bước tính tương tự.

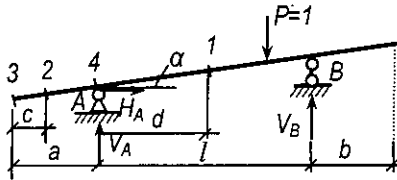


Hình 10.18

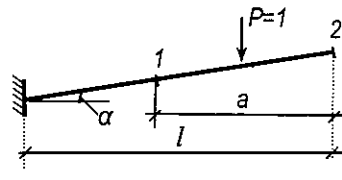
## BÀI TẬP CHƯƠNG X

**X.1.** [9] Vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực gối tựa và của các thành phần nội lực tại các tiết diện 1, 2, 3, 4 khi lực  $P = 1$  di động trên dầm (hình X.1) theo phương thẳng đứng, hướng từ trên xuống dưới.

**X.2.** [9] Vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần nội lực tại các tiết diện 1 và 2 trên dầm công xôn (hình X.2) khi lực  $P = 1$  di động theo phương thẳng đứng, hướng từ trên xuống dưới.



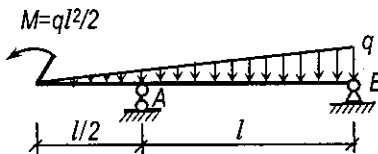
**Hình X.1**



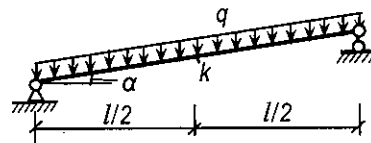
**Hình X.2**

**X.3.** [9] Vận dụng đường ảnh hưởng, xác định phản lực tại các gối A và B.

**X.4.** [9] Vẽ đ.a.h. mômen uốn, lực cắt, lực dọc tại tiết diện  $k$  khi lực  $P = 1$  di động theo phương thẳng đứng, hướng từ trên xuống dưới. Vận dụng các đ.a.h. đã vẽ, xác định các thành phần nội lực tại tiết diện  $k$  do tải trọng phân bố đều theo chiều dài hệ (hình X.4) với cường độ  $q$  gây ra. Kiểm tra lại các kết quả bằng cách tính trực tiếp.

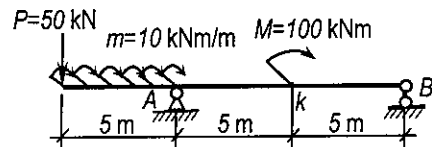


**Hình X.3**



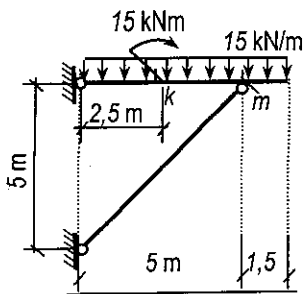
**Hình X.4**

**X.5.** [9] Vận dụng đường ảnh hưởng, xác định trị số mômen uốn, lực cắt tại tiết diện  $k$  và trị số lực cắt tại tiết diện trên gối A (hình X.5).

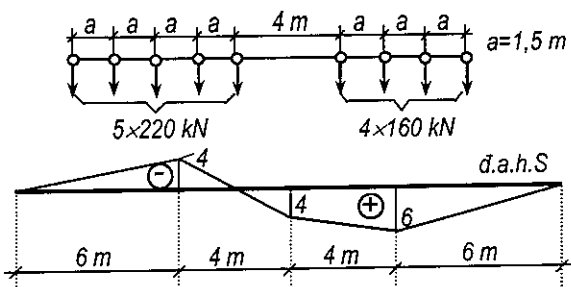


**Hình X.5**

**X.6.** [9] Vận dụng đường ảnh hưởng, xác định các thành phần nội lực tại tiết diện  $k$  và tiết diện  $m$  (hình X.6).



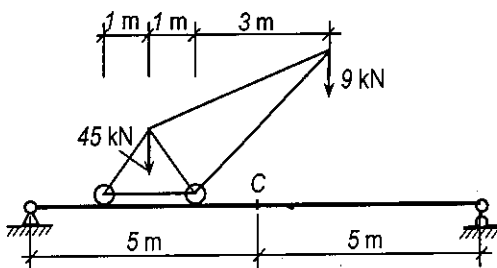
Hình X.6



Hình X.7

X.7. [9] Tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng trên đ.a.h.S cho trên hình X.7. Xác định giá trị lớn nhất về trị số tuyệt đối của đại lượng  $S$ .

X.8. [9] Xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của mômen uốn và lực cắt tại C khi cần trục di động trên dầm (hình X.8).



Hình X.8

# 11

## KHÁI NIỆM VỀ ỔN ĐỊNH

### 11.1. KHÁI NIỆM VỀ ỔN ĐỊNH VÀ MẤT ỔN ĐỊNH

#### 11.1.1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định

Khi thiết kế kết cấu công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình. Trong nhiều trường hợp, đặc biệt là các kết cấu chịu nén hoặc nén cùng với uốn, tải trọng chưa đạt đến giá trị phá hoại và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn hình dạng ban đầu, chuyển sang dạng cân bằng khác. Nội lực trong dạng cân bằng mới phát triển rất nhanh và làm cho công trình bị phá hoại. Đó là hiện tượng kết cấu bị mất ổn định.

Theo [10], từ cuối thế kỷ XIX đến đầu thế kỷ XX, đã xảy ra nhiều tai nạn do kết cấu công trình bị mất ổn định và dẫn đến phá hủy. Riêng ở Pháp, theo kỹ sư Girard, trong khoảng thời gian 1955-1965 đã có 24 cầu bị phá hủy, phần lớn là do nguyên nhân mất ổn định. Theo V.V.Bôlôtin, ở Liên Xô cũ, trong khoảng thời gian 1951-1967 đã có 39 công trình kết cấu thép bị phá hủy, trong số đó có 17 trường hợp (44 %) là do nguyên nhân mất ổn định.

Hiện nay, yêu cầu phát triển kinh tế đòi hỏi phải xây dựng các công trình lớn và nhẹ, trong đó thường dùng các thanh chịu nén có chiều dài lớn dễ bị mất ổn định. Do đó, việc nghiên cứu ổn định công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tế.

#### 11.1.2. Định nghĩa

Ổn định là một khái niệm có liên quan đến nhiều lĩnh vực như trong cuộc sống, trong kỹ thuật nói chung, trong toán học và trong công trình. Trong mỗi lĩnh vực có một định nghĩa tương ứng phù hợp với đối tượng nghiên cứu. Trong giáo trình này chỉ đề cập đến định nghĩa thuộc lĩnh vực công trình theo quan điểm của *Euler-Lagrange*:

*Ổn định là tính chất của công trình có khả năng giữ được vị trí ban đầu hoặc giữ được dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng.*

Tính chất ổn định của công trình thường không phải là vô hạn khi tăng giá trị của các tải trọng tác dụng trên công trình. Khi tính chất đó mất đi thì công trình không còn khả năng chịu tải trọng, lúc này công trình được gọi là *không ổn định*. Như vậy, vị trí của công trình hoặc dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình có khả năng *ổn định hoặc không ổn định*.

Dưới tác dụng của tải trọng, sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn được gọi là *nhiều*) rồi loại bỏ nguyên nhân đó đi:

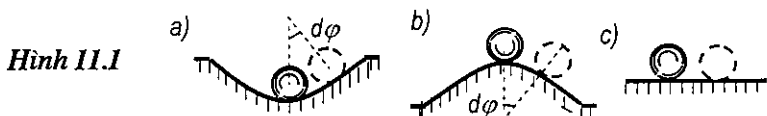
- \* Nếu công trình có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu thì công trình được gọi là *ổn định*.
- \* Nếu công trình không có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu, độ lệch không có khuynh hướng giảm dần mà tiếp tục phát triển cho đến khi công trình có vị trí mới hoặc dạng cân bằng mới thì công trình được gọi là *không ổn định*.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là *mất ổn định*. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là *trạng thái tới hạn* của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là *tải trọng tới hạn*.

Từ khái niệm về ổn định ta cũng cần phân biệt hai trường hợp: mất ổn định về vị trí và mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

◆ **Mất ổn định về vị trí**

*Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí khác. Đó là trường hợp mất ổn định lật hoặc trượt của các công trình tường chắn, mố cầu, trụ cầu, tháp nước... Trong những trường hợp này, các ngoại lực tác dụng trên công trình không thể cân bằng ở vị trí ban đầu của công trình mà chỉ có thể cân bằng ở vị trí mới khác vị trí ban đầu.*



Một ví dụ đơn giản về hiện tượng ổn định và mất ổn định về vị trí là trường hợp viên bi ở các vị trí khác nhau như trên hình 11.1. Mặc dù viên bi

đều cân bằng ở cả ba vị trí, song có sự khác nhau cơ bản giữa ba trường hợp này khi có một nguyên nhân nào đó đưa viên bi lệch khỏi vị trí cân bằng ban đầu với một lượng vô cùng bé rồi thả ra, ta thấy:

- Trường hợp viên bi đặt trên mặt cầu lõm (hình 11.1a): viên bi dao động quanh vị trí ban đầu rồi cuối cùng trở về vị trí cũ. Vị trí này là *vị trí cân bằng ổn định*.
- Trường hợp viên bi đặt trên mặt cầu lồi (hình 11.1b): viên bi không trở về vị trí ban đầu mà tiếp tục lăn xuống phía dưới. Vị trí này là *vị trí cân bằng không ổn định*.
- Trường hợp viên bi đặt trên mặt phẳng (hình 11.1c): viên bi không quay về vị trí ban đầu và cũng không chuyển động tiếp tục. Vị trí này là *vị trí cân bằng phiếm định*.

**Nhận xét:** Ở vị trí cân bằng ổn định, *thế năng* của viên bi là *cực tiểu*. Ở vị trí cân bằng không ổn định, *thế năng* của viên bi là *cực đại*. Ở vị trí cân bằng phiếm định, *thế năng* của viên bi *không đổi*.

#### ◆ Mất ổn định về dạng cân bằng

Theo quan điểm L. Euler: *Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó.* Trong những trường hợp này, *sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng.* Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí ở các điểm sau: *đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng, không tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.*

Bài toán ổn định về vị trí thường đơn giản, trên cơ sở vận dụng các điều kiện cân bằng cũng đủ để giải bài toán. Trong giáo trình này chỉ xét bài toán ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng theo quan điểm Euler phù hợp với các bài toán ổn định đàn hồi trong lĩnh vực công trình.

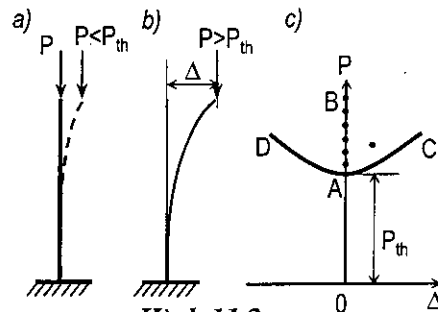
Các đặc trưng của hiện tượng mất ổn định Euler:

- \* *Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh.*
- \* *Phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất.*

\* Trước trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là không ổn định.

Để minh họa ta xét một ví dụ đơn giản là trường hợp thanh thẳng chịu nén đúng tâm như trên hình 11.2a:

- Khi lực  $P$  còn nhỏ, thanh vẫn thẳng, trạng thái chịu nén của thanh là trạng thái ban đầu và duy nhất. Nếu đưa hệ ra khỏi dạng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ đi thì hệ sẽ dao động rồi trở về dạng ban đầu. Dạng cân bằng này ổn định.



Trạng thái cân bằng ổn định này được mô tả bởi đoạn  $OA$  trên đồ thị liên hệ giữa chuyển vị  $\Delta$  và tải trọng  $P$  (hình 11.2c).

- Khi tăng lực  $P$  đến một giá trị gọi là lực tới hạn  $P_{th}$ , thanh ở trạng thái tới hạn. Lúc này, ngoài trạng thái cân bằng chịu nén còn có khả năng phát sinh trạng thái cân bằng uốn dọc, nghĩa là thanh ở trạng thái cân bằng phiếm định. Như vậy, dạng cân bằng bị phân nhánh thành hai dạng biến dạng. Trạng thái này tương ứng với điểm phân nhánh  $A$  trên đồ thị (hình 11.2c).
- Khi  $P > P_{th}$ , trạng thái cân bằng chịu nén vẫn có khả năng tồn tại song không ổn định vì nếu đưa hệ ra khỏi dạng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì hệ sẽ không có khả năng trở về dạng thẳng ban đầu. Dạng cân bằng không ổn định này tương ứng với nhánh  $AB$  trên đồ thị (nhánh có điểm thêm các dấu chấm trên hình 11.2c). Trong hệ cũng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc khi biến dạng của thanh là hữu hạn (hình 11.2b). Dạng cân bằng này là ổn định và được mô tả bởi nhánh  $AC$  hoặc  $AD$  trên đồ thị (hình 11.2c).

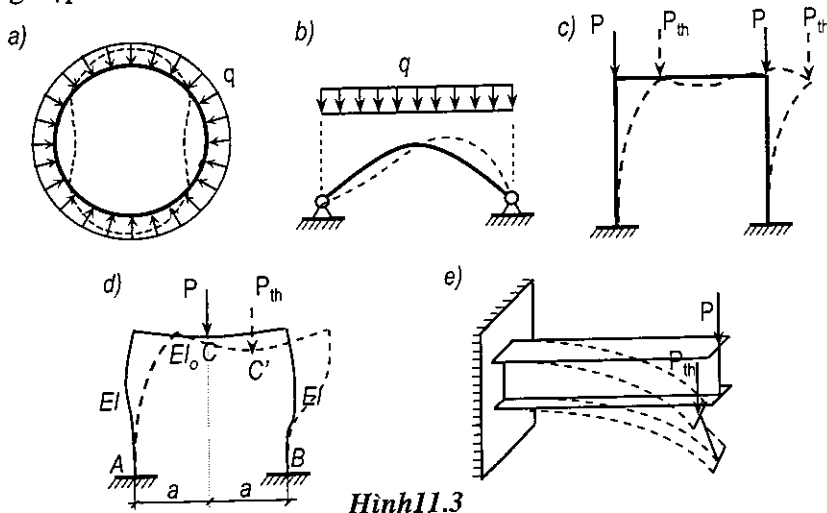
Nếu tiếp tục tăng lực  $P$  thì về mặt lý thuyết trong thanh sẽ phát sinh những dạng cân bằng mới dưới dạng uốn dọc tương ứng với những lực tới hạn bậc cao. Tuy nhiên, ngoài dạng cân bằng thứ nhất tương ứng với lực tới hạn nhỏ nhất, những dạng cân bằng tương ứng với lực tới hạn bậc cao đều là không ổn định, hiếm khi xảy ra và không có ý nghĩa thực tế. Bởi vậy trong thực tế ta chỉ cần tìm lực tới hạn nhỏ nhất.



Hiện tượng mất ổn định Euler còn có thể xảy ra với các hệ biến dạng khác. Trên hình 11.3 giới thiệu một số ví dụ khác về mất ổn định:

- ◆ *Mất ổn định dạng nén đúng tâm:* vành tròn kín (hình 11.3a) chịu áp lực phân bố đều hướng tâm (áp lực thủy tĩnh); vòm parabol chịu tải trọng phân bố đều theo phương ngang (hình 11.3b); khung chịu tải trọng như trên hình 11.3c.
- ◆ *Mất ổn định dạng biến dạng đối xứng:* Khung đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên hình 11.3d, bị mất ổn định dạng biến dạng đối xứng.
- ◆ *Mất ổn định dạng uốn phẳng:* Dầm chữ I chịu uốn phẳng do tải trọng  $P$  (hình 11.3e). Khi  $P < P_{th}$ , dầm có dạng cân bằng ổn định là dạng uốn phẳng; khi  $P > P_{th}$ , dạng uốn phẳng không ổn định và dầm có dạng cân bằng mới là dạng uốn cùng với xoắn.

Các đường đứt nét trên hình 11.3 là dạng mất ổn định tương ứng với từng trường hợp.



Hình 11.3

### 11.1.3. Phương pháp xác định lực tới hạn

Hiện có nhiều phương pháp khác nhau để tìm lực tới hạn nhằm đánh giá khả năng làm việc của công trình. Các phương pháp được xây dựng trên cơ sở các tiêu chí về ổn định. Ngoài tiêu chí Euler, còn có các tiêu chí về năng lượng, tiêu chí động lực học. Từ đó hình thành các thể loại phương pháp: phương pháp tĩnh; phương pháp năng lượng; phương pháp động lực học. Nói

chung, các phương pháp đều cho kết quả thống nhất. Tuy nhiên cũng tồn tại một số bài toán không thể cho lời giải chính xác theo các phương pháp tĩnh mà chỉ có thể vận dụng các phương pháp động lực học mới tìm được .

Trong môn học này chỉ giới thiệu những khái niệm ban đầu về ổn định và cách vận dụng phương pháp tĩnh để giải bài toán rất phổ biến trong thực tế là bài toán ổn định của thanh thẳng chịu lực nén đúng tâm làm việc trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi. Bạn đọc có thể tìm hiểu sâu hơn về các nội dung khác trong tài liệu [10,11].

## 11.2. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

### 11.2.1. Cách xác định lực tới hạn

Để tìm lực tới hạn của thanh thẳng có tiết diện không đổi chịu lực nén đúng tâm ta tiến hành theo thứ tự như sau:

1. Lập phương trình vi phân đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu.
2. Tìm nghiệm của phương trình vi phân.
3. Lập các phương trình xác định các hằng số tích phân và các đại lượng chưa biết theo các điều kiện biên. Số lượng các điều kiện biên cần thiết phải bằng tổng số các hằng số tích phân và các đại lượng chưa biết.

Các phương trình tìm được dẫn đến hệ phương trình đại số thuần nhất nên có thể xảy ra hai khả năng:

\* Các nghiệm đều duy nhất bằng không: không phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu. Đó là nghiệm tầm thường tương ứng với trạng thái cân bằng ổn định.

\* Các nghiệm tồn tại: phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu, hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định. Điều kiện tồn tại nghiệm là định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất phải bằng không:

$$D(\alpha) = 0, \quad (11.1)$$

$\alpha$  là các hệ số của hệ phương trình thuần nhất, phụ thuộc đặc trưng hình học của hệ và tải trọng dưới dạng các hàm siêu việt.

Phương trình (11.1) được gọi là *phương trình đặc trưng hoặc phương trình ổn định* của hệ theo phương pháp tĩnh học.

4. Giải phương trình ổn định (11.1) để tìm lực tới hạn.

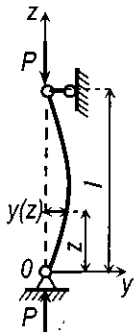
Về nguyên tắc, với hệ biến dạng ta tìm được vô số giá trị lực tới hạn, song chỉ có lực tới hạn thứ nhất (nhỏ nhất) mới có ý nghĩa thực tế.

**11.2.2. Trường hợp thanh có khớp ở hai đầu**

Trước tiên ta tìm hiểu cách xác định lực nén tới hạn của thanh có tiết diện không đổi, liên kết khớp ở hai đầu (hình 11.4).

1. Lập phương trình vi phân của đường đàn hồi của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái thẳng ban đầu. Trạng thái lệch được mô tả bằng hàm  $y(z)$ . Mômen uốn tại tiết diện cách gốc tọa độ một khoảng  $z$  (hình 11.4) sẽ là:

$$M(z) = P \cdot y(z).$$



Hình 11.4

Giả sử khi mất ổn định thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi nên có thể sử dụng phương trình vi phân của đường đàn hồi trong dầm chịu uốn. Khi mất ổn định, thanh bị uốn trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất nên trong phương trình ta dùng độ cứng  $EI_{\min}$  của tiết diện, ta có:

$$EI_{\min} y'' = -M(z) = Py(z)$$

hay  $y'' + \alpha^2 y = 0,$  (11.2)

với  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_{\min}}}$ . (11.3)

2. Nghiệm của phương trình (a):  $y = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$ . (11.4)

3. Lập các phương trình xác định các hằng số tích phân  $A, B$  theo các điều kiện biên:

- khi  $z = 0$  ta có:  $y(0) = 0$  suy ra  $A = 0$ ;
- khi  $z = l$  ta có:  $y(l) = 0$ . suy ra  $A \cos \alpha l + B \sin \alpha l = 0$ .

Phương trình ổn định:  $D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l \end{vmatrix} = \sin \alpha l = 0$ .

4. Nghiệm của phương trình ổn định:

$$\alpha l = k\pi \quad \text{hay} \quad \alpha = k\pi/l \quad \text{với } k = 1, 2, 3 \dots$$

Thay kết quả  $\alpha = k\pi/l$  vào (11.3) và (11.4) ta được:

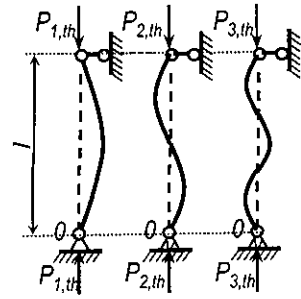
♦ Lực tới hạn:  $P_{th} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} EI_{\min}$  (11.5)

♦ Phương trình đường đàn hồi:  $y(z) = B \sin \frac{k\pi}{l} z$  (11.6)

Lần lượt cho  $k = 1, 2, 3 \dots$  ta tìm được các giá trị khác nhau của lực tới hạn và các dạng biến dạng tương ứng của hệ như trên hình 11.5.

$$P_{1,th} = \frac{\pi^2}{l^2} EI_{\min}; \quad P_{2,th} = \frac{4\pi^2}{l^2} EI_{\min};$$

$$P_{3,th} = \frac{9\pi^2}{l^2} EI_{\min} \dots$$



Hình 11.5

Trong thực tế, giá trị có ý nghĩa tương ứng với lực tới hạn nhỏ nhất, thường được gọi là lực Euler với ký hiệu là  $P_{Euler}$ .

$$P_{Euler} = P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (11.7)$$

### 11.2.3. Trường hợp thanh có liên kết bất kỳ ở hai đầu

Cũng thực hiện tương tự như trên đối với các thanh thẳng, tiết diện không đổi, có liên kết khác nhau ở hai đầu theo các điều kiện biên tương ứng ta sẽ được công thức xác định lực tới hạn dưới dạng chung như sau: .

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (11.8)$$

trong đó:  $\mu$  là hệ số quy đổi chiều dài của thanh được xác định theo bảng 11.1.

Bảng 11.1

Sơ đồ thanh					
$\mu$	1	2	0,7	0,5	1

### 11.2.4. Ứng suất tới hạn

Từ (11.8) ta suy ra công thức Euler để xác định ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (11.9)$$

hay: 
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11.10)$$

trong đó: 
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad \text{với} \quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (11.11)$$

$\lambda$  – độ mảnh của thanh trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất; đại lượng phụ thuộc chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện:

$i_{min}$  – bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện thanh..

