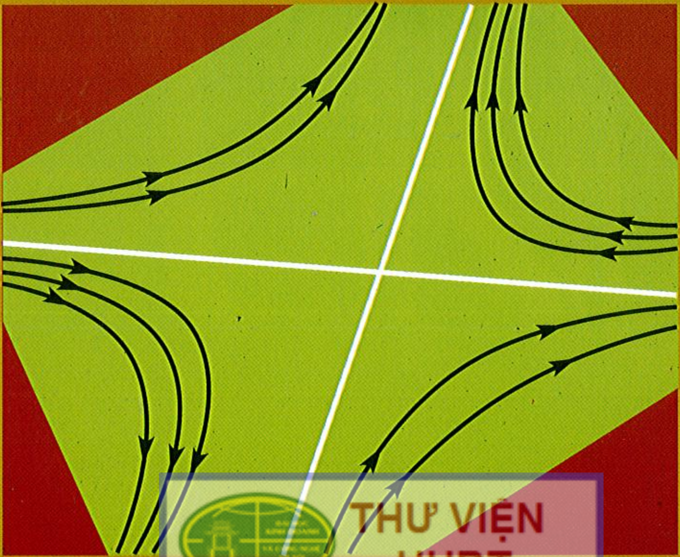
NGUYỄN THẾ HOÀN - PHẠM PHU

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN THẾ HOÀN – PHẠM PHU

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cũng như các môn khoa học khác, phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kĩ thuật và những yêu cầu đòi hỏi của thực tế. Đã có những tài liệu, giáo trình đề cập đến những bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phương trình vi phân tương ứng. Ở đây chúng tôi muốn giới thiệu với bạn đọc một ví dụ về một ứng dụng của phương trình vi phân trong sinh học. Giả sử ta cần nghiên cứu sự phát triển của một quần thể. Gọi x(t) là mật độ của quần thể ở thời điểm t, $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$ *là tốc độ phát triển của quần thể. Tại mỗi thời điểm t, tốc độ phát triển nói chung tỉ lệ với số lượng của quần thể tức là với mật độ của nó :* $\dot{x} = h(t)x$ *(chẳng hạn, số lượng càng nhiều càng lắm con). Nhưng tại mỗi thời điểm t một số con vật của quần thể cũng chết đi (do bệnh tật hoặc bị các loài khác ăn thịt). Và số lượng con vật "chết đi" này cũng tỉ lệ với mật độ của quần thể. Do đó tốc độ phát triển của quần thể được viết một cách chính xác hơn dưới dạng*

$$\dot{x} = x(k(t) - h(t)x) \qquad (*)$$

Đại lượng $k(t) - h(t)x$ *được gọi là tốc độ phát triển riêng của quần thể. Nếu quần thể phát triển chưa đến* *mức tới hạn (chẳng hạn môi trường còn cung cấp đầy đủ thức ăn cho quần thể) thì tốc độ phát triển riêng $k(t) - h(t)x > 0$. Nếu quần thể phát triển quá mức tới hạn thì $k(t) - h(t)x < 0$ (chẳng hạn do môi trường không thể cung cấp đầy đủ thức ăn).*

Phương trình (*) là một phương trình vi phân cấp một và thường được gọi là phương trình logistic. Việc nghiên cứu phương trình (*) có một ý nghĩa quan trọng trong sinh thái học.

Thời gian qua ở trong nước ta đã xuất hiện một số giáo trình phương trình vi phân (xem [1], [2]). Nhưng các giáo trình này in đã lâu và có hạn nên hiện nay trên thị trường không còn nữa. Để đáp ứng nhu cầu bạn đọc, nhất là đối với tầng lớp sinh viên, chúng tôi viết giáo trình này nhằm cung cấp tương đối đầy đủ những kiến thức cơ bản của lí thuyết cơ sở phương trình vi phân và đi sâu hơn, những kiến thức cơ bản của lí thuyết ổn định nghiệm phương trình vi phân.