### 11.3. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

#### 11.3.1. Giới hạn áp dụng công thức Euler

Khi thiết lập công thức Euler ta đã giả thiết vật liệu tuyệt đối đàn hồi và tuân theo định luật Hooke. Do đó, công thức xác định lực tới hạn Euler sẽ không áp dụng được khi ứng suất tới hạn tìm được vượt quá giới hạn đàn hồi (hay giới hạn tỷ lệ). Điều kiện áp dụng: *ứng suất tới hạn phải nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ  $\sigma_{H}$* :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{H} \quad \text{suy ra} \quad \lambda \geq \lambda^* \quad \text{với} \quad \lambda^* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{H}}} \quad (11.12)$$

Như vậy, đối với những thanh có độ mảnh  $\lambda \leq \lambda^*$  thì không áp dụng được công thức Euler.

Với thanh bằng thép Ct3 ta có:  $E = 2,1.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{H} = 19,2 \text{ kN/cm}^2$  thì độ mảnh giới hạn  $\lambda^* = 100$ . Trên bảng 11.2 cung cấp giá trị  $\lambda^*$  đối với một số vật liệu thường gặp.

Bảng 11.2

Vật liệu	Thép Ct3	Thép Ct5	Gang	Gỗ thông
$\lambda^*$	100	85	80	75

#### 11.3.2. Thanh chịu lực nén ngoài giới hạn đàn hồi

##### \* Hướng nghiên cứu lý thuyết

Theo hướng này, các tác giả kiến nghị biểu thị công thức xác định ứng suất tới hạn dưới dạng tương tự như công thức Euler nhưng thay môđun đàn

hồi bằng môđun  $E^*$ , chung cho cả hai trường hợp chịu nén trong và ngoài giới hạn đàn hồi:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E^* I_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (11.13)$$

- ◆ Khi chịu nén trong giới hạn đàn hồi:  $E^* = E$ .
- ◆ Khi chịu nén ngoài giới hạn đàn hồi:
  - $E^* = E_t$  theo quan điểm môđun tiếp tuyến  $E_t$  của F. Engesser; môđun tiếp tuyến biểu thị độ dốc giảm dần của biểu đồ ứng suất - biến dạng  $\sigma$ - $\varepsilon$  của vật liệu từ giới hạn tỷ lệ đến giới hạn chảy (xem [10, 11]).
  - $E^* = E_q$  theo quan điểm môđun quy ước  $E_q$  của F. S. Iaxinski; Th. Kármán; F. Engesser. Quan điểm này có xét đến khả năng tăng và giảm tải của thanh bị uốn cong khi mất ổn định. Phần thanh bị lồi, cần xét với môđun tiếp tuyến  $E_t$ ; phần thanh bị lõm cần xét với môđun đàn hồi  $E$ . Trên cơ sở đó lập ra công thức tính  $E_q$  (xem [10, 11]).

Về lý thuyết, cách tính theo quan điểm môđun quy ước tuy chặt chẽ hơn song kết quả thí nghiệm thường phù hợp với kết quả tính theo quan điểm môđun tiếp tuyến. Gần đây, kết quả nghiên cứu của F. R. Shanely cho thấy: nếu sự mất ổn định xảy ra trong quá trình lực nén tăng dần thì lực tới hạn nằm trong khoảng hai giá trị tính theo hai quan điểm trên và độ chênh lệch giữa hai giá trị đó cũng rất nhỏ.

Khi giải bài toán theo hướng này ta cần biết biểu đồ ứng suất — biến dạng ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) của vật liệu và vận dụng biện pháp lập đúng đắn để tìm nghiệm.

#### \* Hướng nghiên cứu thực nghiệm

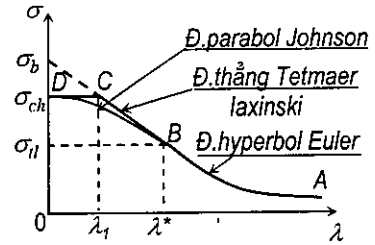
Theo hướng thực nghiệm, người ta xây dựng các hàm biểu thị quan hệ giữa ứng suất tới hạn và độ mảnh trên cơ sở các số liệu thí nghiệm. Nhiều tác giả đã kiến nghị các hàm thực nghiệm khác nhau. Dưới đây là các hàm được lưu ý hơn cả:

- \* Khi  $\lambda \geq \lambda^*$  thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi; theo (11.12) ta có hàm hyperbol ứng với đường cong  $AB$  trên hình 11.6.
- \* Khi  $\lambda < \lambda^*$  thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi;
  - ◆ Thanh có độ mảnh trung bình:  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda^*$ : hàm đơn giản nhất thường được sử dụng là hàm bậc nhất do L. Tetmajer và F. S. Iaxinski kiến nghị (đoạn  $BC$  trên hình 11.6):

$$\sigma_{th} = a - b\lambda. \quad (11.14)$$

$a$  và  $b$  là các thông số phụ thuộc vật liệu chế tạo thanh và được xác định theo điều kiện:

- khi  $\lambda = \lambda^*$  thì  $\sigma_{th}$  bằng giới hạn tỷ lệ  $\sigma_{th} = \sigma_{tl}$ ;
- khi  $\lambda = 0$  thì  $\sigma_{th}$  bằng giới hạn bền chịu nén  $\sigma_{th} = \sigma_b$ .



Hình 11.6

Chẳng hạn đối với thép Ct3, công thức này cho kết quả phù hợp khi độ mảnh ở trong khoảng  $40 \leq \lambda \leq 100$ .

- ◆ Thanh có độ mảnh nhỏ (với thép Ct3, khi  $\lambda \leq 40$ ), thì  $\sigma_{th}$  được lấy bằng giới hạn chảy (đoạn CD trên hình 11.6):

$$\sigma_{th} = \sigma_{ch}. \quad (11.15)$$

Một dạng khác cũng dễ sử dụng là hàm parabol, do J. B. Johnson kiến nghị:

$$\sigma_{th} = \alpha - \beta \lambda^2. \quad (11.16)$$

$\alpha$  là ứng suất nguy hiểm khi nén đơn, phụ thuộc vật liệu thanh, xác định như sau:

- với vật liệu dẻo,  $\alpha$  bằng giới hạn chảy  $\alpha = \sigma_{ch}$ ;

- với vật liệu giòn,  $\alpha$  bằng giới hạn bền  $\alpha = \sigma_b$ ;

$\beta$  là hệ số được xác định theo điều kiện: đường parabol tiếp xúc thoải với đường hypebol Euler, tức là khi  $\lambda = \lambda^*$  thì đường parabol và đường hypebol Euler có tiếp tuyến chung.

#### 11.4. CÁCH TÍNH THANH THẲNG CHỊU NÉN THEO TIÊU CHUẨN KỸ THUẬT (TCKT)

Trong các mục trên đã trình bày cách tìm lực hay ứng suất tới hạn là các tác nhân gây ra phá hoại về mặt ổn định. Khi tính toán, để được an toàn ta cần phải đưa vào các hệ số như hệ số an toàn về ổn định.

Trong mục này ta tìm hiểu cách tính một thanh thẳng chịu nén trong điều kiện an toàn về mặt ổn định thường được sử dụng trong các TCKT. Tuy vẫn sử dụng các công thức tính trong và ngoài giới hạn đàn hồi đã nêu ở trên song cách tính theo TCKT rất đơn giản vì có thể dựa vào bảng tính sẵn. Dưới đây sẽ trình bày cách lập công thức và bảng tính.

Khi tính thanh thẳng có diện tích tiết diện  $A$  chịu lực nén  $P$ , điều kiện bền có dạng:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma] \quad \text{với} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}; \quad (11.17)$$

trong đó:

$[\sigma]$  – ứng suất cho phép khi nén;

$\sigma_o$  – ứng suất nguy hiểm khi nén;

$n$  – hệ số an toàn về bền khi nén.

Khi tính thanh thẳng có diện tích tiết diện  $A$  chịu lực nén  $P$ , điều kiện ổn định có dạng:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]_{\text{ổđ}} \quad \text{với} \quad [\sigma]_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{k}; \quad (11.18)$$

trong đó:

$[\sigma]_{\text{ổđ}}$  – ứng suất cho phép về ổn định;

$\sigma_{th}$  – ứng suất tới hạn tìm theo các công thức tính khi thanh làm việc trong hoặc ngoài giới hạn đàn hồi đã trình bày trong mục 11.2 và 11.3;

$k$  – hệ số an toàn về ổn định, thường lớn hơn hệ số  $n$ . Với thép  $k = 1,5 \div 3$ ; với gang  $k = 5 \div 5,5$ ; với gỗ  $k = 2,8 \div 3,2$ .

Công thức (11.18) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{th}}{k} = \left( \frac{\sigma_{th}}{k[\sigma]} \right) [\sigma];$$

hay: 
$$\frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma] \quad \text{với} \quad \varphi = \frac{\sigma_{th}}{k[\sigma]} = \frac{n\sigma_{th}}{k\sigma_o}; \quad (11.19)$$

Hệ số  $\varphi$  được gọi là hệ số giảm ứng suất cho phép ( $\varphi < 1$ ) khi tính thanh chịu nén.  $\varphi$  phụ thuộc vật liệu, hệ số an toàn về bền và ổn định, ứng suất tới hạn tức là phụ thuộc độ mảnh của thanh. Trên bảng 11.3 [2, 3] cung cấp các giá trị của  $\varphi$  theo các độ mảnh  $\lambda$  khác nhau, tương ứng với một số vật liệu thường gặp.

Như vậy, khi tính toán theo TCKT ta chỉ cần vận dụng một công thức (11.19).

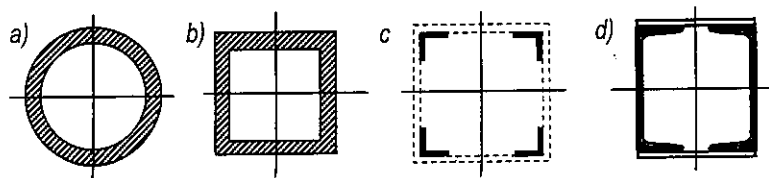


Bảng 11.3

Độ mảnh $\varphi$	Trị số $\varphi$				
	Thép Ct 4, 3, 2, 1	Thép Ct 5	Thép hợp kim	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,84	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25
120	0,45	0,36	0,30	–	0,22
130	0,40	0,33	0,26	–	0,18
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14
160	0,29	0,25	0,19	–	0,12
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08

**Chú ý:**

1. Khi kiểm tra độ bền của thanh chịu nén đúng tâm, diện tích A được lấy tại tiết diện giảm yếu cục bộ (nếu có) là diện tích thực tế, chỉ quan tâm đến giá trị của diện tích mà không cần quan tâm đến hình dạng tiết diện.
2. Khi kiểm tra ổn định của thanh chịu nén đúng tâm, sự giảm yếu cục bộ không gây ảnh hưởng đáng kể đối với ứng suất tới hạn nên diện tích A được lấy bằng diện tích nguyên. Trong trường hợp này cần quan tâm đến hình dạng của tiết diện. Thật vậy, ứng suất tới hạn tỷ lệ ngược với độ mảnh nên thanh chịu nén tốt nhất là thanh có độ mảnh nhỏ nhất. Để đạt được yêu cầu này cần tìm cách tăng mômen quán tính mà vẫn giữ nguyên diện tích, do đó các thanh rỗng (hình 11.7a, b) là thanh hợp lý về mặt ổn định. Mặt khác, do thanh có xu hướng mất ổn định theo phương có độ cứng nhỏ nhất nên muốn cho thanh có khả năng chịu lực tối đa ta cần bố trí tiết diện sao cho mômen quán tính đối với hai trục quán tính chính trung tâm bằng nhau. Ví dụ, sử dụng các thanh ghép như trên hình 11.7c, d để đưa vật liệu ra xa hệ trục  $x, y$  và bố trí sao cho  $I_x = I_y$ .



Hình 11.7

Từ công thức (11.19) ta có thể giải ba dạng bài toán tương tự như khi kiểm tra điều kiện bền:

**1. Kiểm tra ổn định:** Cho biết:  $P$ ;  $[\sigma]$ ;  $A$  và hình dạng tiết diện, kiểm tra theo điều kiện (11.19). Khi đã có số liệu về tiết diện, tìm  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$  và độ mảnh  $\lambda$  của thanh theo (11.11). Sử dụng bảng 11.3 tìm hệ số  $\varphi$  tương ứng để kiểm tra theo điều kiện (11.19).

Trường hợp thanh không có các tiết diện bị giảm yếu, nếu điều kiện (11.19) thỏa mãn thì điều kiện bền cũng thỏa mãn vì hệ số  $\varphi \leq 1$ .

Trường hợp thanh có các tiết diện bị giảm yếu thì cần kiểm tra điều kiện (11.19) với diện tích nguyên và kiểm tra điều kiện bền với diện tích thực tế có bị giảm yếu.

**2. Xác định lực nén cho phép:** Cho biết:  $[\sigma]$ ;  $A$  và hình dạng tiết diện. tìm giá trị cho phép của  $P$ . Khi đã có số liệu về tiết diện ta tìm được hệ số  $\varphi$  theo các bước đã nêu ở trên, tiếp đó tìm  $[P]$  theo điều kiện:

$$[P] \leq \varphi A [\sigma] \quad (11.20)$$

**3. Tìm tiết diện:** Cho biết:  $P$ ;  $[\sigma]$ ; tìm  $A$  và hình dạng tiết diện. Từ (11.19) ta có:

$$A \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} \quad (11.21)$$

Trong bài toán này cách giải có phức tạp hơn vì hệ số  $\varphi$  phụ thuộc độ mảnh  $\lambda$  mà độ mảnh này còn chưa biết do tiết diện chưa được xác định. Cần giải bài toán này bằng biện pháp thử đúng dần, chuyển về bài toán kiểm tra theo thứ tự như sau: đầu tiên, chọn cho  $\varphi$  một giá trị nào đó, chẳng hạn bằng 0,5; tìm  $A$  theo (11.21); xác định  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$  và độ mảnh  $\lambda$  của thanh theo (11.11); sử dụng bảng 11.3 tìm hệ số  $\varphi$  tương ứng để kiểm tra theo điều kiện (11.19). Nếu điều kiện này chưa thỏa mãn thì cần chọn lại bằng cách gia tăng hoặc giảm bớt kích thước tiết diện rồi thực hiện lại các bước tính toán để kiểm tra điều kiện (11.19) cho đến khi điều kiện này thỏa mãn (xem Ví dụ 11.2).

**Ví dụ 11.1.** Tìm giá trị cho phép của lực nén đúng tâm  $[P]$  tác dụng trên cột có tiết diện là thép hình Ct3, IN<sup>o</sup>36, cao 2,60 m. Cho biết: cột có một đầu bị ngàm, một đầu khớp;  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ .

Từ Phụ lục, ta có: với IN<sup>o</sup>36:  $A = 61,9 \text{ cm}^2$ ;  $i_{\min} = 2,89 \text{ cm}$ .

$$\text{Theo (11.11): } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 260}{2,89} \approx 63;$$

Sử dụng bảng 11.3, sau khi thực hiện phép nội suy tuyến tính: với  $\lambda = 63$ , ta được  $\varphi = 0,845$ . Từ (11.20) ta tìm được:

$$[P] \leq \varphi A [\sigma] = 0,845 \cdot 61,9 \cdot 14 = 732,3 \text{ kN}.$$

**Ví dụ 11.2.** Chọn số hiệu thép chữ **I** cho thanh có liên kết khớp ở hai đầu, dài 240 cm; chịu lực nén đúng tâm 220 kN. Cho biết  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ .

♦ *Chọn thử lần đầu:* Giả thiết  $\varphi = 0,5$ ; tìm  $A$  theo (11.21);

$$A \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{220}{0,5 \cdot 14} = 31,43 \text{ cm}^2.$$

Từ bảng 1 trong Phụ lục, chọn lại tiết diện: IN<sup>o</sup>22a ta có  $A = 31,8 \text{ cm}^2$ ;  $i_{\min} = 2,50$ . Tiếp đó, xác định độ mảnh  $\lambda$  của thanh theo (11.11):

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 240}{2,50} = 96;$$

Từ bảng 11.3 tìm hệ số  $\varphi$ , sau khi thực hiện phép nội suy tuyến tính ta được:  $\varphi = 0,64$ . Giá trị này chênh lệch nhiều so với giả thiết ban đầu nên cần chọn lại.

♦ *Chọn thử lần thứ hai:* Giả thiết  $\varphi = (0,5 + 0,64) / 2 = 0,57$ ; tìm  $A$ :

$$A \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{220}{0,57 \cdot 14} = 27,57 \text{ cm}^2.$$

Từ bảng 1 trong Phụ lục, chọn lại tiết diện: IN<sup>o</sup>20a ta có  $A = 28,9 \text{ cm}^2$ ;  $i_{\min} = 2,32$ . Tiếp đó, xác định độ mảnh  $\lambda$  của thanh theo (11.11):

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 240}{2,32} = 103,4;$$

Từ bảng 11.3 tìm hệ số  $\varphi$ , sau khi thực hiện phép nội suy tuyến tính ta được:  $\varphi = 0,57$ . Tiếp đó, kiểm tra theo điều kiện.

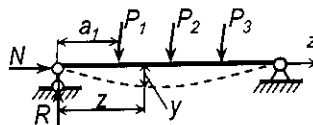
$$\sigma = \frac{P}{\varphi A} = \frac{220}{0,57 \cdot 28,9} = 13,36 < [\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2. \text{ (sai kém 4,6\%, đạt).}$$

Kết luận: chọn IN<sup>o</sup>20a.

## 11.5. CÁCH TÍNH THANH THẲNG CHỊU UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

### 11.5.1. Khái niệm

Xét thanh chịu tác dụng đồng thời của các tải trọng ngang  $P$  và tải trọng dọc trục  $N$  như trên hình 11.8. Biểu thức mômen uốn tại tiết diện có hoành độ  $z$  bằng:



Hình 11.8

$$M(z) = Ny(z) + [R.z - P_j(z - a_j)];$$

hay: 
$$M(z) = Ny(z) + M^*(z). \quad (11.22)$$

trong đó:  $Ny(z)$  – mômen uốn do riêng tải trọng dọc trục gây ra;

$M^*(z)$  – biểu thị số hạng trong móc vuông của biểu thức trên tức là mômen uốn do riêng các tải trọng ngang gây ra.

Thống nhất biểu thị các đại lượng mang ký hiệu \* là đại lượng do riêng tải trọng ngang gây ra.

- ◆ Trong trường hợp thanh có chiều dài ngắn ( $l/h < 12$  với  $l$  và  $h$  là chiều dài thanh và chiều cao tiết diện) hoặc độ mảnh nhỏ ( $\lambda < 70$ ): độ võng  $y$  rất nhỏ, số hạng  $Ny(z)$  thường được bỏ qua. Khi đó, các nội lực được xác định theo sơ đồ ban đầu của thanh chưa bị biến dạng và thực hiện như đã trình bày trong chương 6.
- ◆ Trường hợp thanh có chiều dài lớn ( $l/h \geq 12$ ) hoặc độ mảnh lớn ( $\lambda \geq 70$ ): ảnh hưởng của độ võng  $y$  khá lớn không được bỏ qua. Khi đó, các nội lực cần được xác định theo sơ đồ thanh đã bị biến dạng và cách tính sẽ phức tạp.

Nếu uốn ngang làm cho thanh bị cong về cùng một phía ta thấy:

- Khi  $N$  là lực kéo thì mômen do uốn dọc làm giảm mômen do uốn ngang. Do đó, nếu xác định nội lực theo cách đã trình bày trong chương 6 thì thiên về an toàn.
- Khi  $N$  là lực nén thì mômen do uốn dọc làm tăng mômen do uốn ngang và thanh sẽ chịu lực bất lợi hơn so với uốn ngang.

Do đó, ta chỉ cần quan tâm đến bài toán thanh có chiều dài lớn chịu uốn ngang cùng với uốn dọc đồng thời khi lực dọc trục là lực nén.

Thay biểu thức (11.22) vào phương trình vi phân của đường đàn hồi khi uốn  $y'' = -M / EI$ , sau khi biến đổi, ta được:

$$y''(z) + k^2 y(z) = -\frac{M_x^*(z)}{EI_x} \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{N}{EI_x}. \quad (11.23)$$

Giải phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất (11.23) kết hợp với các điều kiện biên ta sẽ tìm được hàm độ võng, tiếp đó tìm mômen uốn theo (11.22).

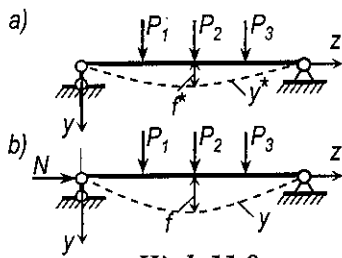
Trong thực hành, việc giải bài toán bằng cách tích phân phương trình vi phân (11.23) cũng khá phức tạp, đặc biệt là khi có nhiều tải trọng ngang. Do đó, ta thường vận dụng phương pháp gần đúng để giải bài toán.

### 11.5.2. Phương pháp tính gần đúng

#### 1. Biểu thức độ võng

Phương pháp gần đúng được xây dựng trên cơ sở: *giả thiết đường đàn hồi được thay bằng một hàm xấp xỉ thỏa mãn các điều kiện biên của thanh.* Trong kỹ thuật thường chọn dùng các hàm lượng giác vì các hàm này xấp xỉ khá phù hợp với đường đàn hồi của các loại dầm và tính toán rất tiện lợi.

Ví dụ, với dầm có khớp ở hai đầu (hình.11.9) ta chọn hàm có dạng hình sin cho cả hai trường hợp sau:



Hình 11.9

- Khi dầm chỉ chịu uốn ngang (hình 11.9a):

$$y^*(z) = f^* \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (11.24)$$

- Khi dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời (hình 11.9b):

$$y(z) = f \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (11.25)$$

Trong các công thức trên:  $f^*$  và  $f$  là độ võng cực đại của dầm chịu uốn ngang và của dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

Lấy đạo hàm hai lần các hàm  $y(z)$ ,  $y^*(z)$  và chú ý là  $(y^*)'' = -M^*(z) / EI_x$ ,

ta có:

$$y''(z) = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} y(z).$$

$$M^*(z) = -EI_x (y^*)'' = EI_x \frac{\pi^2}{l^2} y^*(z).$$

Thay các kết quả trên vào phương trình vi phân (11.23) với chú ý là  $k^2 = N/EI_x$  sau khi biến đổi ta được:

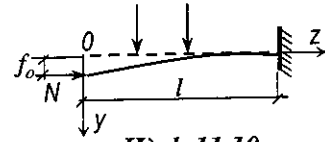
$$y(z) = \frac{y^*(z)}{1 - \frac{Nl^2}{\pi^2 EI_x}} = \frac{y^*(z)}{1 - \frac{N}{N_E}}, \quad (11.23)$$

với  $N_E = \pi^2 EI_x / l^2$  là biểu thức có dạng công thức tới hạn Euler tương ứng với  $EI_x$  là độ cứng chống uốn của mặt phẳng chịu uốn ngang.

Trường hợp dầm có điều kiện liên kết khác, chịu uốn ngang về cùng một phía, ta có thể chọn hàm đường cong xấp xỉ là một hàm lượng giác phù hợp với các điều kiện biên.

Ví dụ với dầm côngxon trên hình 11.10 có thể chọn dạng hàm như sau:

$$y(z) = f_0 \left[ 1 - \cos \frac{\pi(l-z)}{2l} \right].$$



Tiếp đó, cũng lập luận tương tự như trên sẽ tìm được công thức có dạng (11.23), chỉ khác là lực  $N_E$  có giá trị bằng lực tới hạn trong bài toán ổn định. Điều kiện liên kết được thể hiện thông qua hệ số  $\mu$  đã biết:

$$N_E = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}$$

## 2. Biểu thức mômen uốn

Sau khi xác định được độ võng  $y(z)$  ta tìm được mômen uốn theo (11.22):

$$M(z) = M^*(z) + N \frac{y^*(z)}{1 - N/N_E}. \quad (11.24)$$

Cũng có thể tìm biểu thức mômen uốn bằng cách lấy đạo hàm hai lần của (11.23) rồi nhân với  $-EI_x$  ta được:

$$-EI_x y''(z) = \frac{-EI_x (y^*)''(z)}{1 - N/N_E},$$

hay:

$$M_x(z) = \frac{M_x^*(z)}{1 - N/N_E}, \quad (11.25)$$

Sử dụng công thức này đơn giản hơn công thức (11.24) vì chỉ cần tìm mômen uốn dọc và ngang đồng thời theo mômen uốn ngang, không theo độ võng. Tuy nhiên, công thức này cho kết quả kém chính xác hơn (11.24) vì

với cách tìm này ta cũng đã phải xấp xỉ các biểu đồ mômen uốn là hàm hình sin, tức là chấp nhận thêm một lần gần đúng nữa. Chỉ nên áp dụng công thức (11.25) khi tải trọng ngang tác dụng đối xứng.

### 3. Biểu thức ứng suất

Ứng suất nén lớn nhất trong thanh chịu uốn ngang cùng uốn dọc đồng thời được xác định như sau:

$$\sigma(z) = -\frac{N}{A} - \frac{|M_x(z)|}{W_x}$$

trong đó  $M_x(z)$  được xác định theo (11.24) hoặc (11.25).

Trong cả hai công thức (11.24) và (11.25), khi chọn hàm hình sin ta đã xem độ võng cực đại và mômen uốn cực đại ở trên cùng một tiết diện nên có thể tìm ứng suất nén lớn nhất theo một trong hai công thức sau:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_x^*|_{\max}}{W_x} + \frac{|Ny^*|_{\max}}{W_x(1-N/N_E)}. \quad (11.26)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_x^*|_{\max}}{W_x(1-N/N_E)}. \quad (11.27)$$

### 4. Điều kiện bền

Từ các công thức ứng suất ta thấy: khi tăng các tải trọng ngang và dọc trực lên  $n$  lần thì ứng suất tăng lớn hơn  $n$  lần. Do đó, không thể biểu thị điều kiện bền theo ứng suất cho phép, cần đưa hệ số an toàn vào tải trọng. Như vậy, từ (11.26) và (11.27) ta suy ra các điều kiện bền sau:

$$\frac{nN}{A} + \frac{n|M_x^*|_{\max}}{W_x} + \frac{nN|y^*|_{\max}}{W_x(1-nN/N_E)} \leq \sigma_o. \quad (11.28)$$

$$\frac{nN}{A} + \frac{n|M_x^*|_{\max}}{W_x(1-nN/N_E)} \leq \sigma_o. \quad (11.29)$$

Nếu đã biết các tải trọng và kích thước tiết diện thanh, từ các điều kiện (11.28) hoặc (11.29) ta có thể lập được phương trình bậc hai đối với  $n$  để đánh giá mức độ an toàn của bài toán.

**Chú ý:** Khi tính thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời, ngoài việc kiểm tra bền trong mặt phẳng chịu uốn ngang, cần kiểm tra ổn định ngoài mặt phẳng chịu uốn ngang.

**Ví dụ 11.3.** Tìm độ võng và mômen uốn lớn nhất trong dầm có liên kết ngàm ở hai đầu chịu tải trọng như trên hình 11.11.

Cho biết:  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$

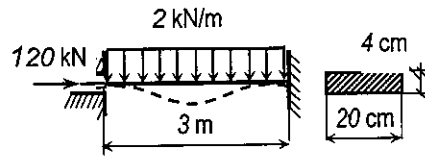
Độ cứng nhỏ nhất của dầm:  $EI_{min} = 2.10^4 \cdot 20.4^3 / 12 = 213,33 \text{ kN.cm}^2$

Lực Euler:  $N_E = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,5l)^2} = \frac{\pi^2 213,33 \cdot 10^4}{(0,5 \cdot 300)^2} = 935,785 \text{ kN}$ .

Tỷ số:  $N/N_E = 120 / 935,785 = 0,128$ .

Độ võng lớn nhất khi uốn ngang:

$$f^* = \frac{ql^4}{384EI_{min}} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 300^4}{384 \cdot 213,33 \cdot 10^4} = 0,198 \text{ cm}$$



Hình 11.11

Độ võng lớn nhất khi dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời:

$$f = \frac{f^*}{1 - N/N_E} = \frac{0,198}{1 - 0,128} = 0,227 \text{ cm}$$

Mômen uốn lớn nhất khi uốn ngang:

$$M^* = \frac{ql^2}{24} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 300^2}{24} = 75 \text{ kN.cm}$$

Mômen uốn lớn nhất khi dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời:

• theo (11.24):  $M = 75 + 120 \cdot 0,227 = 102,24 \text{ kN.cm}$   
(tăng 36,3% so với mômen chỉ do uốn ngang)

• theo (11.25):  $M = \frac{M^*}{1 - N/N_E} = \frac{75}{1 - 0,128} = 86,009 \text{ kN.cm}$

(tăng 14,7% so với mômen chỉ do uốn ngang)

## BÀI TẬP CHƯƠNG XI

**XI.1-XI.2.** Tìm lực tới hạn và ứng suất tới hạn cho các thanh thép Ct5 trên hình XI.1 - XI.3. Cho biết với thép Ct5, ta có:  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

- khi độ mảnh  $\lambda \geq 85$ : áp dụng công thức Euler;
- khi độ mảnh  $\lambda < 85$ : áp dụng công thức thực nghiệm;

$$\sigma_{th} = 46,40 - 0,362\lambda \text{ (kN/cm}^2\text{)}.$$



**XI.3.** Tìm lực tới hạn và ứng suất tới hạn cho thanh gỗ trên hình XI.3. Cho biết với gỗ, ta có:  $E = 1.10^3 \text{ kN/cm}^2$ .

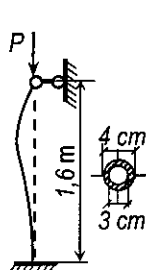
- khi độ mảnh  $\lambda \geq 70$ : áp dụng công thức Euler;
- khi độ mảnh  $\lambda < 70$ : áp dụng công thức thực nghiệm;

$$\sigma_{th} = 2,93 - 0,0194\lambda \text{ (kN/cm}^2\text{)}.$$

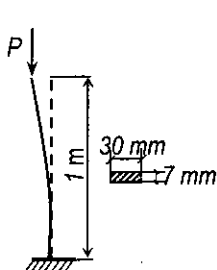
**XI.4.** [12]. Tìm lực tới hạn và ứng suất tới hạn cho thanh gang trên hình XI.4. Cho biết với gang, ta có:  $E = 1,2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

- khi độ mảnh  $\lambda \geq 80$ : áp dụng công thức Euler;
- khi độ mảnh  $\lambda < 80$ : áp dụng công thức thực nghiệm;

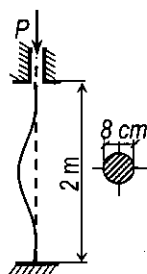
$$\sigma_{th} = 77,60 - 1,20\lambda + 0,0053\lambda^2 \text{ (kN/cm}^2\text{)}.$$



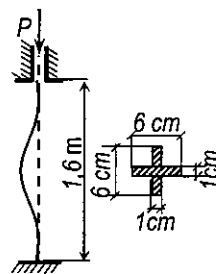
Hình XI.1



Hình XI.2



Hình XI.3

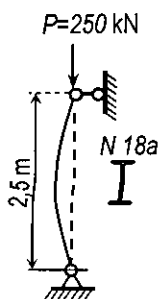


Hình XI.4

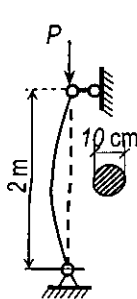
**XI.5.** Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, kiểm tra ổn định của thanh thép Ct3 như trên hình XI.5. Đối chiếu ứng suất trong thanh với ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

**XI.6.** [12]. Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định lực nén cho phép trên thanh gỗ thông (hình XI.6). Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$ .

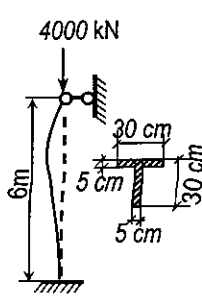
**XI.7.** Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định ứng suất nén trong thanh thép Ct5 (hình XI.7). Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2$ .



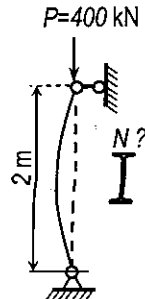
Hình XI.5



Hình XI.6



Hình XI.7



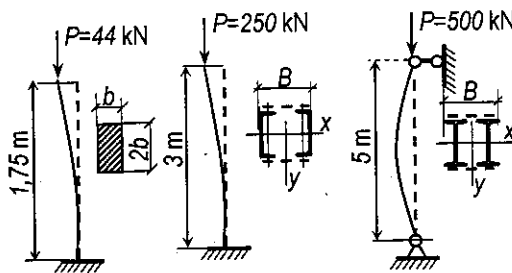
Hình XI.8

**XI.8.** [12]. Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định số hiệu tiết diện chữ I của thanh thép Ct3 (hình XI.8). Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

**XI.9.** [12]. Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định kích thước  $b$  của tiết diện chữ nhật của thanh gỗ (hình XI.9). Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$ .  $E = 1.10^3 \text{ kN/cm}^2$ .

**XI.10.** Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định số hiệu thép hình  $\square$  của thanh ghép Ct3 (hình XI.10). Tìm khoảng cách  $B$  để sao cho độ cứng theo hai phương  $x, y$  như nhau. Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

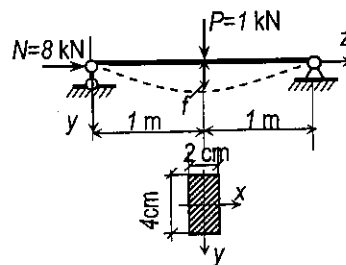
**XI.11.** Vận dụng cách tính theo Tiêu chuẩn kỹ thuật, xác định số hiệu thép hình I của thanh ghép Ct3 (hình XI.11). Tìm khoảng cách  $B$  để sao cho độ cứng theo hai phương  $x, y$  như nhau. Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình XI.9

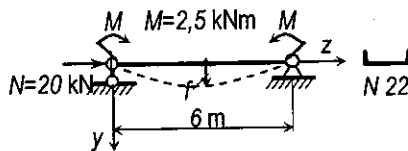
Hình XI.10

Hình XI.11

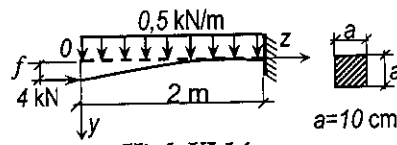


Hình XI.12

**XI.12.**[12] Cho dầm chịu uốn ngang trong mặt phẳng  $yz$  cùng uốn dọc đồng thời (hình XI.12). Xác định độ võng lớn nhất, ứng suất nén lớn nhất. Tìm hệ số an toàn khi uốn ngang trong mặt phẳng  $yz$  cùng uốn dọc đồng thời; hệ số an toàn về ổn định trong mặt phẳng  $xz$ . Cho biết ứng suất cho phép khi nén  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ ;  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình XI.13



Hình XI.14

**XI.13.**[12] Cho dầm chịu uốn ngang cùng uốn dọc đồng thời (hình XI.13). Xác định độ võng lớn nhất, ứng suất lớn nhất. Cho biết:  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

**XI.14.**[12] Cho dầm gỗ chịu uốn ngang cùng uốn dọc đồng thời (hình XI.14). Xác định độ võng lớn nhất, ứng suất lớn nhất.

Cho biết:  $E=2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

# 12

## CÁCH TÍNH THANH CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG

### 12.1. KHÁI NIỆM

#### 12.1.1. Tải trọng động

Trong các chương trên ta đã nghiên cứu các bài toán thanh chịu lực tác dụng tĩnh tức là tải trọng gia tăng một cách từ từ, không phát sinh hoặc gây ra không đáng kể các lực quán tính trong hệ.

Trường hợp tải trọng đặt vào hệ biến đổi nhanh theo thời gian sẽ gây ra gia tốc chuyển dịch của các phần tử, từ đó phát sinh lực quán tính tác dụng trên hệ. Đó là tác dụng động của tải trọng, hay còn gọi là *tải trọng động*. Xe chạy trên cầu gây ra sự dao động, dây cáp nâng hạ các vật nặng, búa đóng cọc... là các ví dụ về tải trọng động.

Dưới tác dụng của tải trọng động, ứng suất, biến dạng, chuyển vị trong hệ biến đổi theo thời gian. Trong quá trình biến đổi, các đại lượng nêu trên có những giá trị khác nhau. Trong kỹ thuật người ta ít quan tâm đến quá trình biến đổi mà thường chú ý thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng chịu tải trọng động cần tìm  $S_d$  với đại lượng tương ứng chịu tải trọng tác dụng tĩnh đã biết cách xác định  $S_t$  theo biểu thức sau:

$$S_d = K_d S_t. \quad (12.1)$$

trong đó  $K_d$  được gọi là *hệ số động*, đặc trưng cho hệ thanh và cách tác dụng của tải trọng động.

Khi tính hệ chịu tải trọng động ta chấp nhận các giả thiết sau:

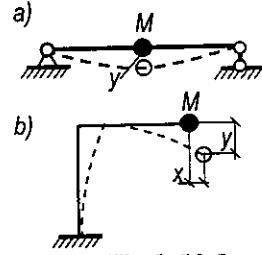
- \* Các tính chất về vật liệu của hệ như các hằng số đàn hồi, định luật Hooke... khi chịu tải trọng tĩnh và khi chịu tải trọng động như nhau.
- \* Khi tính hệ chịu tải trọng động ta cũng chấp nhận các giả thiết về biến dạng của hệ như giả thiết tiết diện phẳng... đã chấp nhận khi tính hệ chịu tải trọng tĩnh.

#### 12.1.2. Bậc tự do

*Bậc tự do của hệ khi dao động là số thông số hình học độc lập để xác định vị trí của hệ.*

Ví dụ: hệ trên hình 12.1a có một bậc tự do vì chỉ cần một thông số  $y$  là đủ để xác định vị trí của khối lượng  $M$ ; hệ trên hình 12.1b tuy chỉ mang một khối lượng nhưng có hai bậc tự do vì cần hai thông số  $x, y$  mới xác định được vị trí của  $M$ . Đối với dầm có khối lượng phân bố thì bậc tự do bằng vô cùng.

Khi giải các bài toán cân chú ý đến quan hệ tỷ lệ giữa khối lượng phân bố với khối lượng tập trung. Với hệ trên hình 12.1a ta có thể xem là có một bậc tự do nếu khối lượng tập trung  $M$  rất lớn so với khối lượng phân bố của dầm. Ngược lại, nếu khối lượng tập trung  $M$  không lớn so với khối lượng phân bố của dầm thì phải xem là hệ có vô số bậc tự do.



Hình 12.1

Trong khuôn khổ tài liệu này chỉ giới thiệu những khái niệm ban đầu về bài toán hệ chịu tải trọng động và cách giải một vài bài toán phổ biến trong thực tế là bài toán dao động và va chạm của hệ một bậc tự do, làm việc trong giới hạn đàn hồi, tuân theo định luật Hooke. Lời giải chính xác bài toán hệ có bậc tự do hữu hạn hoặc bằng vô cùng thường khá phức tạp (xem [11]) nên trong giáo trình này chỉ đề cập đến cách giải gần đúng, quy đổi về bài toán hệ một bậc tự do.

## 12.2. DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

### 12.2.1. Phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do

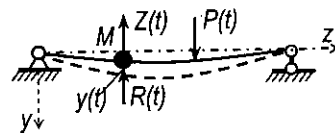
Xét hệ một bậc tự do như trên hình 12.2, chịu lực kích thích  $P(t)$  thay đổi theo thời gian. Sau khi chịu lực  $P(t)$ , tại thời điểm  $t$ , khối lượng  $M$  có chuyển vị  $y(t)$  tính từ trạng thái cân bằng ban đầu (đường liền nét trên hình 12.2) và gia tốc có độ lớn là  $d^2y/dt^2$ .

Trong quá trình dao động, tại khối lượng  $M$  phát sinh các lực:

- ◆ Lực quán tính  $Z(t)$  ngược chiều với chiều gia tốc, bằng khối lượng  $M$  nhân với gia tốc:

$$Z(t) = -M \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (12.2)$$

- ◆ Lực cản nhớt do ảnh hưởng của môi trường xung quanh, do liên kết. Lực cản được ký hiệu là  $R(t)$  có chiều ngược với chiều chuyển động, tỷ lệ với vận tốc  $dy/dt$  qua hệ số tỷ lệ  $\beta$ :



Hình 12.2

$$R(t) = \beta \frac{dy}{dt}. \quad (12.3)$$

Gọi:

$\delta_{11}$  – chuyển vị theo phương chuyển động tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực  $P=I$  đặt tại điểm đó gây ra;

$\delta_{1P}$  – chuyển vị theo phương chuyển động tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực  $P=I$  đặt tại vị trí lực kích thích gây ra.

Như vậy, nếu chú ý đến (12.2) và (12.3) ta có thể xác định chuyển vị tại thời điểm  $t$  của khối lượng  $M$  như sau:

$$y(t) = \delta_{1P}P(t) + \delta_{11}Z(t) - \delta_{11}R(t) = \delta_{1P}P(t) - \delta_{11}M \ddot{y}(t) - \delta_{11}\beta \dot{y}.$$

Chia cả hai vế cho tích  $M \cdot \delta_{11}$ , sau khi biến đổi ta được:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \omega^2 \delta_{1P}P(t). \quad (12.4)$$

trong đó: 
$$\omega^2 = \frac{1}{M\delta_{11}}; \quad 2\alpha = \frac{\beta}{M}. \quad (12.5)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của dao động đối với hệ có một bậc tự do. Tùy theo sự tồn tại hay không tồn tại của vế phải ta có bài toán dao động cưỡng bức hay dao động tự do.

### 12.2.1. Dao động tự do không lực cản của hệ một bậc tự do

Dao động tự do là dao động phát sinh do chuyển vị và tốc độ ban đầu của hệ. Điều kiện ban đầu được tạo ra do các xung lực tức thời làm cho hệ tách khỏi vị trí cân bằng. Như vậy, dao động tự do là dao động không có tải trọng động duy trì trên hệ.

Từ (12.4), phương trình vi phân của dao động tự do không cản có dạng:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \quad (12.6)$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t; \quad (12.7)$$

$A$  và  $B$  là các hằng số tích phân được xác định theo các điều kiện ban đầu.

Hay được viết dưới dạng:

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi); \quad (12.8)$$

trong đó:  $a$  – biên độ;

$\varphi$  – góc pha ban đầu;

$\omega$  – tần số góc của hệ.

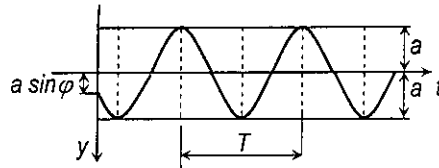
Các đại lượng này được xác định theo các điều kiện ban đầu. Gọi  $y_0$  và  $v_0$  là chuyển vị và vận tốc chuyển động tại thời điểm  $t=0$ , ta có:

$$1) y(0) = y_0; \quad 2) y'(0) = v_0;$$

Sau khi vận dụng các điều kiện ban đầu ta tìm được:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}};$$

và 
$$\varphi = \arctg \frac{y_0 \omega}{v_0}.$$



**Hình 12.3**

Đồ thị  $y(t)$  có dạng hình sin như trên hình 12.3.

Qua phương trình (12.8) và đồ thị trên hình (12.3) ta thấy:

\* Chuyển động là một dao động điều hòa tuần hoàn có biên độ  $a$  và chu kỳ (thời gian thực hiện một dao động):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{M \delta_{11}}. \quad (12.9)$$

\* Tần số góc  $\omega$  còn gọi là tần số dao động riêng là số dao động thực hiện trong  $2\pi$  đơn vị thời gian, có đơn vị là *Hertz* (1/s):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{P \delta_{11}}} = \sqrt{y_t}. \quad (12.10)$$

\* Tần số dao động hay tần số vòng là số dao động thực hiện trong một đơn vị thời gian (s), ký hiệu là  $f$ :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_t}} \quad (12.11)$$

### 12.2.3. Dao động tự do có lực cản của hệ một bậc tự do

Từ (12.4), phương trình vi phân của dao động tự do có lực cản có dạng:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \quad (12.12)$$

Trường hợp lực cản nhỏ  $\alpha < \omega$ , nghiệm có dạng:

$$y(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad (12.13)$$

trong đó:  $A$ ,  $\omega_1$ ,  $\varphi_1$  là các thông số biên độ, tần số góc, góc pha ban đầu của dao động tự do có lực cản.

Biểu thức tần số góc của dao động tự do có lực cản có dạng:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (12.14)$$

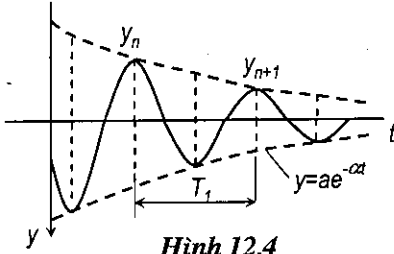
Khi lực cản không lớn, hệ dao động với tần số  $\omega_1$  thấp hơn so với tần số dao động tự do  $\omega$ . Đối với các kết cấu thông dụng không có thiết bị chống rung,  $\alpha$  thường rất bé so với  $\omega$  nên ta có thể lấy  $\omega_1 \approx \omega$ .

Các thông số biên độ  $A$  và góc pha ban đầu  $\varphi_1$  của dao động, được xác định theo các điều kiện ban đầu:

$$1) y(0) = y_0; \quad 2) \dot{y}(0) = v_0.$$

Sau khi vận dụng các điều kiện ban đầu ta tìm được:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \alpha y_0)^2}{\omega_1^2}}; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0} \quad (12.15)$$



Hình 12.4

Chu kỳ của dao động có lực cản:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}, \quad (\text{s}). \quad (12.16)$$

Tần số dao động có lực cản:

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi}, \quad (1/\text{s}). \quad (12.17)$$

Đồ thị của dao động như trên hình 12.4. Ta thấy dao động tắt dần theo thời gian; lực cản càng lớn thì mức độ tắt dần càng nhanh.