Chương I và chương II của phần một chủ yếu trình bày các phương pháp giải phương trình vi phân cấp một cũng như cách tìm nghiệm kì dị và quỹ đạo đẳng giác. Chương III giới thiệu một số phương trình vi phân cấp n có thể giải được hoặc hạ thấp cấp được. Chương IV trình bày lí thuyết tổng quát của phương trình tuyến tính cấp n và từ đó suy ra cấu trúc nghiệm tổng quát của lớp phương trình này.

Chương V chỉ ra một số phương trình vi phân tuyến tính cấp n mà đối với chúng, ta có thể xây dựng *được nghiệm tổng quát bằng một biểu thức tường minh. Cũng ở chương này một vấn đề nhỏ của lí thuyết định tính phương trình vi phân được đề cập đến. Đó là vấn đề dao động nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai.*

Phần đầu của chương VI trình bày phương pháp giải hệ phương trình vi phân và chứng minh định lí tồn tại, duy nhất nghiệm của bài toán Côsi. Nhờ sự liên hệ giữa hệ n phương trình vi phân cấp một với một phương trình vi phân cấp n, từ đây suy ra định lý tồn tại và duy nhất nghiệm đối với phương trình vi phân cấp n đã phát biểu mà không chứng minh ở chương III. Phần tiếp theo của chương VI trình bày lí thuyết tổng quát về hệ phương trình vi phân tuyến tính và từ đó suy ra cấu trúc nghiệm của chúng. Cuối cùng, chỉ ra cách xây dựng nghiệm tổng quát dưới biểu thức tường minh của hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng.

Bắt đầu từ chương I phần hai, chúng tôi muốn giới thiệu đến bạn đọc một trong những phương hướng cơ bản của lí thuyết định tính phương trình vi phân có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Đó là sự ổn định của nghiệm. Cần nói rằng trong khuôn khổ một phần của một cuốn sách chúng tôi không có tham vọng đi sâu và trình bày đầy đủ lí thuyết ổn định mà chủ yếu muốn giới thiệu với bạn đọc những khái niệm cơ bản nhất và một số kết quả kinh điển nhất của lí thuyết này.

Trong lần tái bản này, cuốn sách đã được sửa chữa khá nhiều lỗi in ấn và một số sai sót về tính toán. Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Trịnh Tuấn Anh và Th.S Nguyễn Trọng Hải đã có những nhận xét và góp ý quý báu để cuốn sách hoàn thiện tốt hơn. Tuy nhiên vẫn không thể tránh khỏi những sai sót trong cách trình bày cuốn sách. Chúng tôi rất mong nhận được những góp ý xây dựng của bạn đọc gần xa. Xin chân thành cảm ơn trước.

Thư từ xin gửi về địa chỉ :

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – 81 Trần Hưng Đạo – Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

Phần một

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát :

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \qquad (1.1)$$

trong đó hàm F xác định trong miền $D \subset \mathbb{R}^3$.

Nếu trong miền D, từ phương trình (1.1) ta có thể giải được y' :

$$y' = f(x,\ y) \qquad (1.2)$$

thì ta được phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.

Hàm $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên khoảng $I = (a,\ b)$ được gọi là *nghiệm* của phương trình (1.1) nếu

a) $(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) \in D$ với mọi $x \in I$

b) $F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) \equiv 0$ trên I.

Ví dụ 1. Phương trình

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

có nghiệm là hàm $y = ce^{2x}$ xác định trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ (c là hằng số tùy ý).

Ví dụ 2. Phương trình

$$y' = 1 + y^2 \tag{1.3}$$

có nghiệm là hàm y = tgx xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Có thể kiểm tra trực tiếp hàm y = tg(x + c) với mỗi hằng số c cố định cũng là nghiệm của phương trình (1.3) trên khoảng xác định tương ứng.

Chú ý. Nhiều khi người ta viết phương trình đã giải ra đạo hàm dưới dạng đối xứng sau :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.4}$$

Chúng ta dễ dàng thấy sự tương đương giữa cách viết (1.2) và (1.4).