Để đánh giá mức độ tắt dần ta xét tỷ số giữa hai biên độ ở hai thời điểm cách nhau một chu kỳ  $T_1$ . Vì  $\sin(\omega_1 t + \varphi_1) = \sin[\omega_1(t + T_1) + \varphi_1]$  nên ta có:

$$\frac{y(t)}{y(t + T_1)} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t + T_1)}} = e^{\alpha T_1}$$

Tỷ số này là một hằng số nên từ đó ta suy ra:

$$\alpha T_1 = \ln \frac{y(t)}{y(t + T_1)} = \chi = \text{const}$$

$\chi$  – hệ số biểu thị tốc độ tắt dần, gọi là *độ giảm loga* của dao động. Thông qua giá trị tìm được bằng thực nghiệm của hệ số này [đo  $y(t)$  và  $y(t + T_1)$ ] ta có thể xác định được các đại lượng  $\alpha$  và  $\beta$ .

#### 12.2.4. Dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do

Ta xét một trường hợp đặc trưng cho dao động cưỡng bức: khi hệ chịu lực kích thích là hàm tuần hoàn theo thời gian với biên độ  $P$  tần số góc  $r$  được mô tả bằng  $P(t) = P \sin r t$ . Với các lực cưỡng bức bất kỳ ta có thể khai triển

theo chuỗi Fourier của các hàm lượng giác nên việc nghiên cứu với lực nêu trên vẫn mang tính chất đặc trưng chung.

Trong trường hợp này, từ (12.4) ta có phương trình vi phân:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \omega^2 \delta_{1P} P \sin rt. \quad (12.18)$$

Nghiệm của phương trình:  $y(t) = \bar{y}(t) + y^*(t)$  (12.19)

trong đó:

$\bar{y}(t)$  – nghiệm của phương trình không có vế phải tìm được theo (12.13):

$$\bar{y}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad (12.20)$$

$y^*(t)$  – nghiệm riêng của phương trình có vế phải, có dạng:

$$y^*(t) = C_1 \sin rt + C_2 \cos rt \quad (12.21)$$

trong đó  $C_1, C_2$  là các hằng số tích phân tìm được bằng cách thay (12.21) vào (12.18), sau khi đồng nhất hai vế ta được:

$$C_1 = -\frac{\omega^2 \delta_{1P} P (\omega^2 - r^2)}{(\omega^2 - r^2)^2 + 4\alpha^2 r^2}; \quad C_2 = -\frac{\omega^2 \delta_{1P} P \cdot 2\alpha r}{(\omega^2 - r^2)^2 + 4\alpha^2 r^2} \quad (12.22)$$

Nếu biểu thị  $y^*(t)$  dưới dạng tương tự như (12.8):

$$y^*(t) = B \sin(rt + \psi); \quad (12.23)$$

thì sau khi biến đổi, ta tìm được:

$$B = \frac{\omega^2 \delta_{1P} P}{\sqrt{(\omega^2 - r^2)^2 + 4r^2 \alpha^2}}; \quad \psi = -\arctg \frac{2r\alpha}{\omega^2 - r^2} \quad (12.24)$$

Như vậy, nghiệm toàn phần có dạng:

$$y(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(rt + \psi); \quad (12.25)$$

Ta thấy nghiệm bao gồm hai dạng dao động: số hạng thứ nhất thể hiện dao động tự do tắt dần; số hạng thứ hai thể hiện dao động cưỡng bức do lực kích thích gây ra. Sau một thời gian, dao động tự do sẽ mất đi, hệ sẽ dao động bình ổn theo tần số  $r$  của lực kích thích với biên độ:

$$B = \frac{\omega^2 \delta_{1P} P}{\sqrt{(\omega^2 - r^2)^2 + 4r^2 \alpha^2}} = \frac{\omega^2 \Delta_{1P}^*}{\sqrt{(\omega^2 - r^2)^2 + 4r^2 \alpha^2}}. \quad (12.26)$$

trong đó:  $\Delta_{1P}^*$  là chuyển vị theo phương chuyển động tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực  $P$  tác dụng tĩnh tại vị trí lực kích thích gây ra.

Nếu gọi  $K_d$  là hệ số động thì hệ số này sẽ đạt giá trị lớn nhất khi dao động đã bình ổn:



$$K_d = \frac{y_{\max}}{\Delta_{1P}^*} = \frac{B}{\Delta_{1P}^*} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2/\omega^2)^2 + 4\alpha^2 r^2/\omega^4}}. \quad (12.27)$$

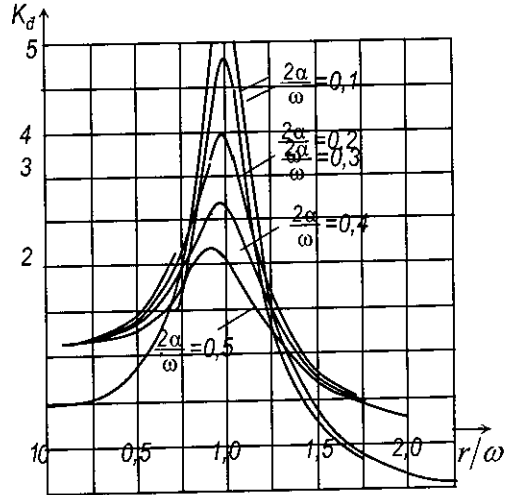
Hệ số động phụ thuộc các tỷ số  $r/\omega$  và  $\alpha/\omega$ . Trên hình 12.5 mô tả quan hệ giữa  $K_d$  với  $r/\omega$  và thông số  $2\alpha/\omega$ .

Khi  $r/\omega = 1$  tức là khi tần số của lực kích thích trùng với tần số dao động tự do của hệ và nếu không có lực cản thì  $K_d = \infty$  còn nếu có lực cản thì  $K_d$  có giá trị cực đại hữu hạn. Hiện tượng tăng biên độ một cách rõ rệt như trên gọi là *hiện tượng cộng hưởng*.

Ảnh hưởng của hiện tượng cộng hưởng thể hiện rõ rệt khi tỷ số  $r/\omega$  nằm trong miền sau:

$$0,75 < \frac{r}{\omega} < 1,25.$$

Trong kỹ thuật, khi tính với lực kích thích thay đổi tuần hoàn theo thời gian cần quan tâm đến hiện tượng cộng hưởng. Thường nên tăng tỷ số  $r/\omega$  vì tỷ số này càng lớn thì hệ số động càng nhỏ. Để thực hiện điều này cần giảm độ cứng của hệ hoặc tăng tần số của lực kích thích.



Hình 12.6

Khi tỷ số  $r/\omega$  nằm ngoài miền từ 0,5 đến 2, các đường cong  $K_d$  gần trùng với nhau nên có thể xem như không có lực cản tức là  $\alpha = 0$ , hệ số động có dạng:

$$K_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{r^2}{\omega^2} \right|}. \quad (12.28)$$

### 12.2.5. Trường hợp có xét đến khối lượng của hệ đàn hồi

Khi có xét đến khối lượng của hệ, bài toán sẽ khá phức tạp do đó trong kỹ thuật thường sử dụng các phương pháp gần đúng. Hiện có khá nhiều cách tính gần đúng (xem [11]). Dưới đây sẽ trình bày một cách tính đơn giản thực hiện bằng cách quy đổi các khối lượng phân bố về một khối lượng tập trung trên cơ sở tương đương về động năng.

Để minh họa ta xét một dầm đơn giản có chiều dài  $l$ , mang khối lượng phân bố  $m$ , như trên hình 12.7a. Ta cần quy đổi các khối lượng phân bố về khối lượng tập trung tại tiết diện có tọa độ  $a$  (hình 12.7b).

Giả thiết đường đàn hồi của hệ khi dao động có dạng:

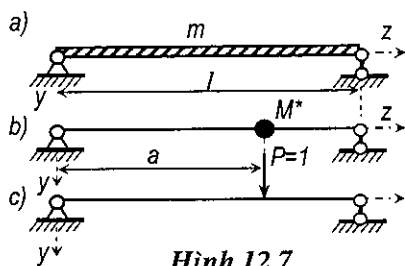
$$y(z,t) = y(z).T(t).$$

Suy ra vận tốc của chuyển động tại tiết diện bất kỳ có tọa độ  $z$ :

$$v(z,t) = \dot{y}(z,t) = y(z)\dot{T}(t)$$

Động năng của hệ mang khối lượng phân bố:

$$\int_0^l \frac{1}{2}mv^2 dz = \int_0^l \frac{1}{2}m [y(z).\dot{T}(t)]^2 dz.$$



Hình 12.7

Động năng của hệ mang khối lượng tập trung quy đổi tương đương  $M^*$ :

$$\frac{1}{2}M^*v_1^2 = \frac{1}{2}M^*[y(a).\dot{T}(t)]^2;$$

trong đó:  $y(a)$  chuyển vị tại vị trí mang khối lượng quy đổi.

Cân bằng (12.29) và (12.30) theo điều kiện tương đương và biến đổi, ta được:

$$M^* = \frac{1}{[y(a)]^2} \int_0^l m [y(z)]^2 dz. \quad (12.31)$$

Như vậy, để tìm được khối lượng quy đổi  $M^*$  ta cần:

- Chọn vị trí của khối lượng tập trung quy đổi, thường nên chọn tại tiết diện có chuyển vị lớn nhất trong hệ có khối lượng phân bố.
- Chọn hàm  $y(z)$ ; thường nên chọn theo dạng đường đàn hồi của hệ chịu tải trọng  $P=l$  đặt tại tiết diện mang khối lượng tập trung quy đổi.

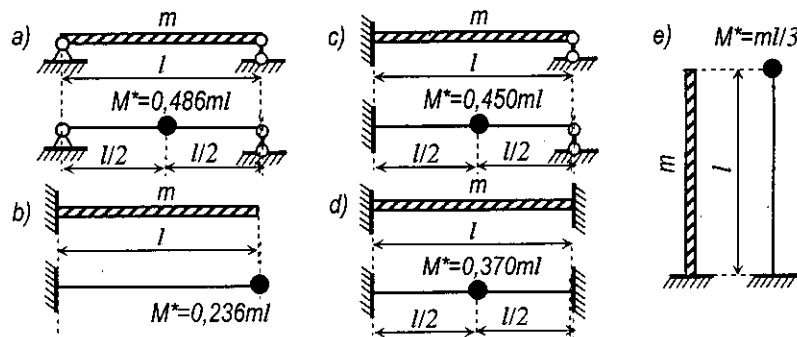
Trường hợp dầm đơn giản có chiều dài  $l$ , mang khối lượng phân bố  $m$ , (hình 12.7a), ta chọn vị trí của khối lượng  $M^*$  tại giữa nhịp, chọn hàm  $y(z)$  là đường đàn hồi của dầm khi chịu lực  $P=l$  đặt tại giữa nhịp:

$$y(z) = f \left[ \frac{3l^2z - 4z^3}{l^3} \right] \quad \text{với} \quad f = \frac{1.l^3}{48EI}.$$

Do đó:  $y(a) = f$ . Sau khi thay vào (12.31), ta được:

$$M^* = \frac{1}{f^2} \int_0^l m f^2 \frac{l}{l^6} [3l^2z - 4z^3]^2 dz = \frac{m}{l^2} \int_0^l \left( 9z^2 - \frac{24z^4}{l^2} + \frac{16z^6}{l^4} \right) dz = \frac{17}{35} ml$$

Như vậy, khối lượng tập trung quy đổi cần tìm là  $M^* = 17ml/35 = 0,486ml$ .

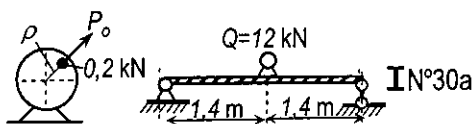


Hình 12.8

Trên hình 12.8 cung cấp các kết quả xác định khối lượng tập trung quy đổi  $M^*$  của một số thanh có liên kết khác nhau khi chuyển động có phương thẳng đứng.

**Ví dụ 12.1.** Một mô-tơ có trọng lượng 12 kN đặt trên dầm đơn giản có tiết diện hình  $IN^{\circ}30a$ , dài 2,8 m (Hình 12.9). Bỏ qua ảnh hưởng của lực cản, có xét đến trọng lượng phân bố của dầm. Yêu cầu xác định:

- Tần số dao động tự do.
- Ứng suất lớn nhất khi mô-tơ quay 1000 vòng/min và có lực ly tâm tạo ra bởi một khối lượng 0,2 kN đặt lệch tâm  $\rho = 0,3$  cm.



Hình 12.9

Theo Phụ lục, tiết diện hình  $IN^{\circ}30a$  có các số liệu như sau:

$$I_x = 7780 \text{ cm}^4; W_x = 518 \text{ cm}^3; \text{ trọng lượng trên } l \text{ m dài } q = 0,392 \text{ kN/m.}$$

Quy đổi khối lượng phân bố về khối lượng tập trung  $Q^*$  ở giữa nhịp:

$$Q^* = 0,486 ml = 0,486 \cdot 0,392 \cdot 2,8 = 0,533 \text{ kN.}$$

Độ võng tĩnh do các trọng lượng  $Q$  và  $Q^*$  gây ra tại giữa nhịp:

$$y_t = \frac{(Q + Q^*)l^3}{48EI_x} = \frac{(12 + 0,533)2,8^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 7780 \cdot 10^{-8}} = 3,684 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Theo (12.10), tần số góc: 
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_t}} = \sqrt{\frac{9,8}{3,684 \cdot 10^{-4}}} = 163,106 \text{ 1/s.}$$

Tần số góc của mô-tơ: 
$$r = \frac{2\pi \cdot 1000}{60} = 105 \text{ 1/s.}$$

Cường độ lực ly tâm:  $P_o = m r^2 \rho = \frac{0,2}{9,8} 105^2 \cdot 0,003 = 675 \text{ N}.$

Hệ số động, theo (12.28):  $K_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \frac{105^2}{163,106^2}\right|} = 1.708.$

Ứng suất pháp cực đại do lực  $P_o$  tác dụng tĩnh gây ra:

$$\sigma_t = \frac{P_o l}{4W_x} = \frac{675 \cdot 2,8}{4 \cdot 518} = 91,216 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất pháp cực đại do lực  $P_o$  tác dụng động gây ra:

$$\sigma_d = K_d \sigma_t = 1,708 \cdot 91,216 = 155,8 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất pháp do trọng lượng mô tơ và trọng lượng dầm:

$$\sigma = \frac{1}{W_x} \left[ \frac{Ql}{4} + \frac{ql^2}{8} \right] = \frac{1}{518} \left[ \frac{12000 \cdot 280}{4} + \frac{3,92 \cdot 280^2}{8} \right] = 1468,92 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất pháp tổng cộng cực đại:

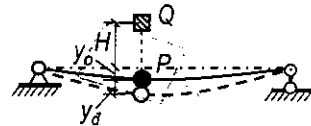
$$\sigma_{max} = 155,8 + 1468,9 = 1625 \text{ N/cm}^2.$$

### 12.3. VA CHẠM CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Trong giáo trình này chỉ đề cập đến bài toán va chạm của hệ một bậc tự do. Khi cần xét đến ảnh hưởng của khối lượng phân bố ta có thể áp dụng cách giải gần đúng như đã trình bày trong mục 12.2.5.

#### 12.3.1. Va chạm theo phương thẳng đứng

Xét dầm mang trọng lượng  $P$ , chịu va chạm bởi vật nặng  $Q$  rơi theo phương thẳng đứng từ độ cao  $H$ , tại vị trí trọng lượng  $P$  với vận tốc khi va chạm là  $v_o$  như trên hình 12.10.



Hình 12.10

Gọi  $y_o$  là chuyển vị tại tiết diện mang trọng lượng  $P$  khi chưa va chạm. Sau khi va chạm, ta giả thiết cả hai vật nặng  $P$  và  $Q$  cùng chuyển động xuống dưới, đạt đến giá trị lớn nhất là  $y_d$ , tiếp đó hệ dao động tự do tắt dần quanh vị trí cân bằng ban đầu. Gọi trạng thái 1 là trạng thái xảy ra khi vật  $Q$  chạm vào vật  $P$  và cả hai cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc  $v_i$ ; trạng thái 2 là trạng thái xảy ra khi chuyển vị của hai vật nặng đạt giá trị lớn nhất là  $y_d$ .

Để giải bài toán này ta sẽ vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng: Khi hệ chuyển từ trạng thái 1 đến trạng thái 2, nếu bỏ qua nhiệt năng và các năng lượng không hồi phục thì tổng biến thiên động năng  $\Delta K$  và biến thiên thế năng  $\Delta U$  của hệ đàn hồi bằng biến thiên của công  $\Delta T$  của ngoại lực phát sinh trong quá trình chuyển trạng thái:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta T. \quad (12.32)$$

\* Độ biến thiên động năng giữa hai trạng thái được xác định như sau:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Trạng thái 2 xảy ra khi chuyển vị của hai vật nặng đạt giá trị lớn nhất tức là ngừng chuyển động xuống phía dưới để chuyển động lên phía trên nên vận tốc  $v_2 = 0$ .

Gọi  $v_0$  là vận tốc của vật  $Q$  ngay trước khi va chạm. Theo định lý bảo toàn động lượng ta có: động lượng trước khi va chạm là  $Qv_0/g$  bằng động lượng sau khi va chạm là  $(Q+P)v_1/g$ :

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{(Q+P)}{g} v_1; \text{ suy ra: } v_1 = \frac{Q}{Q+P} v_0$$

$$\text{Do đó: } \Delta K = -\frac{Q+P}{2g} \left[ \frac{Q}{Q+P} v_0 \right]^2 = -\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_0^2. \quad (12.33)$$

Khi  $Q$  rơi tự do từ độ cao  $H$ , vận tốc  $v_0$  được xác định bằng:  $v_0 = \sqrt{2gH}$

\* Độ biến thiên thế năng giữa hai trạng thái:

Thế năng biến dạng đàn hồi được xác định như sau (xem [6]):

- Ở trạng thái 1: dưới tác dụng của lực tĩnh  $P$ , dầm có chuyển vị  $y_0$ , thế năng BDDH tương ứng bằng  $U_1 = P \cdot y_0/2$ . Nếu gọi  $\delta$  là chuyển vị do lực đơn vị đặt ở vật  $P$  theo phương của va chạm gây ra trong hệ thì  $y_0 = \delta P$ . Do đó:

$$U_1 = \frac{y_0^2}{2\delta}.$$

- Ở trạng thái 2: dầm có chuyển vị  $(y_0 + y_d)$ , tương tự như ở trạng thái 1, thế năng BDDH tương ứng bằng:

$$U_2 = \frac{(y_0 + y_d)^2}{2\delta}.$$

Do đó: 
$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{y_d^2 + 2y_0 y_d}{2\delta} \quad (12.34)$$

\* *Độ biến thiên về công* giữa hai trạng thái: được xác định bằng công của trọng lượng  $P+Q$  không đổi trên chuyển dời  $y_d$ :

$$\Delta T = (P+Q) \cdot y_d \quad (12.35)$$

Thay (12.33), (12.34) (12.35) vào (12.32) ta được:

$$-\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_0^2 + \frac{y_d^2 + 2y_0 y_d}{2\delta} = (P+Q) \cdot y_d$$

Suy ra: 
$$y_d^2 + 2y_0 y_d - 2\delta(P+Q)y_d = \frac{\delta Q}{g(1+P/Q)} v_0^2$$

Gọi  $y_t$  là chuyển vị tĩnh do trọng lượng  $Q$  gây ra, ta có:  $y_t = \delta Q$ . Sau khi biến đổi ta được phương trình bậc hai đối với  $y_d$ :

$$y_d^2 - 2y_0 y_d - \frac{y_t v_0^2}{g(1+P/Q)} = 0 \quad (12.36)$$

Nghiệm của phương trình:

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t v_0^2}{g(1+P/Q)}} \quad (12.37)$$

Thay  $v_0^2 = 2gH$  và lấy nghiệm dương đối với  $y_d$  ta được:

$$y_d = y_t \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{(1+P/Q)y_t}} \right] = K_d y_t \quad (12.38)$$

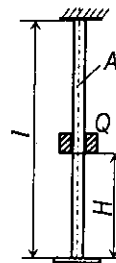
trong đó  $K_d$  là hệ số động khi va chạm theo phương thẳng đứng:

$$K_d = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{(1+P/Q)y_t}} \right] \quad (12.39)$$

Trường hợp  $H=0$ , tức là khi vật nặng  $Q$  được đặt đột ngột vào hệ với toàn bộ trọng lượng của nó thì  $K_d = 2$ .

**Ví dụ 12.2.** Xét hệ chịu va chạm dọc trục như trên hình 12.11.

Cho biết: trọng lượng vật rơi  $Q = 80 \text{ N}$ ; trọng lượng riêng của thanh  $\gamma = 8 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm}^3$ ;  $l = 2 \text{ m}$ ;  $A = 4 \text{ cm}^2$ ; ứng suất động cho phép:  $[\sigma_d] = 1 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$ ;  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .



Hình 12.11

Xác định chiều cao  $H$  tương ứng với hai trường hợp: có xét và không xét khối lượng của thanh.

Khi vật nặng  $Q$  tác dụng tĩnh, ứng suất pháp trong thanh bằng  $\sigma = Q/A = 80/4 = 20 \text{ N/cm}^2$ . Như vậy, hệ số động sẽ bằng  $K_d = [\sigma_d] / \sigma = 1.10^4 / 20 = 500$ .

• Khi có xét khối lượng thanh:

Quy đổi khối lượng thanh về khối lượng tập trung đặt tại đầu tự do: Từ số liệu cho trên hình 12.8, khối lượng quy đổi có trọng lượng

$$P^* = \frac{1}{3} \gamma A l = \frac{1}{3} 8.10^{-2} \cdot 4.200 = 21,33 \text{ N}$$

$$\text{Chuyển vị tĩnh } y_t: y_t = \frac{Ql}{EA} = \frac{80.200}{2.10^7 \cdot 4} = 2.10^{-4} \text{ cm}$$

Thay các số liệu vào công thức (12.39) với chú ý là  $P$  được thay bằng  $P^*$ , ta được điều kiện:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{(1 + 21.33/80)2.10^{-4}}} = 1 + \sqrt{1 + 0,7895.10^4 H} = 500$$

$$\text{Suy ra: } H = \frac{(499^2 - 1)}{0,7895.10^4} = 31,5 \text{ cm.}$$

• Khi không xét khối lượng thanh:

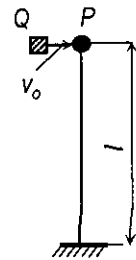
Trong trường hợp này  $P^* = 0$  nên theo (12.39), điều kiện của bài toán trở thành:  $K_d = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}} \right] = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{2.10^{-4}}} = 500$ .

$$\text{Suy ra: } H = (499^2 - 1).10^{-4} = 24,9 \text{ cm.}$$

### 12.3.1. Va chạm theo phương nằm ngang

Xét hệ mang trọng lượng  $P$ , chịu va chạm bởi vật nặng  $Q$  chuyển động theo phương nằm ngang tại vị trí trọng lượng  $P$  với vận tốc khi va chạm là  $v_0$  như trên hình 12.12.

Khi chưa va chạm tiết diện mang trọng lượng  $P$  không có chuyển vị theo phương ngang. Sau khi va chạm, ta giả thiết cả hai vật nặng  $P$  và  $Q$  cùng chuyển động sang bên phải, đạt đến giá trị lớn nhất là  $y_d$ , tiếp đó hệ dao động tự do tắt dần quanh vị trí cân bằng ban đầu.



Hình 12.12

Gọi trạng thái 1 là trạng thái xảy ra khi vật  $Q$  chạm vào vật  $P$  và cả hai cùng chuyển động sang bên phải với vận tốc  $v_1$ ; trạng thái 2 là trạng thái xảy ra khi chuyển vị của hai vật nặng đạt giá trị lớn nhất là  $y_d$ .

Để tìm  $y_d$  ta cũng thực hiện các bước tương tự như trong bài toán va chạm theo phương thẳng đứng. Trong trường hợp này, ta có:

Công thức liên hệ giữa vận tốc sau khi va chạm và vận tốc trước khi va chạm:  $v_1 = \frac{Q}{Q+P} v_0$

\* Độ biến thiên động năng:  $\Delta K = -\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_0^2$ .

\* Độ biến thiên thế năng giữa hai trạng thái:

• Ở trạng thái 1: hệ chưa có chuyển vị ngang theo phương va chạm nên:  $U_1 = 0$ .

• Ở trạng thái 2: dầm chỉ có chuyển vị  $y_d$  nên:  $U_2 = y_d^2 / 2\delta$ .

Do đó:  $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{y_d^2}{2\delta}$ .

\* Độ biến thiên về công của ngoại lực giữa hai trạng thái: vì chuyển vị của hệ vuông góc với phương của lực  $P$  và  $Q$  nên:  $\Delta T = 0$ .

Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng cho trường hợp này, ta có:

$$-\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_0^2 + \frac{y_d^2}{2\delta} = 0.$$

Gọi  $y_t$  là chuyển vị tĩnh do trọng lượng  $Q$  gây ra, ta có:  $y_t = \delta Q$ . Sau khi biến đổi ta được phương trình xác định  $y_d$ :

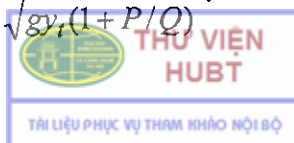
$$y_d^2 - \frac{y_t^2 v_0^2}{gy_t(1+P/Q)} = 0$$

Nghiệm dương của phương trình:

$$y_d = \frac{v_0}{\sqrt{gy_t(1+P/Q)}} y_t = K_d y_t$$

Như vậy, hệ số động của bài toán va chạm theo phương ngang có dạng:

$$K_d = \frac{v_0}{\sqrt{gy_t(1+P/Q)}} \quad (12.40)$$





*Nhận xét:* Qua các công thức xác định hệ số động khi va chạm theo phương thẳng đứng và theo phương nằm ngang ta thấy: để giảm hệ số động ta có thể:

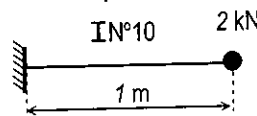
- tăng khối lượng đặt sẵn  $P$ , biện pháp này làm tăng trị số nội lực ban đầu
- giảm độ cứng của hệ để gia tăng chuyển vị  $y_i$ ; cũng có thể đặt các tấm đệm hoặc lò xo tại tiết diện chịu va chạm hoặc tại gối tựa.

## BÀI TẬP CHƯƠNG XII

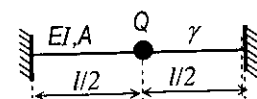
**XII.1.** Tìm chu kỳ dao động tự do của hệ trên hình 12.1 khi không xét và khi có xét đến khối lượng của dầm. Cho biết:  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

**XII.2.**[12]. Tìm chu kỳ dao động tự do của hệ trên hình 12.2 theo các số liệu cho biết:  $Q; \gamma; A; l; E; I$  khi có xét đến khối lượng của dầm.

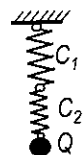
**XII.3.** [4]. Tìm tần số góc và chu kỳ dao động tự do của hệ bao gồm hai lò xo ghép nối tiếp có độ cứng  $C_1$  và  $C_2$  mang khối lượng  $Q$  như trên hình 12.3. Cho biết các số liệu:  $Q; \gamma; A; l; E; I$ .



Hình XII.1

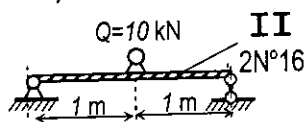


Hình XII.2

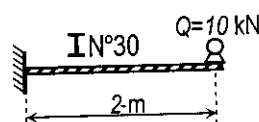


Hình XII.3

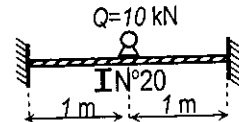
**XII.4 - XII.6.** Tìm tần số góc của hệ trên các hình XII.4 - XII.6 khi dao động tự do và ứng suất pháp lớn nhất khi mô-tơ có trọng lượng 10 kN quay 1000 vòng/min và có lực ly tâm tạo ra bởi một khối lượng 0,2 kN đặt lệch tâm với  $\rho = 0,3 \text{ cm}$ . Có xét đến trọng lượng phân bố của dầm.



Hình 12.4



Hình 12.5

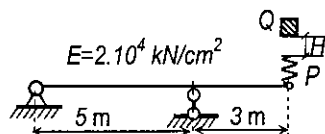


Hình 12.6

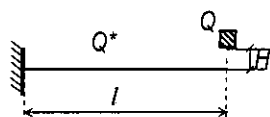
**XII.7.** [2]. Một trọng lượng  $Q = 200 \text{ N}$  rơi từ độ cao  $H = 4 \text{ cm}$  xuống đầu tự do của dầm thép I N°22a như trên hình XII.7. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng dầm. Tìm ứng suất lớn nhất tương ứng với:

- Khi trên dầm không đặt lò xo.
- Khi trên dầm có đặt lò xo có độ cứng bằng 0,1 mm/N. Cho biết trọng lượng của lò xo cùng các liên kết giữ là  $P = 200 \text{ N}$ .

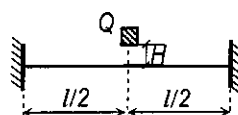
**XII.8.** [12]. Một trọng lượng  $Q$  rơi từ độ cao  $H = 5$  cm xuống đầu tự do của dầm thép như trên hình XII.8. Dầm thép có: chiều dài  $l = 1$  m; trọng lượng  $Q^* = 250$  kN;  $I_x = 2000$  cm<sup>4</sup>;  $W_x = 200$  cm<sup>3</sup>;  $E = 2 \cdot 10^7$  N/cm<sup>2</sup>;  $[\sigma_d] = 12$  kN/cm<sup>2</sup>. Tìm giá trị cho phép của trọng lượng  $Q$  cho hai trường hợp: có xét và không xét trọng lượng dầm.



Hình XII.7



Hình XII.8

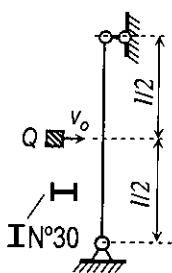


Hình XII.9

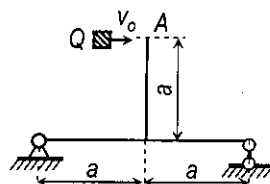
**XII.9.** [12]. Một trọng lượng  $Q$  rơi từ độ cao  $H$  xuống tiết diện giữa của dầm thép như trên hình XII.9. Cho biết các số liệu của dầm: chiều dài  $l$ ;  $I_x$ ;  $W_x$ ;  $E$ ;  $[\sigma_d]$ . Tìm giá trị cho phép của độ cao  $H$  khi bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng dầm và hệ số động được xác định gần đúng theo công thức sau:  $K_d = \sqrt{v_o^2 / (g\delta)}$  với  $v_o$  là vận tốc của vật  $Q$  ngay trước khi va chạm;  $\delta$  là độ võng tĩnh do lực  $Q$  gây ra tại giữa nhịp.

**XII.10.** [3]. Xác định hệ số động của dầm thép **IN<sup>o</sup>14** (hình XII.10) chịu va chạm theo phương ngang bởi khối lượng có trọng lượng  $Q = 100$  N chuyển động với vận tốc  $v_o = 20$  km/h khi không xét và khi có xét ảnh hưởng của trọng lượng dầm.

**XII.11.** [12]. Một trọng lượng  $Q$  chuyển dịch theo phương ngang với vận tốc trước khi va chạm vào đầu tự do A của hệ trên hình XII.11. Cho biết các số liệu:  $Q$ ;  $a$ ;  $v_o$ ;  $I_x$ ;  $E$ ;  $g$ . Tìm chuyển vị động theo phương ngang tại tiết diện A khi bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng hệ.



Hình XII.10



Hình XII.11

Hệ số động được xác định gần đúng theo công thức:  $K_d = \sqrt{v_o^2 / (g\delta)}$  với  $\delta$  là chuyển vị tĩnh theo phương ngang do lực  $Q$  gây ra tại A.

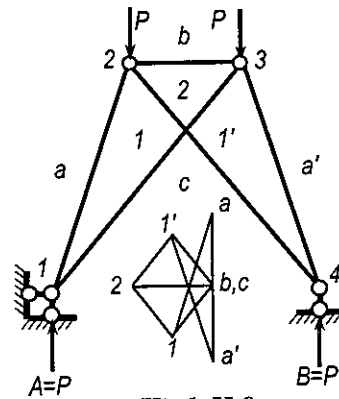
# ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

## Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng

- I.1 - I.10. 1. BHTT. 2. BBH. 3. BHTT. 4. BBH. 5. BBH.  
6. BBH 7. BHTT. 8. BHTT. 9. BBH. 10. BBH.

## Chương 2. Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

- II.1.  $N_{ab} = P / \sin \alpha$ ;  $N_{cd} = 0$ .  
 II.2.  $N_{ab} = -P / \sin \alpha$ ;  $N_{cd} = P / \tan \alpha$ .  
 II.3.  $N_{ab} = N_{cd} = 2P$ .  
 II.4.  $N_{ab} = -P / 2$ ;  $N_{cd} = -P$ .  
 II.5.  $N_{ab} = -20\sqrt{13} / 13$  kN;  $N_{cd} = 120$  kN.  
 II.6.  $N_{ab} = 0$ ;  $N_{ac} = 23,6$  kN;  $N_{de} = 28$  kN.  
 II.7.  $N_1 = -N_2 = P\sqrt{2} / 2$ .  
 II.8.  $N_{ab} = -1,5P$ ;  $N_{bc} = P$ ;  
 $N_{ac} = 2,24P$ ;  $N_{ae} = -2,24P$ .



Hình II.9

II.9. Giảm đồ nội lực tìm được như trên hình II.9.

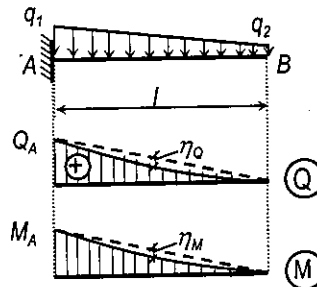
II.10. Biểu đồ nội lực như trên hình II.10, trong đó:

$$Q_A = (q_1 + q_2)l / 2;$$

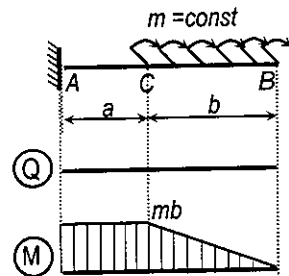
$$\eta_Q = (q_1 - q_2)l / 8;$$

$$M_A = (2q_1 + q_2)l^2 / 6;$$

$$\eta_M = (q_1 - q_2)l^2 / 16;$$



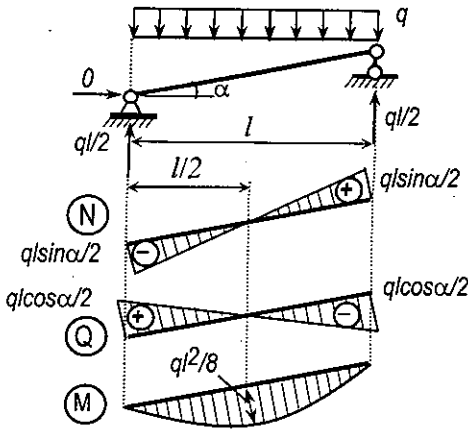
Hình II.10



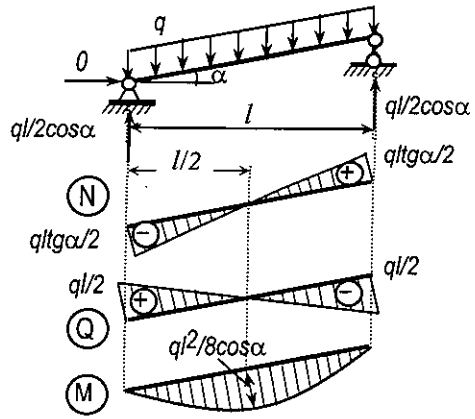
Hình II.11

II.11. Biểu đồ nội lực như trên hình II.11.

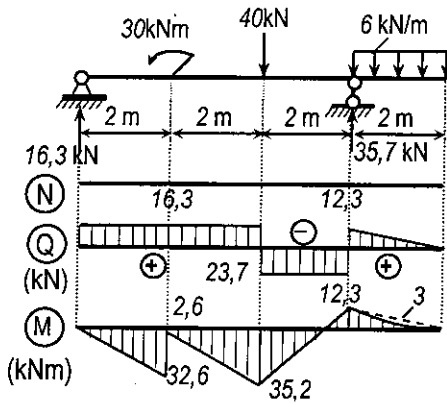
II.12 - II.15. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình II.12 và II.15.



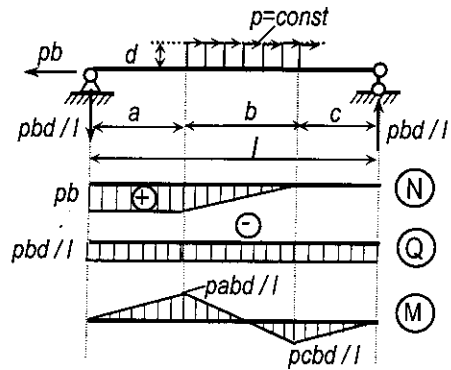
Hình II.12



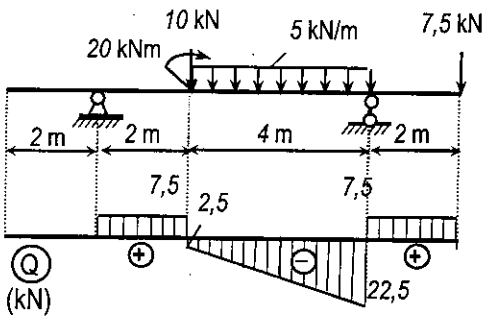
Hình II.13



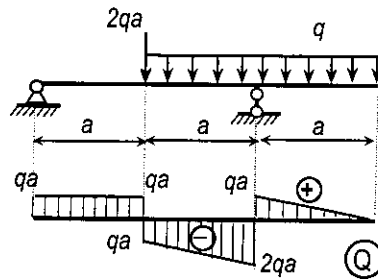
Hình II.14



Hình II.15



Hình II.16

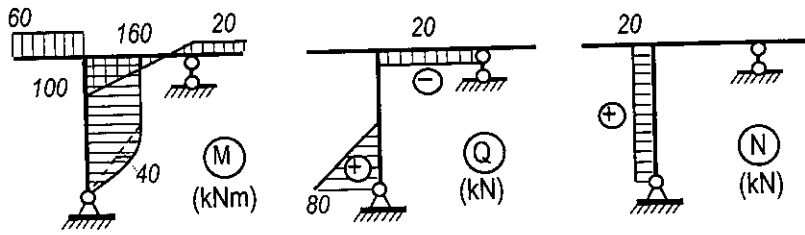


Hình II.17

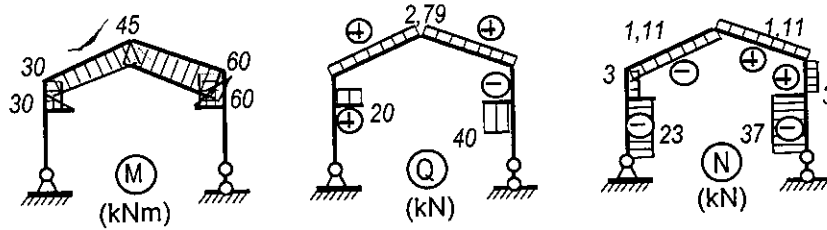
II.16 - II.17. Sơ đồ tải trọng và biểu đồ lực cắt tìm được như trên các hình II.16 và II.17.

II.18 - II.21. Các biểu đồ mômen uốn, lực cắt, lực dọc tìm được như trên các hình II.18 - II.21.

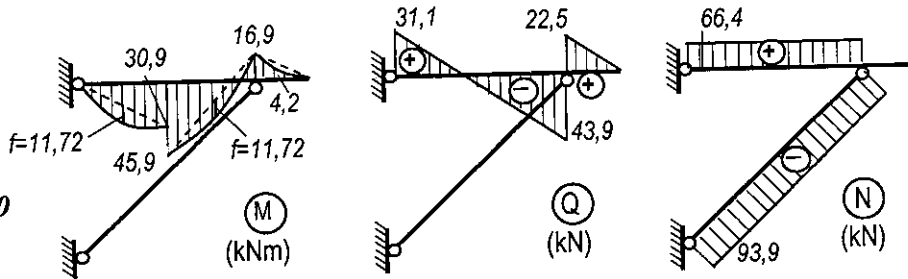
Hình II.18



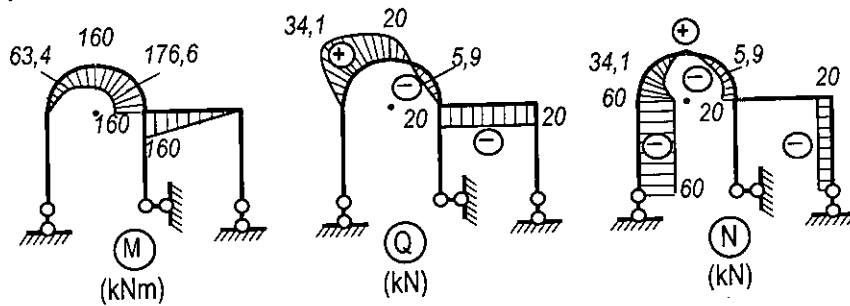
Hình II.19



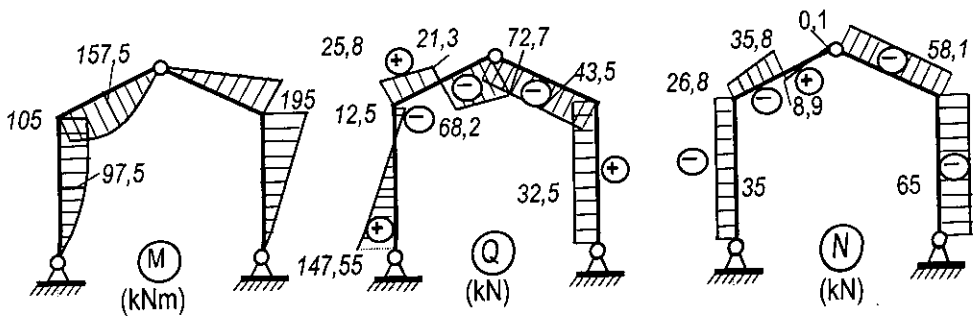
Hình II.20



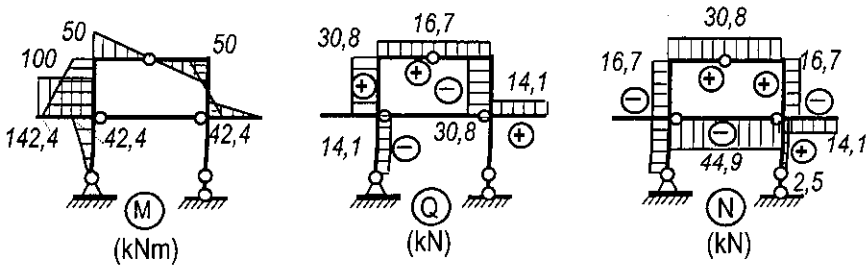
Hình II.21



II.22 - II.23. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình II.22 và II.23.



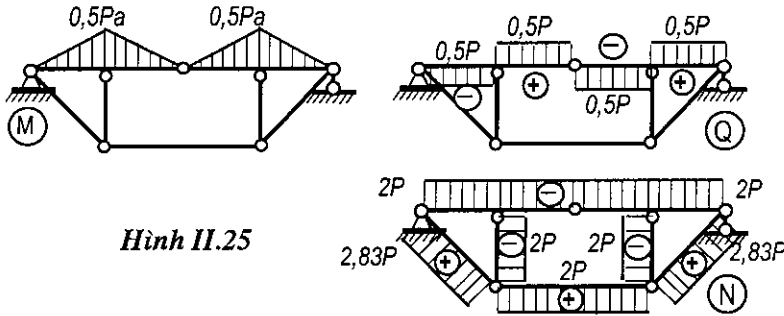
Hình II.22



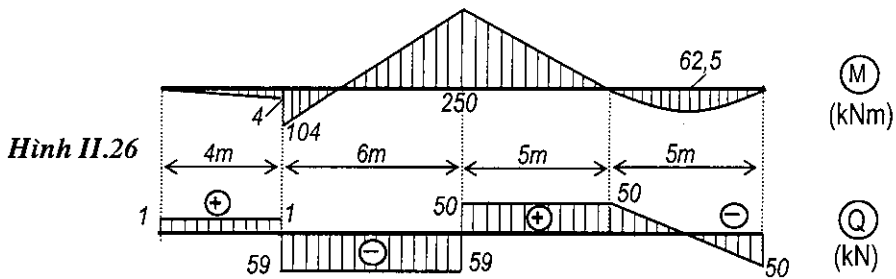
Hình II.23

II.24.  $N_a = 51,4 \text{ kN}$ ;  $N_b = 122,8 \text{ kN}$ ;  $N_c = -106,2 \text{ kN}$ ;  $N_d = -51,4 \text{ kN}$ ;  
 $N_e = 76,4 \text{ kN}$ .

II.25. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình II.25.

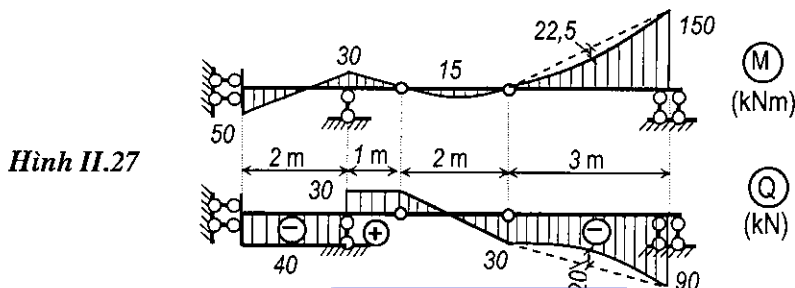


Hình II.25



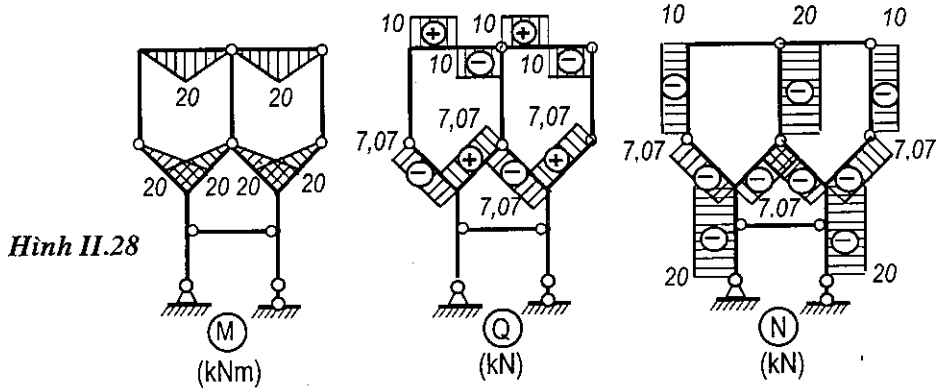
Hình II.26

II.26 - II.27. Các biểu đồ nội lực như trên các hình tương ứng.