2. Bài toán Côsi. Qua ví dụ 1 và ví dụ 2 ta thấy rằng nghiệm của phương trình vi phân cấp một là vô số. Tập hợp nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc vào một hằng số tùy ý c. Trong thực tế người ta thường quan tâm đến nghiệm của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn những điều kiện nào đấy. Chẳng hạn tìm nghiệm y(x) của phương trình (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn điều kiện

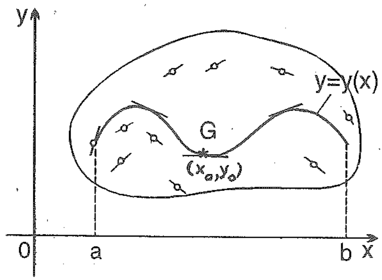
$$y(x_o) = y_o \tag{1.5}$$

trong đó x_o, y_o là các số cho trước.

Điều kiện (1.5) được gọi là *điều kiện ban đầu*. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.5) được gọi là *bài toán Côsi*. Sau này chúng ta sẽ thấy với những điều kiện nào thì nghiệm của bài toán Côsi là tồn tại và duy nhất.

3. Ý nghĩa hình học. Ta xét phương trình đã giải ra đạo hàm (1.2). Giả sử hàm f xác định trên miền $G \subset \mathbb{R}^2$, $y = \varphi(x)$ là nghiệm của (1.2) xác định trên khoảng $I = (a, b)$. Khi đó đồ thị của hàm $\varphi(x)$ sẽ cho ta một đường cong trong G và được gọi là đường cong tích phân.

Giả sử $(x_o, y_o) \in G$ và $y = y(x)$ là nghiệm của (1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$. Với nghiệm y(x) ta có đường cong tích phân tương ứng. Hiển nhiên đường cong này đi qua điểm (x_o, y_o). Như vậy, bài toán Côsi tương đương với việc tìm đường cong tích phân của phương trình (1.2) đi qua điểm $(x_o, y_o) \in G$ cho trước.



Hình 1

Bây giờ qua mỗi điểm $(x, y) \in G$ ta vẽ một đoạn thẳng có hệ số góc bằng f(x, y). Tập hợp tất cả các đoạn thẳng như vậy sẽ lập nên một trường hướng trong G. Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm ta suy ra rằng tại mỗi điểm của nó, đường cong tích phân của phương trình (1.2) tiếp xúc với đoạn thẳng của trường hướng. Do đó việc tìm nghiệm của (1.2) tương đương với việc tìm trong G một đường cong sao cho tại mỗi điểm của nó, đường cong tiếp xúc với đoạn thẳng của trường hướng.

§2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÔSI

Xét phương trình

$$y' = f(x, y) \qquad (2.1)$$

f xác định trong miền $G \subset \mathbf{R}^2$. Trong phần này ta sẽ chỉ ra các điều kiện mà f thỏa mãn để bài toán Côsi ứng với phương trình (2.1) có nghiệm duy nhất.

1. Điều kiện Lipsit. Ta nói rằng, trong miền G hàm f(x, y) thỏa mãn *điều kiện Lipsit* theo biến y nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho đối với hai điểm $(x, \bar{y}) \in G$, $(x, \bar{\bar{y}}) \in G$ bất kì, ta có bất đẳng thức

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leqslant L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| \qquad (2.2)$$

Nhận xét. Điều kiện Lipsit sẽ được thỏa mãn nếu trong miền G hàm f có đạo hàm riêng theo y giới nội :

$$|f_y'(x, y)| \leqslant M \text{ , } \forall (x, y) \in G.$$

Thật vậy, theo công thức Lagrange ta có

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| = |f_y'(x, \bar{y} + \theta(\bar{\bar{y}} - \bar{y}))(\bar{\bar{y}} - \bar{y})| \leqslant$$

$$\leqslant M|\bar{\bar{y}} - \bar{y}|$$

với mọi $(x, \bar{y}), (x, \bar{\bar{y}}) \in G$. Điều ngược lại, nói chung không đúng, chẳng hạn hàm $f(x, y) = |y|$ thỏa mãn điều kiện Lipsit vì

$$\big||\bar{\bar{y}}| - |\bar{y}|\big| \leqslant |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|$$

nhưng nó không có đạo hàm tại $y = 0$.