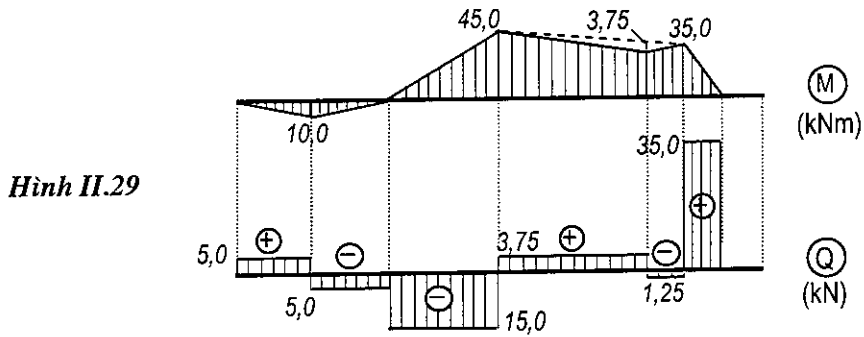


Hình II.27

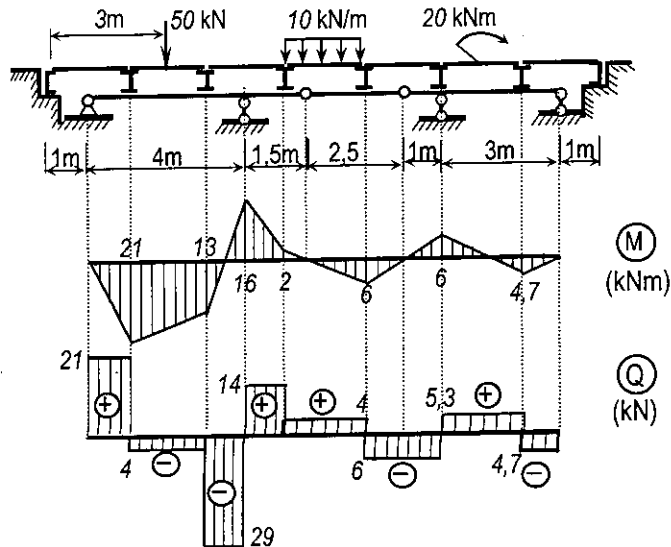
II.28. Biểu đồ nội lực tìm được như trên hình II.28.



II.29- II.30. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình tương ứng.



Hình II.30



### Chương 3. Cách tính thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm

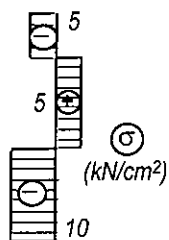
III.1. Hình III.1.  $\Delta l = 0,15$  mm.

III.2. Hình III.2.  $\Delta l = -0,75$  mm.

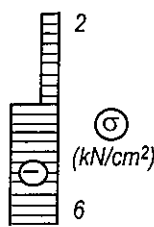
III.3. Hình III.3.  $\Delta l = 0,94$  mm.

III.4. Hình III.4.  $\Delta l = 0,53$  mm.

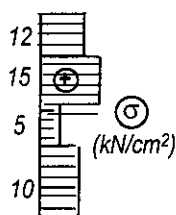
III.5. Hình III.5.  $\Delta l = 1$  mm.



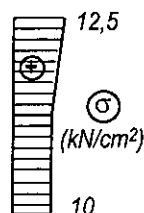
Hình III.1



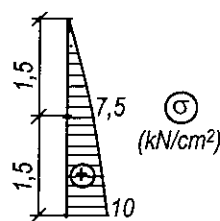
Hình III.2



Hình III.3



Hình III.4



Hình III.5

III.6.  $\Delta l = -4Pl / E\pi d^2$ ;  $\Delta d = 4\mu Pl / E\pi d^2$ .

III.7.  $\Delta l = Pl / Eab$ ;  $\Delta a = -\mu Pl / Eb$ ;  $\Delta b = -\mu Pl / Ea$ ;

III.8.  $\varepsilon = -5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\Delta a = 0,003$  mm.

III.9.  $P \leq 62,46$  kN;  $\Delta l_{AB} = 0,457$  mm;  $\Delta l_{AC} = 1,4$  mm.

III.10.  $N_{AB} = 54,64$  kN;  $N_{AC} = -66,92$  kN;  $\sigma_{AB} = 11,13$  kN/cm<sup>2</sup> <  $[\sigma]_k$  (đạt);

$D = 4,57$  cm;  $d = 3,51$  cm.

III.11.  $d \geq 2,973$  cm  $\approx 3$  cm.

III.12.  $y_B = 1,5$  mm;  $y_C = 0,875$  mm.

III.13.  $y_B = 1,25$  mm (hướng xuống);  $y_C = 5$  mm (hướng lên);  $\varphi = 07' 10''$  (thuận chiều kim đồng hồ).

III.14.  $x = 1,33$  m.

III.15.  $\sigma_1 = P/A_1$ ;  $\sigma_2 = 3P/2A_1$ ;  $x_C = -3Pa/2EA_1$  (hướng sang trái);  $y_C = 3Pa/EA_1$  (hướng xuống).

III.16.  $A_1 = A_2 = A_3 = P / [\sigma]$ .

III.17.  $A \geq 5$  cm<sup>2</sup>.

III.18.  $A \geq 3,943$  cm<sup>2</sup>.

III.19.  $P \leq 45,255$  kN.

III.20.  $P \leq 7,5$  kN.



## Chương 4. Cách tính thanh chịu cắt, chịu xoắn thuần túy

IV.1.  $d_o \approx 1,59$  cm;  $d \approx 1,35$  cm;  $\delta \approx 0,74$  cm;  $b \approx 1,35$  cm.

IV.2.  $d = 4$  cm;  $d_1 = 5,6$  cm;  $d_2 \approx 6,9$  cm;  $t_1 \approx 2$  cm;  $t_2 \approx 1,4$  cm.

IV.3.  $d \approx 3,57$  cm;  $\delta \approx 2,1$  cm;  $b \approx 21,4$  cm;  $l \approx 13,1$  cm.

IV.4.  $P = 16,8$  kN.

IV.5.  $P = 42$  kN.

IV.6. a)  $\tau_{max} = 3,91$  kN/cm<sup>2</sup>.  $\phi_c = 0,0122$  rad (thuận chiều kim đồng hồ).

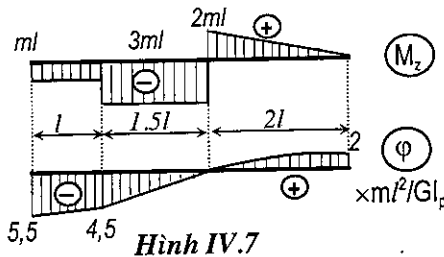
b)  $\tau_{max} = 4,49$  kN/cm<sup>2</sup>.  $\phi_c = 0,0140$  rad (thuận chiều kim đồng hồ).

IV.7. Các biểu đồ mômen xoắn và góc xoắn như trên hình IV.7.

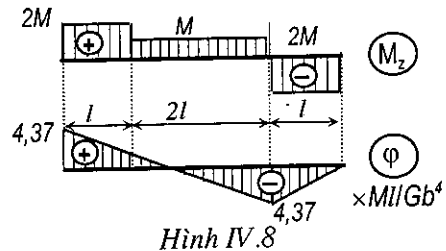
$$\tau_{max} = 15,28 \text{ ml/d}^3.$$

IV.8. Các biểu đồ mômen xoắn và góc xoắn như trên hình IV.8.

$$\tau_{max} = 4,065 \text{ Mlb}^3.$$



Hình IV.7



Hình IV.8

IV.9. Biểu đồ mômen xoắn như trên hình IV.9.

Góc xoắn tương đối giữa hai đầu khoan:  $0,1016$  rad  $\approx 5^\circ 49'$ .

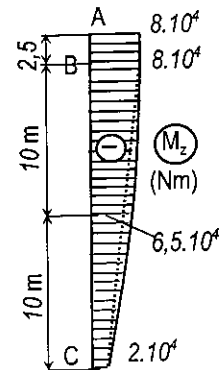
IV.10.  $d = 4,06$  cm.

IV.11.  $M = 216$  kN.cm.

IV.12.  $M \leq 70$  kN.cm;  $\phi_A = 0,18^\circ$ .

IV.13.  $M_1 = 35,653$  kNcm;  $\tau_{max} = 7,58$  kN/cm<sup>2</sup> (trên đoạn AB).

IV.14.  $P = 80$  kN;  $\delta_C = 0,5$  cm (hướng xuống);  $\delta_E = 2,4$  cm (hướng xuống).



Hình IV.9

## Chương 5. Cách tính thanh chịu uốn phẳng

V.1. Tọa độ trọng tâm cách mép trên của tiết diện  $12,5$  cm. Mômen quán tính chính trung tâm  $I_x = 5312,5$  cm<sup>4</sup>;  $I_y = 1562,5$  cm<sup>4</sup>.

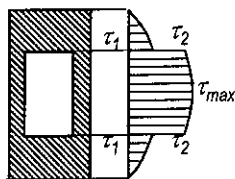
V.2. Tọa độ trọng tâm cách mép trên của tiết diện  $7,414$  cm. Mômen quán tính chính trung tâm  $I_x = 2098,8$  cm<sup>4</sup>;  $I_y = 1134,67$  cm<sup>4</sup>.

V.3. Tọa độ trọng tâm ở chính giữa tiết diện. Mômen quán tính chính trung tâm  $I_x = 12,40 a^4$ ;  $I_y = 11,9 a^4$ .

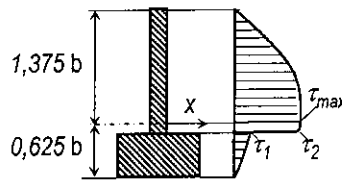
V.4. Tọa độ trọng tâm ở chính giữa tiết diện. Mômen quán tính chính trung tâm  $I_x = I_y = 4043,27 cm^4$ .

V.5. Tọa độ trọng tâm cách mép trên của tiết diện 4,313 cm. Mômen quán tính chính trung tâm  $I_x = 6382,5 cm^4$ ;  $I_y = 388,89 cm^4$ .

V.6. Kết quả như trên hình V.6:  $\tau_{max} = \tau_o = 0,6552 Q/b^2$ ;  $\tau_1 = 0,353 \tau_o$ ;  
 $\tau_2 = 0,882 \tau_o$ .



Hình V.6



Hình V.7

V.7. Kết quả như trên hình

V.7:

$$\tau_{max} = \tau_o = 3,7188 Q/b^2$$

$$= 0,198 \tau_o$$

$$\tau_2 = 0,992 \tau_o$$

V.8.  $M_{max} = 50 \text{ kNm}$ ;  $\sigma_{max} = 0,201 \text{ kN/cm}^2 \approx [\sigma] = 0,20 \text{ kN/cm}^2$

V.9.  $|M|_{max} = 9 \text{ kNm}$ ;  $Q_{max} = 9 \text{ kN}$ ;  $\sigma_{kéo} = 2,876 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{nén} = 6,863 \text{ kN/cm}^2$   $\tau_{max} = 0,4352 \text{ kN/cm}^2$ .

V.10. Thực hiện các phép kiểm tra sau:

- Kiểm tra phân tố chỉ chịu ứng suất pháp: tại giữa dầm  $M_{max} = 45 \text{ kNm}$ ;

$$\text{Theo (5.41): } \sigma_{max} = M_{max} / W_x = 45 \cdot 10^2 / 743 = 6,06 < [\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2.$$

- Kiểm tra phân tố chỉ chịu ứng suất tiếp: tại tiết diện A; D:  $Q_{max} = 210 \text{ kN}$ . Theo (5.34) và (5.42):  $\tau_{max} = 8,85 \text{ kN/cm}^2 > [\tau] = 8,66 \text{ kN/cm}^2$  (vượt quá 2,2% nên được xem là đạt).

- Kiểm tra phân tố có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương đối lớn: tại phân tố tiếp giáp giữa bản bụng và bản cánh, trên tiết diện B; C ta có  $M_x = 41,8 \text{ kN/cm}^2$ ;  $Q_y = 208 \text{ kN}$ . Kết quả tính ứng suất:  $\sigma_1 = 5,24 \text{ kN/cm}^2$ ;

$$\tau_1 = 6,58 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\text{Theo (5.44): } \sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 12,54 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]; \text{ (đạt)}$$

V.11.  $b = 2 \text{ cm}$ .

V.12.  $d \approx 10 \text{ cm}$ .

V.13.  $b = 8,275 \text{ cm}$ ;  $\tau_{max} = 0,08 \text{ kN/cm}^2$ .

V.14. Mômen uốn có giá trị lớn nhất tại tiết diện có hoành độ cách gối trái là  $z = 2,5667 \text{ m}$ ;  $b = 16,14 \text{ cm}$ ;  $\tau_{max} = 5,6 \text{ kN/cm}^2$ .

V.15. 2 C30;  $\tau_{max} = 1,19 \text{ kN/cm}^2$ .

V.16.  $M = 960 \text{ kN.cm}$ .

V.17.  $P = 14,48 \text{ kN}$ .

V.18. Trọng tâm tiết diện cách mép trên  $8,28 \text{ cm}$ ;  $l = 3 \text{ m}$ ;  $\tau_{\max} = 0,6 \text{ kN/cm}^2$  (đạt);  
 $\sigma_{\text{td}} = 3 \text{ kN/cm}^2$  (đạt).

### Chương 6. Cách tính thanh chịu lực kết hợp

VI.1. Tiết diện nguy hiểm xảy ra ở ngàm:  $\sigma_{\max} = 0,95 \text{ kN/cm}^2$ ; đường trung hòa đi qua trọng tâm với góc nghiêng  $\beta = 61^\circ 38'$ .

VI.2. Tiết diện nguy hiểm xảy ra ở ngàm:  $\sigma_{\max} = 10,47 \text{ kN/cm}^2$ ; đường trung hòa đi qua trọng tâm với góc nghiêng  $\beta = 84^\circ 25'$ .

VI.3.  $P = 92,22 \text{ kN}$ ; đường trung hòa đi qua trọng tâm với góc nghiêng  $\beta = 73^\circ 26'$ .

VI.4. Đường trung hòa đi qua trọng tâm với góc nghiêng  $\beta = 26^\circ 47'$ . Tọa độ điểm nguy hiểm  $x_k = 1,8624a$ ;  $y_k = -3,571a$ ;  $P = 44,94 [\sigma] a^3/l$ .

VI.5.  $b \approx 18 \text{ cm}$ ;  $h \approx 24 \text{ cm}$ . đường trung hòa đi qua trọng tâm với góc nghiêng  $\beta = 36^\circ 15'$ .

VI.6. Hai thép hình  $[24a$ ;  $\sigma_{\max} = 16,04 \text{ kN/cm}^2$  (vượt quá  $[\sigma]$   $0,25\%$ ). Đường trung hòa đi qua hai điểm:  $M(x=0; y=0,73 \text{ cm})$  và  $N(x=1,69 \text{ cm}; y=0)$ .

VI.7.  $\sigma_{\max} = 4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{\min} = -8 \text{ kN/cm}^2$ . Đường trung hòa đi qua hai điểm:  $M(x=-1,33 \text{ cm}; y=0)$  và  $N(x=0; y=0,267 \text{ cm})$ .

VI.8.  $\sigma_{\max} = -0,313 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{\min} = -1,737 \text{ kN/cm}^2$ . Đường trung hòa vuông góc với trục  $y$  cách đường  $ab$  theo chiều dương của trục  $y$  là  $21,948 \text{ cm}$ .

VI.9.  $\sigma_{\max} = 0$ ;  $\sigma_{\min} = -0,4 \text{ kN/cm}^2$ . Đường trung hòa song song với trục  $y$  có hoành độ  $x = 15 \text{ cm}$ .

VI.10. Lỗ là hình tròn đồng tâm với hình tròn rỗng, bán kính  $R_{\text{lỗ}} = R(1 + \alpha^2)/4$

VI.11. Lỗ là hình sáu cạnh (hình VI.11); tọa độ của các đỉnh đối với hệ trục quán tính chính trung tâm  $x, y$ :

đỉnh 1( $x_1=0; y_1=4,72 \text{ cm}$ );

đỉnh 2( $x_2=0; y_2=-2,833 \text{ cm}$ );

đỉnh 3( $x_3=1,389 \text{ cm}; y_3=0$ );

đỉnh 4( $x_4=-1,389 \text{ cm}; y_4=0$ );

đỉnh 5( $x_5=-1,56 \text{ cm}; y_5=-1,72 \text{ cm}$ );

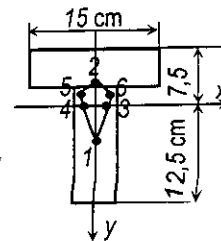
đỉnh 6( $x_6=1,56 \text{ cm}; y_6=-1,72 \text{ cm}$ );

VI.12.  $d = 3,7073 \sqrt{\frac{Pa}{[\sigma]}}$

VI.13.  $b = 3,3643 \sqrt{\frac{Pa}{[\sigma]}}$

VI.14.  $a = 3 \sqrt{\frac{2P}{[\sigma]}}$

Hình VI.11



**Chương 7. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng**

VII.1.  $y(z) = \frac{M * z^2}{2EI}$ ;  $y_{max} = \frac{M * l^2}{2EI}$ .

VII.2.  $y(u) = \frac{ql^4}{24EI}(u^4 - 2u^3 + u)$  với  $u = z/l$ ;  $y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$ .

VII.3. Trên đoạn AC: ( $0 \leq z \leq a$ ):  $\varphi(z) = \frac{Pb}{12EI}(l^2 - b^2 - 3z^2)$ ;

$$y(z) = \frac{Pb}{6EI} \left[ (l^2 - b^2)z - z^3 \right];$$

Trên đoạn CB: ( $a \leq z \leq l$ ):  $\varphi(z) = \frac{Pb}{6EI} \left[ l^2 - b^2 + \frac{3l(z-a)^2}{b} - 3z^2 \right]$ ;

$$y(z) = \frac{Pb}{6EI} \left[ (l^2 - b^2)z + \frac{l(z-a)^3}{b} - z^3 \right].$$

VII.4.  $\theta_B = \frac{\theta_{AB}}{2} = \frac{Pr^2}{4EI}(\pi - 2)$  (quay ngược chiều kim đồng hồ).

VII.5.  $y_a = \frac{3Ml^2}{8EI}$  (chuyển vị hướng xuống dưới).

VII.6.  $\varphi_{AB} = \frac{5ql^3}{24EI}$  (hai tiết diện A và B cùng quay ngược chiều kim đồng hồ).

VII.7.  $x_A = 1,594$  cm (hướng về bên trái).

VII.8. • Chuyển vị thẳng tương đối giữa B và G:  $x_{BG} = \frac{2560}{3EI}$  (chuyển dịch xa nhau).

• Chuyển vị thẳng đứng tại C:  $y_C = \frac{2560}{3EI}$  (hướng xuống dưới).

• Góc xoay tại D:  $\varphi = \frac{320}{3EI}$  rad, (ngược chiều kim đồng hồ).

• Chuyển vị thẳng tương đối giữa B và C:  $\Delta_{BC} = 0$ .

VII.9.  $x_{AB} = \gamma \frac{b^2}{EI} \left( \frac{b^3}{15} + \frac{b^2 a}{6} - \frac{a^3}{12} \right)$  (chuyển dịch xa nhau),

$\gamma$  – trọng lượng riêng của chất lỏng.

VII.10. • Chuyển vị thẳng đứng tại I:  $y_I = \frac{960}{EA}$  (hướng lên trên).

- Chuyển vị thẳng đứng tại 2:  $y_2 = \frac{13100}{EA}$  (hướng xuống dưới).

VII.11.  $x_{ab} = \frac{482,84}{EA}$  (chuyển dịch xa nhau).

VII.12. • Chuyển vị xoay tại D:  $\varphi = 0,0061$  rad (ngược chiều kim đồng hồ).

- Chuyển vị ngang tại B:  $x = 0,06$  m (hướng về bên trái).

VII.13. • Chuyển vị tương đối giữa m và n theo phương ngang:  $x_{mn} = 2\Delta x$ .

- Chuyển vị tương đối giữa m và n theo phương thẳng đứng:

$$y_C = 2\Delta y - 2a\varphi.$$

- Chuyển vị xoay tương đối giữa m và n:  $\varphi_{mn} = 0$ .

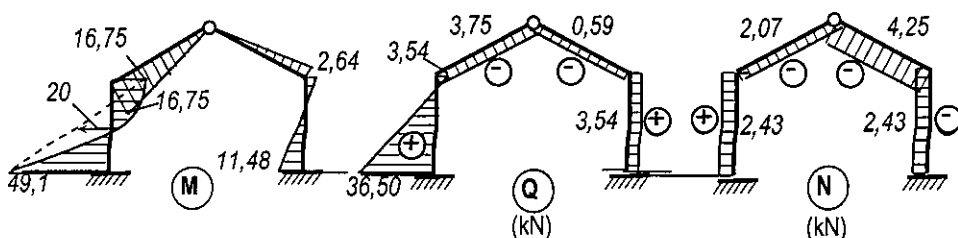
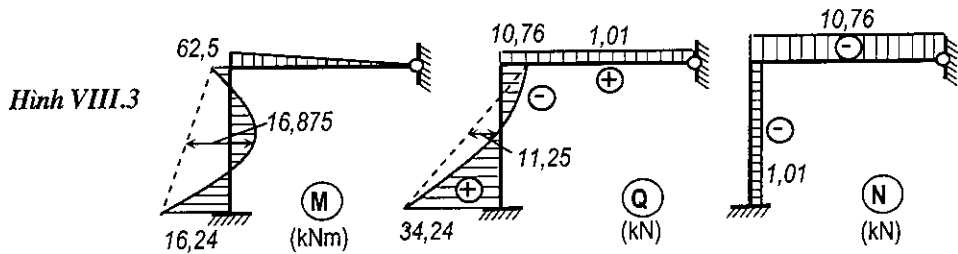
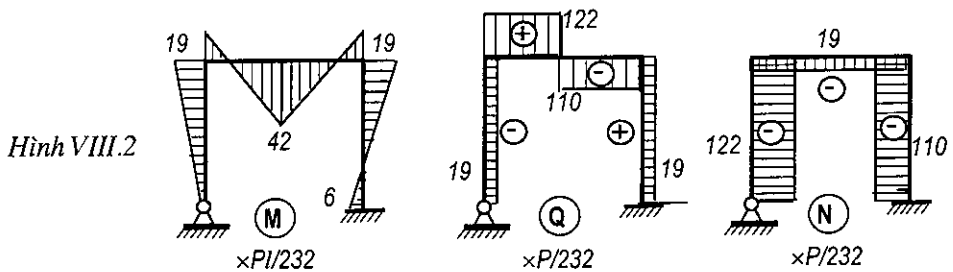
VII.14. Chuyển vị thẳng đứng tại A:  $y_A = -359 \text{ cal} / 4$  (hướng lên trên).

VII.15. Chuyển vị thẳng đứng tại A:  $y_A = \text{cad} / 2$  (hướng lên trên).

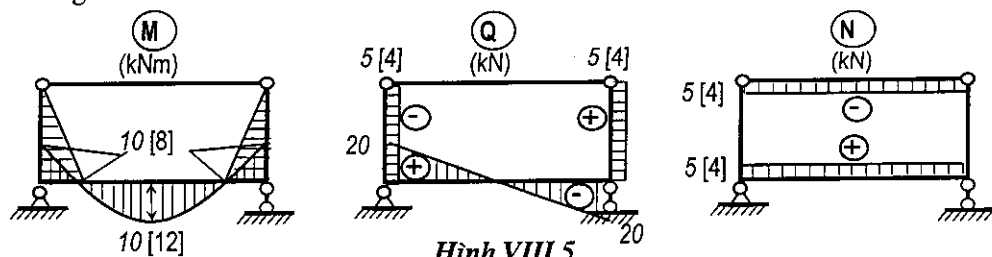
### Chương 8. Phương pháp lực và cách tính hệ thanh siêu tĩnh

VIII.1. a)  $n = 7$ ; b)  $n = 6$ ; c)  $n = 5$ .

VIII.2 - VIII.4. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên các hình tương ứng.



**VIII.5.** Các biểu đồ nội lực như trên hình VIII.5. Các số liệu không ghi trong dấu móc vuông tương ứng với khi  $EA = \infty$ ; các số liệu ghi trong dấu móc vuông tương ứng với khi  $EA = 3EI/16$ .



Hình VIII.5

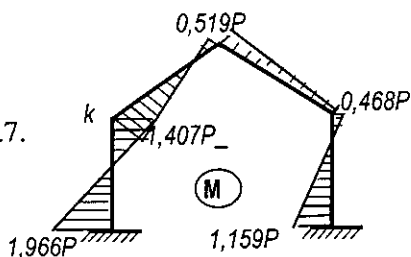
**VIII.6.** Biểu đồ mômen uốn như trên hình VIII.6.

$x_K = 10,54P/EI$ , (hướng về bên phải).

**VIII.7.** Các biểu đồ nội lực như trên hình VIII.7.

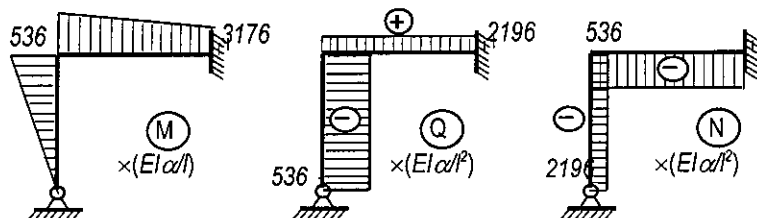
Các chuyển vị:

- $y_C = -5\alpha l$  (hướng lên trên);
- $x_C = -5\alpha l$  (hướng về bên trái);
- $\varphi_C = -26,5\alpha$  (ngược chiều kim đồng hồ).

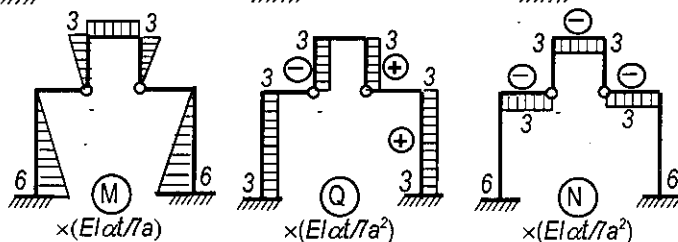


Hình VIII.6

Hình VIII.7

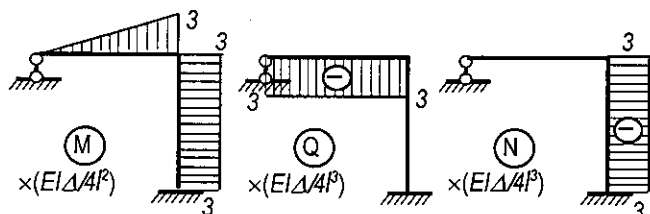


Hình VIII.8

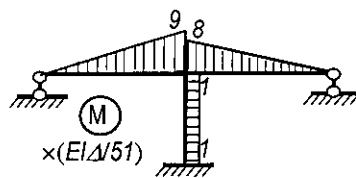


**VIII.8.** Các biểu đồ nội lực như trên hình VIII.8.  $x_{CD} = 2\alpha a l$  (chuyển dời xa nhau).

**VIII.9.** Các biểu đồ nội lực như trên hình VIII.9.  $x_A = 3\Delta/8$  (hướng về bên trái);



Hình VIII.9



Hình VIII.10

VIII.10. biểu đồ mômen uốn như trên hình VIII.10.  $\varphi_C = 0,0784\Delta$  rad (ngược chiều kim đồng hồ).

VIII.11.  $N_{AB} = 0,2P$ ;  $N_{BC} = -0,8P$ .

VIII.12.  $N_{ab} = 1,398P$ ;

$$x_{ab} = 2,78Pl / EA$$

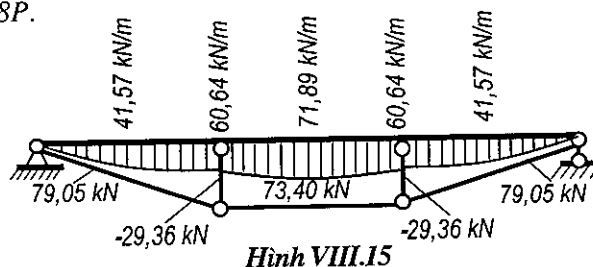
(chuyển dời xa nhau).

VIII.13.  $N_{AD} = -23,57$  kN;

$$N_{CF} = -23,71$$
 kN.

VIII.14.  $N_{ab} = -0,293EA\alpha$ .

VIII.15. Kết quả như trên hình VIII.15.



Hình VIII.15

VIII.16. Lực xô:

$$H = \frac{Pr^2(\pi h + r - 2h)}{2\left(\frac{2}{3}h^3 + h^2\pi r + \frac{\pi r^3}{2} + 4hr^2\right)}$$

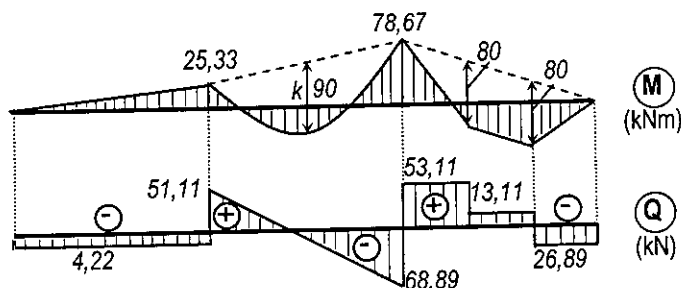
VIII.17. Lực dọc trong thanh căng:  $H = \frac{0,01 k q l^3}{0,012 k l^2 + 1}$  (lực kéo).

- Khi  $k$  giảm, lực căng  $H$  giảm, mômen uốn trong vòm tăng lên.  
Khi  $k = 0$ :  $H = 0$ ; mômen uốn trong vòm bằng mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng; tại tiết diện ở đỉnh vòm  $M = ql^2/8$ .
- Khi  $k$  tăng, lực căng  $H$  tăng, mômen uốn trong vòm giảm xuống.  
Khi  $k = \infty$ : sau khi khử vô định biểu thức của  $H$ , ta tìm được  $H = 5ql/6$ .  
Mômen uốn tại mọi tiết diện trong vòm bằng không.

VIII.18. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình VIII.18.

$$y_k = 103,5/EI \text{ m, (hướng xuống dưới).}$$

Hình VIII.18

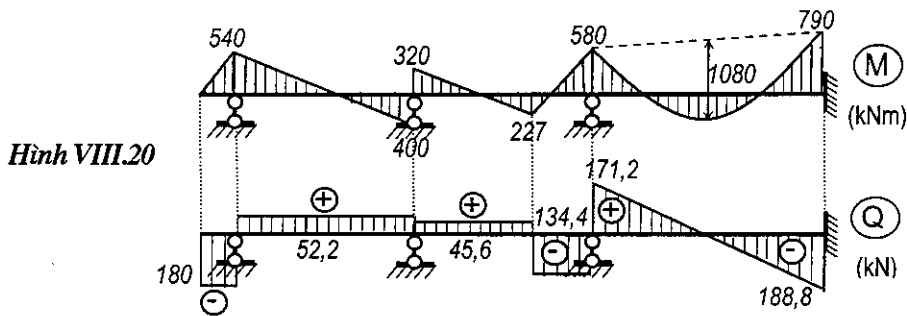
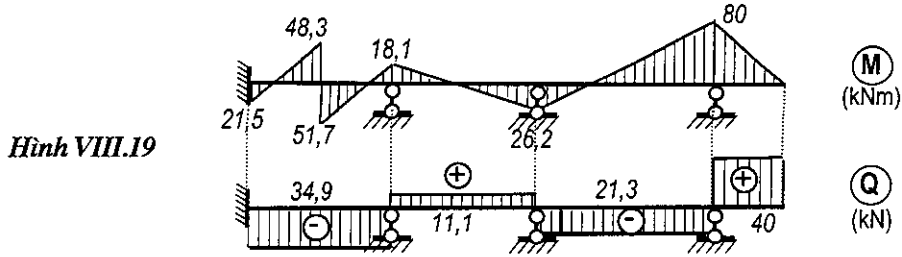


VIII.19. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình VIII.19.

$$\varphi_k = 191,5/EI \text{ rad, (thuận chiều kim đồng hồ).}$$

VIII.20. Các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình VIII.20.

VIII.21.  $M_0 = M_5 = 0$ ;  $M_1 = M_4 = 50,53\alpha EI/h$ ;  $M_2 = M_3 = 37,89\alpha EI/h$ ;



VIII.22.  $M_1 = 3,462EI\varphi/a$ ;  $M_2 = -0,923EI\varphi/a$ ;  $M_3 = 0,231EI\varphi/a$ ;

**Chương 9. Phương pháp chuyển vị và cách tính hệ thanh siêu tĩnh**

IX.1. Hệ có  $n = n_1 + n_2 = 2 + 0 = 2$ .

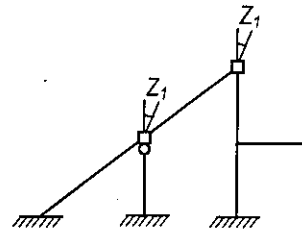
Hệ cơ bản như trên hình IX.1.

IX.2. Hệ có  $n = n_1 + n_2 = 5 + 4 = 9$ .

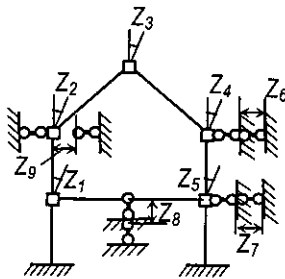
Hệ cơ bản như trên hình IX.2.

IX.3. Hệ có  $n = n_1 + n_2 = 4 + 2 = 6$ .

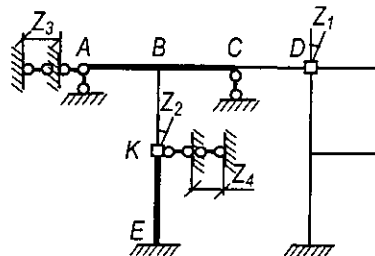
Hệ cơ bản như trên hình IX.3.



Hình IX.1



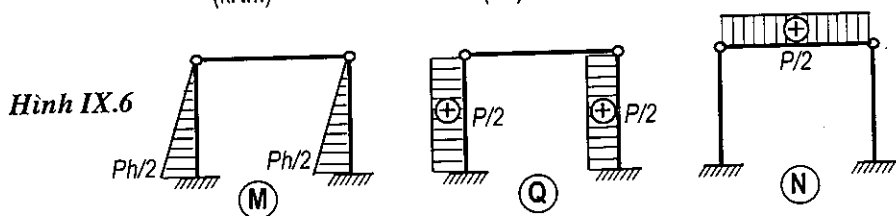
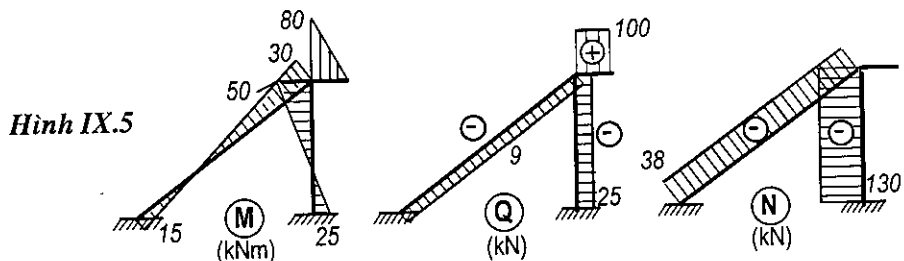
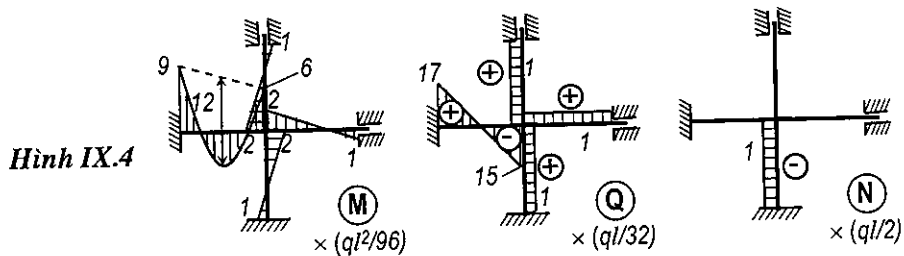
Hình IX.2



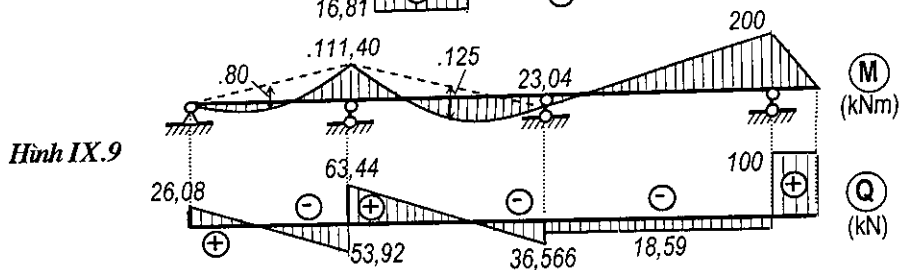
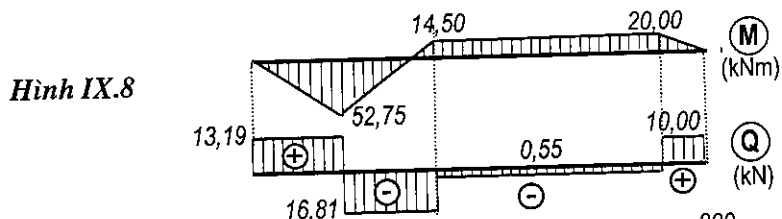
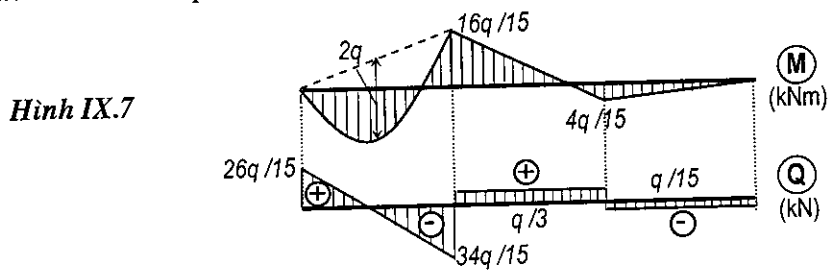
Hình IX.3

IX.4 - IX.6. Kết quả như trên các hình IX.4 - IX.6.





IX.7 - IX.9. Kết quả như trên các hình IX.7 - IX.9.



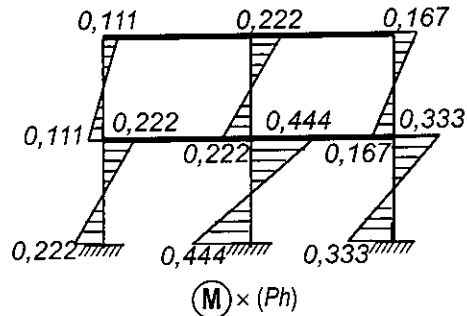
IX.10. 1) 
$$y_A = \frac{Ph}{2 \sum_{i=1}^n EA_i \sin^3 \alpha_i}; \quad N_i = \frac{PEA_i \sin^2 \alpha_i}{2 \sum_{i=1}^n EA_i \sin^3 \alpha_i}.$$

2)  $N_1 = 0,2954P; N_2 = 0,1937P; N_3 = 0,1182P.$

3)  $N_1 = 0,6983P; N_2 = 0,2514P.$

IX.11. • Sơ đồ a: 
$$M_i = \frac{P}{2} \frac{(EI_i) / h_i^2}{\sum_{k=1}^n (EI_k) / h_k^3};$$

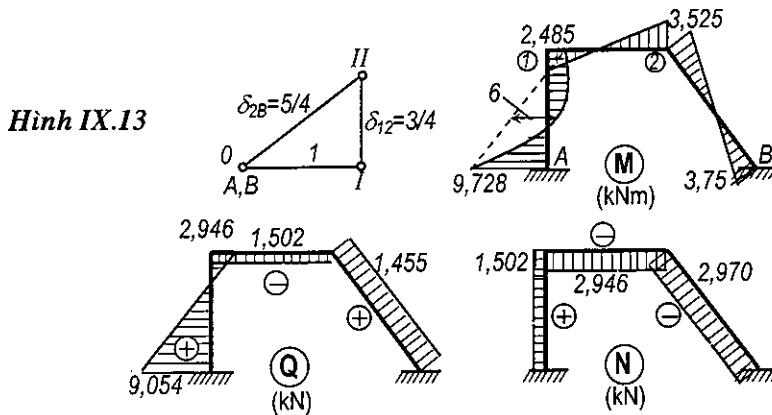
• Sơ đồ b: 
$$M_i = P \frac{(EI_i) / h_i^2}{\sum_{k=1}^n (EI_k) / h_k^3}.$$



Hình IX.12

IX.12. Kết quả như trên hình IX.12.

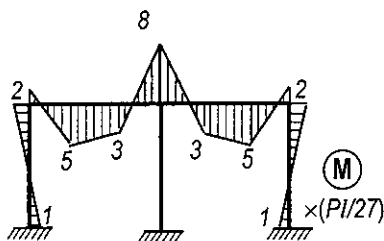
IX.13. Sơ đồ chuyển vị và các biểu đồ nội lực như trên hình IX.13.



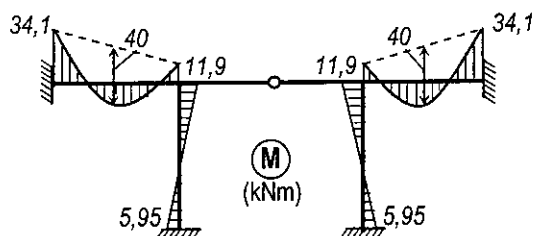
Hình IX.13

IX.14.  $M_k = 69 \text{ kNm}$  (căng thứ bên trong khung)

IX.15 - IX.16. Biểu đồ mômen uốn cần tìm như trên các hình IX.15 - IX.16.

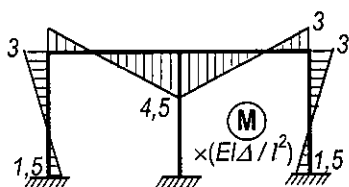


Hình IX.15

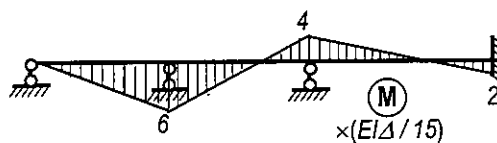


Hình IX.16

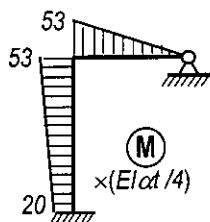
IX.17 - IX.20. Biểu đồ mômen uốn như trên các hình tương ứng.



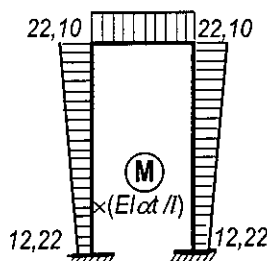
Hình IX.17



Hình IX.18



Hình IX.19



Hình IX.20

### Chương 10. Cách xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng di động

X.1. Các đường ảnh hưởng phản lực, nội lực tại tiết diện 1, 2 trong dầm đơn giản tìm được như trên hình X.1.1.

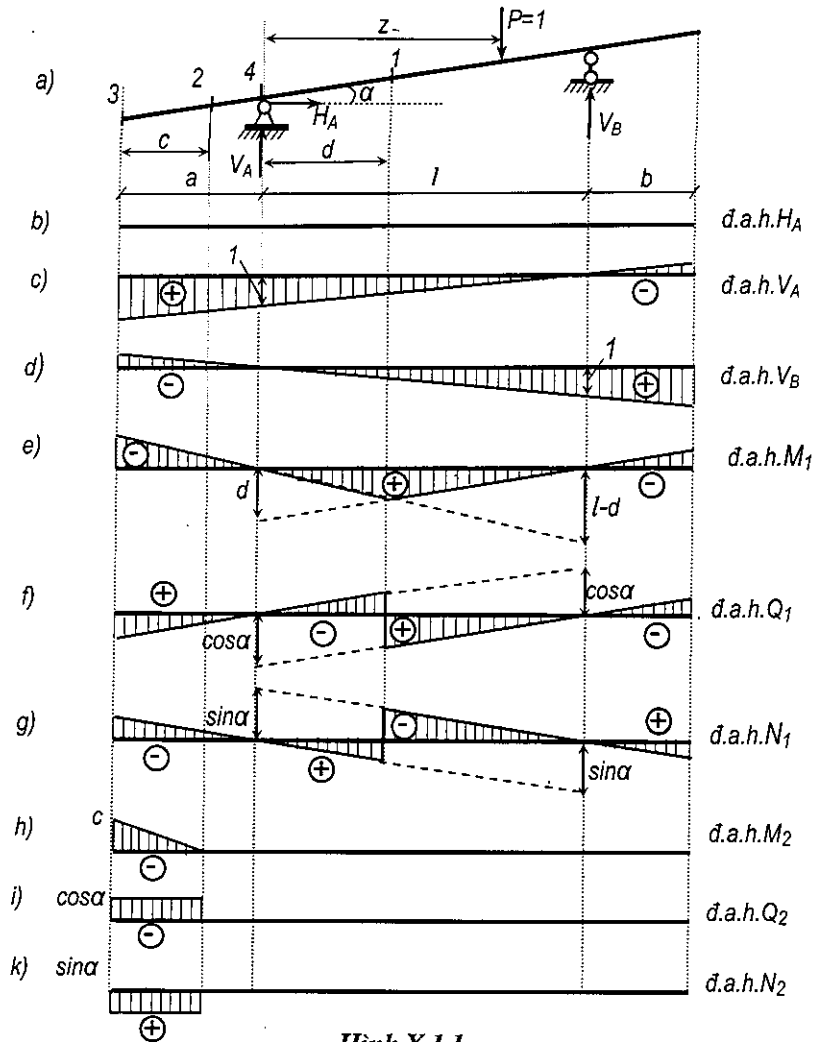
Các đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện 3, 4 tìm được trên hình X.1.2.

X.2. Các đường ảnh hưởng trong dầm công xôn tìm được như trên hình X.2.

X.3.  $R_A = 7ql/8$ ;  $R_B = -ql/8$ ;

X.4.  $M_k = \frac{ql^2}{8 \cos \alpha}$ ;  $Q_k = 0$ ;  $N_k = 0$ .

X.5.  $M_k^{tr} = -150 \text{ kNm}$ ;  $M_k^{ph} = -50 \text{ kNm}$ ;  $Q_k^{tr} = 10 \text{ kN}$ ;  $Q_k^{ph} = 10 \text{ kN}$ ;  
 $Q_A^{tr} = -50 \text{ kN}$ ;  $Q_A^{ph} = 10 \text{ kN}$ .



Hình X.1.1

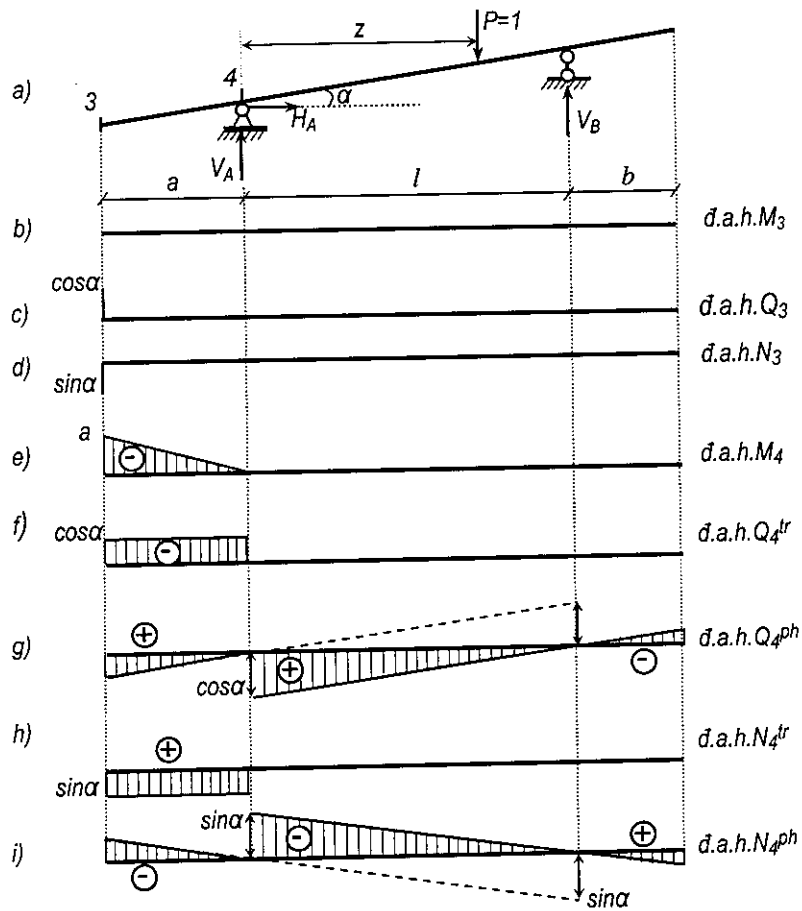
X.6. Tại k:  $M_k^{tr} = 30,9$  kNm;  $M_k^{ph} = 45,9$  kNm;  $Q_k = -6,4$  kN;  $N_k = 66,4$  kN.

Tại m:  $M_m = -16,9$  kNm;  $Q_m^{tr} = -43,9$  kN;  $Q_m^{ph} = 22,5$  kN;

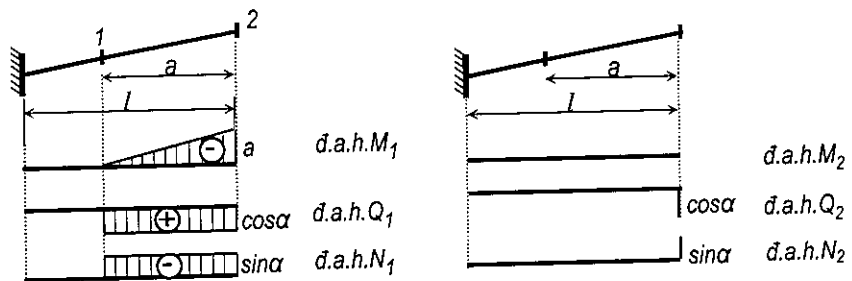
$N_m^{tr} = 65,4$  kN;  $N_m^{ph} = 0$ .

X.7. Vị trí tương ứng với tải trọng thứ nhất  $P_1$  đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 là vị trí bất lợi nhất và  $\max S_{max} = 5225$  kNm.

X.8.  $|M_c|_{max} = 126$  kNm;  $|Q_c|_{max} = 25,2$  kN.



Hình X.1.2



Hình X.2

## Chương II. Khái niệm về ổn định

XI.1. Thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi.  $P_{th}=135$  kN;  $\sigma_{th}= 24,56$  kN/cm<sup>2</sup>.

XI.2. Thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi.  $P_{th}=4,24$  kN;  $\sigma_{th}= 2,02$  kN/cm<sup>2</sup>.

XI.3. Thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi.  $P_{th}=98,52$  kN;  $\sigma_{th}=1,96$  kN/cm<sup>2</sup>.

XI.4. Thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi.  $P_{th}=261$  kN;  $\sigma_{th}=23,7$  kN/cm<sup>2</sup>.

XI.5.  $\sigma_{th}=21,21$  kN/cm<sup>2</sup>, vượt quá 33%.

XI.6.  $P_{th} = 37,7$  kN.

XI.7.  $\sigma_{th}=18,89$  kN/cm<sup>2</sup>, nhỏ hơn  $[\sigma] = 20$  kN/cm<sup>2</sup> (5,55%).

XI.8. I24.

XI.9.  $b = 10$  cm.

XI.10. 2  $\square$  14;  $B = 14$  cm.

XI.11. 2 I16;  $B = 21$  cm.

XI.12.  $f = 0,92$  cm;  $\sigma_{max}=11,75$  kN/cm<sup>2</sup>,  $n = 1,85$ ;  $n_{\delta d} = 1,67$ .

XI.13.  $f = 4,91$  cm;  $\sigma_{max}=14,62$  kN/cm<sup>2</sup>.

XI.14.  $f = 1,30$  cm;  $\sigma_{max}=0,671$  kN/cm<sup>2</sup>.

### Chương 12. Cách tính thanh chịu tải trọng động

XII.1. Khi không xét khối lượng dầm:  $T = 0,803$  s.

Khi có xét khối lượng dầm:  $T = 0,808$  s.

$$\text{XII.2. } T = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{Ql^3}{3EIg} \left( 1 + \frac{13gAl}{35Q} \right)}$$

$$\text{XII.3. } \omega = \sqrt{\frac{gC_1C_2}{Q(C_1+C_2)}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Q(C_1+C_2)}{gC_1C_2}}$$

XII.4.  $\omega = 142,74$  1/s;  $\max\sigma_d = 2,63$  kN/cm<sup>2</sup>.

XII.5.  $\omega = 71,86$  1/s;  $\max\sigma_d = 4,5$  kN/cm<sup>2</sup>.

XII.6.  $\omega = 292$  1/s;  $\max\sigma_d = 1,46$  kN/cm<sup>2</sup>.

XII.7. Khi không có lò xo:  $\max\sigma_d = 2,638$  kN/cm<sup>2</sup>.

Khi có lò xo:  $\max\sigma_d = 1,084$  kN/cm<sup>2</sup>.

XII.8. Khi không xét khối lượng dầm:  $Q = 480$  N.

Khi có xét khối lượng dầm:  $Q = 520$  N.

$$\text{XII.9. } H = \frac{[\sigma]^2 W^2 l}{6QEI}$$

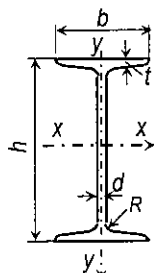
XII.10. Khi không xét khối lượng dầm:  $K_d = 169$ .

Khi có xét khối lượng dầm:  $K_d = 88$ .

$$\text{XII.11. } y_d = av_o \sqrt{\frac{Qa}{2EIg}}$$

# PHỤ LỤC

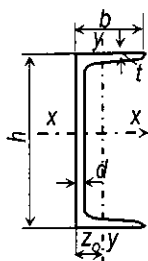
**Bảng 1. Thép hình I (theo TCVN 1655-75 và [12])**



$h$  – chiều cao tiết diện;  $I$  – mômen quán tính;  
 $b$  – chiều rộng bản cánh;  $W$  – mômen chống uốn;  
 $d$  – bề dày bản bụng;  $S$  – mômen tĩnh của nửa tiết diện;  
 $t$  – bề dày bản cánh;  $i$  – bán kính quán tính;  
 $A$  – diện tích tiết diện;  $m$  – khối lượng trên một mét dài;  
 $x, y$  – các trục quán tính chính trung tâm.

Số hiệu	$h$	$b$	$d$	$t$	$A$ cm <sup>2</sup>	$m$ kg/m	Trị số cần tìm đối với các trục						
							x - x				y - y		
							$I_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1881,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

**Bảng 2. Thép hình [ (theo TCVN 1654-75 và [12])**



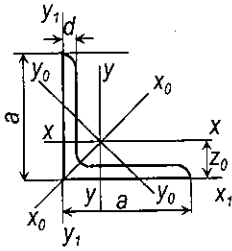
$h$  – chiều cao tiết diện;  
 $b$  – chiều rộng bản cánh;  
 $d$  – bề dày bản bụng;  
 $t$  – bề dày bản cánh;  
 $A$  – diện tích tiết diện;  
 $x, y$  – các trục quán tính chính trung tâm.  
 $z_0$  – khoảng cách từ mép ngoài bản bụng đến trục  $y$ .

$I$  – mômen quán tính;  
 $W$  – mômen chống uốn;  
 $S$  – mômen tĩnh của nửa tiết diện;  
 $i$  – bán kính quán tính;  
 $m$  – khối lượng trên một mét dài;

Số hiệu	$h$	$b$	$d$	$t$	$A$ cm <sup>2</sup>	$m$ kg/m	Trị số cần tìm đối với các trục							
							x - x				y - y			
							$I_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$i_x$ cm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$z_0$ cm
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,34	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	27,7	1460	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



**Bảng 3. Thép góc cánh đều (theo TCVN 1656-75 và [12])**



$b$  – chiều rộng bản cánh;  $I$  – mômen quán tính;  
 $t$  – bề dày bản cánh;  $i$  – bán kính quán tính;  
 $A$  – diện tích tiết diện;  $m$  – khối lượng trên một mét dài;  
 $x, y$  – các trục quán tính chính trung tâm.  
 $z_0$  – khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài bản cánh.

Số hiệu	a mm	d mm	A cm <sup>2</sup>	m kg/m	Trị số cần tìm đối với các trục								Z <sub>0</sub> cm
					x - x		x - x		x - x		x - x		
					I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	
5,6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50	
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	

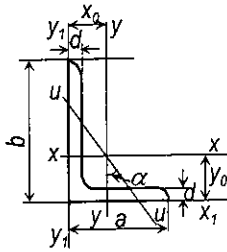
**Bảng 3 (tiếp theo)**

Số hiệu	a mm	d mm	A cm <sup>2</sup>	m kg/m	Trị số cần tìm đối với các trục							z <sub>o</sub> cm
					x - x		x <sub>o</sub> - x <sub>o</sub>		y <sub>o</sub> - y <sub>o</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>	
					I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> cm	I <sub>xo</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>xo</sub> cm	I <sub>yo</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>yo</sub> cm	I <sub>x1</sub> cm <sup>4</sup>	
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	103	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	71,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
11	110	16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
		7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
12,5	125	8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
		8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
14	140	14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
		9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
16	160	12	32,5	22,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
		10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70

**Bảng 3 (tiếp theo)**

Số hiệu	a mm	d mm	A cm <sup>2</sup>	m kg/m	Trị số cần tìm đối với các trục							z <sub>o</sub> cm
					x - x		x <sub>o</sub> - x <sub>o</sub>		y <sub>o</sub> - y <sub>o</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>	
					I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> cm	I <sub>xo</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>xo</sub> cm	I <sub>yo</sub> cm <sup>4</sup>	i <sub>yo</sub> cm	I <sub>x1</sub> cm <sup>4</sup>	
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7,76	7402	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7003	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,80	15753	7,31

**Bảng 4. Thép góc cánh không đều**  
(theo TCVN 1657-75 và [12])



$b$  – chiều rộng cánh lớn;  $A$  – diện tích tiết diện;  
 $a$  – chiều rộng cánh nhỏ;  $I$  – mômen quán tính;  
 $d$  – bề dày bản cánh;  $i$  – bán kính quán tính;  
 $m$  – khối lượng trên một mét dài;  
 $x, y$  – các trục quán tính trung tâm.  
 $\alpha$  – góc nghiêng của trục quán tính chính trung tâm  $u$ .  
 $x_0, y_0$  – khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài bản cánh.

Số hiệu	b	a	d	A	m	Trị số cần tìm đối với các trục										
						x - x		y - y		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		u - u		
						$I_x$ cm <sup>4</sup>	$i_x$ cm	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$i_y$ cm	$I_{x1}$ cm <sup>4</sup>	$y_0$ cm	$I_{y1}$ cm <sup>4</sup>	$x_0$ cm	$I_u$ cm <sup>4</sup>	$i_u$ cm	tg $\alpha$
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	2,48	10,4	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
			4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51,0	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	31,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430

**Bảng 4 (tiếp theo)**

Số hiệu	b	a	d	A	m	Trị số cần tìm đối với các trục										
						x - x		y - y		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		u - u		
						$I_x$ cm <sup>4</sup>	$i_x$ cm	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$i_y$ cm	$I_{x1}$ cm <sup>4</sup>	$y_o$ cm	$I_{y1}$ cm <sup>4</sup>	$x_o$ cm	$I_u$ cm <sup>4</sup>	$i_u$ cm	tg $\alpha$
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,8	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,50	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	11,0	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407
			8	16,0	12,5	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18,0	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18,0	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12	30,0	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,08	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,80	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phan Văn Cúc - Vũ Bá Mai. *Cơ học Cơ sở I (cho sinh viên trường Đại học kỹ thuật)*. Nhà xuất bản Xây dựng. Hà Nội, 2005.
2. Lê Văn Hồ. *Cơ học công trình - Tập I và Tập II* - Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội, 1993.
3. Lê Ngọc Hồng. *Sức bền vật liệu* - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1998.
4. Vũ Đình Lai - Nguyễn Xuân Lựu - Bùi Đình Nghi. *Sức bền vật liệu - Tập I* - Nhà xuất bản Giao thông vận tải - Hà Nội, 2004.
5. Lê Quang Minh - Nguyễn Văn Vương. *Sức bền vật liệu - Tập I* - Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội, 2006.
6. Lêu Thọ Trình. *Cơ học kết cấu - Tập I và Tập II* - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 2006.
7. Lêu Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên. *Bài tập Cơ học kết cấu - Tập I* - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 2006.
8. Lêu Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên. *Bài tập Cơ học kết cấu - Tập II* - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 2007.
9. Lêu Thọ Trình, Đỗ Văn Bình. *Cơ học kết cấu (Dành cho hệ Cao đẳng các ngành Kỹ thuật xây dựng)*, Nhà xuất bản Xây dựng. Hà Nội, 2008.
10. Lêu Thọ Trình, Đỗ Văn Bình. *Ổn định công trình*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật. Hà Nội, 2002.
11. Phạm Khắc Hùng, Đào Trọng Long, Lê Văn Quý, Lêu Thọ Trình. *Ổn định - Động lực học công trình*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1974.
12. I.N. Mirôliubôp, X.A. Engalutrep, N.D. Xerghiepxki, Ph.D. Alma-metôp, N.A. Kuritxum, K.G. Xmironôp-Vaxiliep, L.V. Iasina *Bài tập Sức bền vật liệu*. Người dịch: Vũ Đình Lai, Nguyễn Văn Nhậm. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội - Nhà xuất bản Mir, Maxcova, 1988.

# MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
<i>Lời tựa</i>	3
<b>Mở đầu</b>	
1. Đối tượng của môn học cơ học công trình	5
2. Ngoại lực	5
3. Khái niệm về chuyển vị và biến dạng	10
4. Nội lực và ứng suất	12
5. Các giả thiết của môn học	17
6. Các nguyên lý áp dụng cho hệ đàn hồi	21
7. Phân loại công trình	22
8. Nhiệm vụ của môn học	25
<b>Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ thanh phẳng</b>	
1.1. Khái niệm mở đầu	28
1.2. Các loại liên kết	31
1.3. Cách nối các miếng cứng thành hệ bất biến hình	34
1.4. Ví dụ áp dụng	41
Bài tập chương I	45
<b>Chương 2. Cách xác định nội lực trong hệ thanh phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động</b>	
2.1. Nguyên tắc xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động	46
2.2. Cách tính dàn tĩnh định	48
2.3. Cách tính dầm, khung tĩnh định	59
2.4. Cách tính hệ ba khớp	72
2.5. Cách tính hệ ghép tĩnh định	83
2.6. Cách tính hệ có hệ thống truyền lực	87
Bài tập chương II	
<b>Chương 3. Cách tính thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm</b>	
3.1. Ứng suất trên thanh chịu kéo, nén	94
3.2. Biến dạng và chuyển vị của thanh	97

3.3. Các đặc trưng cơ học của vật liệu	99
3.4. Các quan điểm tính toán kết cấu	104
Bài tập chương III	110
<b>Chương 4. Cách tính thanh chịu cắt, chịu xoắn thuần túy</b>	
4.1. Khái niệm về hiện tượng trượt (cắt)	114
4.2. Cách tính thanh chịu cắt	115
4.3. Cách tính thanh tiết diện tròn chịu xoắn	119
4.4. Cách tính thanh có tiết diện chữ nhật chịu xoắn	125
Bài tập chương IV	126
<b>Chương 5. Cách tính thanh chịu uốn</b>	
5.1. Khái niệm và định nghĩa	129
5.2. Ứng suất trong thanh chịu uốn thuần túy	129
5.3. Các đặc trưng hình học của tiết diện	133
5.4. Điều kiện bền khi uốn thuần túy	137
5.5. Ứng suất trong thanh chịu uốn ngang phẳng	138
5.6. Điều kiện bền khi uốn ngang phẳng	143
5.7. Ứng suất chính và quỹ đạo ứng suất chính	145
Bài tập chương V	146
Bài tập lớn số 1	149
<b>Chương 6. Cách tính thanh chịu lực kết hợp</b>	
6.1. Thanh chịu uốn xiên	151
6.2. Thanh chịu uốn và kéo (nén) đồng thời - Kéo (nén) lệch tâm	156
6.3. Thanh chịu uốn và xoắn đồng thời	162
6.4. Thanh chịu lực tổng quát	165
Bài tập chương VI	166
<b>Chương 7. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng</b>	
7.1. Khái niệm chung	169
7.2. Cách xác định đường đàn hồi	172
7.3. Công khả dĩ (công ảo) của ngoại lực và nội lực	176
7.4. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính	181
7.5. Công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính (Công thức Maxwell-Morh, 1874)	184



7.6. Cách vận dụng công thức chuyển vị	186
7.7. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"	192
7.8. Cách tìm một tập hợp chuyển vị	197
Bài tập chương VII	201
<b>Chương 8. Phương pháp lực và cách tính hệ thanh siêu tĩnh</b>	
8.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh	205
8.2. Nội dung phương pháp lực và cách tính hệ siêu tĩnh	210
8.3. Áp dụng	219
8.4. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh	233
8.5. Một số biện pháp đơn giản hóa khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao	237
8.6. Cách tính dầm liên tục	241
Bài tập chương VIII	252
Bài tập lớn số 2	256
<b>Chương 9. Phương pháp chuyển vị và cách tính hệ thanh siêu tĩnh</b>	
9.1. Khái niệm	258
9.2. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động	261
9.3. Áp dụng	270
9.4. Sơ đồ chuyển vị thẳng tại các nút của hệ thanh	274
9.5. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút	280
Bài tập chương IX	281
<b>Chương 10. Cách xác định nội lực trong hệ chịu tải trọng di động</b>	
10.1. Phương pháp nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động	284
10.2. Cách xác định các đại lượng nghiên cứu tương ứng với các dạng tải trọng theo đường ảnh hưởng	292
10.3. Cách xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng	298
10.4. Khái niệm về biểu đồ bao nội lực	305
10.5. Biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh	308
Bài tập chương X	310
<b>Chương 11. Khái niệm về ổn định</b>	
11.1. Khái niệm về ổn định và mất ổn định	312
11.2. Ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm	317

11.3. Ổn định của thanh thẳng chịu nén ngoài giới hạn đàn hồi	320
11.4. Cách tính thanh thẳng chịu nén theo Tiêu chuẩn kỹ thuật (TCKT)	322
11.5. Cách tính thanh thẳng chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời	327
Bài tập chương XI	331
<b>Chương 12. Cách tính thanh chịu tải trọng động</b>	
12.1. Khái niệm	334
12.2. Dao động của hệ một bậc tự do	335
12.3. Va chạm của hệ một bậc tự do	343
Bài tập chương XII	348
<b>Đáp số các bài tập</b>	350
<b>Phụ lục</b>	370
<b>Tài liệu tham khảo</b>	377



**CƠ HỌC CÔNG TRÌNH**  
**DÀNH CHO CÁC NGÀNH KIẾN TRÚC,**  
**VẬT LIỆU XÂY DỰNG, KỸ THUẬT MÔI TRƯỜNG**

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

TRINH XUÂN SƠN

<i>Biên tập:</i>	TRẦN CƯỜNG
<i>Chế bản điện tử:</i>	PHẠM HỒNG LÊ
<i>Sửa bản in:</i>	TRẦN CƯỜNG
<i>Trình bày bìa:</i>	VŨ BÌNH MINH

---

In 500 cuốn khổ 17×24cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 21-2010/CXB/568-64/XD ngày 30/12/2009. Quyết định xuất bản số 150/QĐ-XBXD ngày 7/7/2010. In xong và nộp lưu chiểu tháng 7/2010.







# CƠ HỌC CÔNG TRÌNH



6X6 - 6X2  
XD - 2010 21 - 2010

Giá : 98.000đ



THƯ VIỆN  
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