2. Dáy xấp xỉ Picar. Bây giờ ta giả thiết hàm f(x, y) liên tục trong miền G ; (x_o, y_o) là điểm trong của G. Chọn các số dương a, b sao cho hình chữ nhật

$$Q = \begin{cases} |x - x_o| \leqslant a \\ |y - y_o| \leqslant b \end{cases}$$

chứa trong G. Đặt $M = \max\limits_{Q} |f(x, y)|$. Kí hiệu $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$

Ta xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ của phương trình (2.1) như sau :

$$y_o(x) \equiv y_o,$$

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, y_o(\tau))d\tau, \ x \in [x_0 - h, x_o + h]$$

....

$$y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau, \ x \in [x_o - h, x_o + h]$$

Dãy $\{y_n(x)\}$ xác định như trên được gọi là *dãy xấp xỉ Picar*. Ta chứng minh rằng khi x biến thiên trên $[x_o - h, x_o + h]$ thì $(x, y_n(x)) \in Q$ với mọi n = 0, 1, 2, ... và do đó dãy $\{y_n(x)\}$ được xác định. Thật vậy, điều này rõ ràng đúng với n = 0. Giả sử ta có $(x, y_{n-1}(x)) \in G$ khi $x \in [x_o - h, x_o + h]$. Khi đó có thể xây dựng

$$y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau$$

Với $|x - x_o| \leqslant h \leqslant a$ ta có

$$|y_n(x) - y_o| \leqslant \left|\int_{x_o}^{x} |f(\tau, y_{n-1}(\tau))|d\tau\right| \leqslant M\left|\int_{x_o}^{x} d\tau\right|$$

$$= M|x - x_o| \leqslant Mh \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b$$

tức là $(x, y_n(x)) \in G$ khi $x \in [x_o - h, x_o + h]$.

3. Định lý Côsi – Picar (Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm).

Giả sử hàm f thỏa mãn các điều kiện sau đây :

a) f liên tục trong miền G ;

b) f thỏa mãn điều kiện Lipsit theo y trong G.

Khi đó ứng với mỗi điểm trong $(x_o, y_o) \in G$ tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$. Nghiệm này xác định trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$, trong đó h được xác định như ở phần xây dựng dãy xấp xỉ Picar.

Chứng minh. Ta xét dãy xấp xỉ Picar $\{y_n, (x)\}$ đã xây dựng ở trên. Vì $(x, y_n(x)) \in G$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ và f liên tục nên các hàm $y_n(x)$ liên tục và khả vi trên $[x_o - h, x_o + h]$. Dễ dàng thấy $y_n(x_o) = y_o$, $n = 1, 2, \ldots$ Bây giờ ta chứng minh rằng $y_n(x)$ hội tụ đều trên $[x_o - h, x_o + h]$. Trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$ ta có

$$|y_1(x) - y_o(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} f(\tau, y_o)d\tau \right| \leqslant M|x - x_o|,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_o(\tau))]d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_o}^{x} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_o(\tau))|d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \left| \int_{x_o}^{x} |y_1(\tau) - y_o(\tau)|d\tau \right| \leqslant L \left| \int_{x_o}^{x} M|\tau - x_o|d\tau \right| =$$

$$\frac{ML}{2!}|x_o - x|^2$$

Ta chứng minh rằng, khi $x \in [x_o - h, x_o + h]$ thì

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{ML^{n-1}}{n!}|x - x_o|^n \qquad (2.3)$$

Thật vậy, với $n = 1, 2$ ta đã kiểm tra ở trên. Giả sử (2.3) đúng với n. Khi đó

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} [f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_o}^{x} |y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)|\, d\tau\right| \leqslant \frac{ML^n}{n!}\int_{x_o}^{x} |\tau - x_o|^n d\tau =$$

$$= \frac{ML^n}{(n+1)!}\,|x - x_o|^{n+1}$$

tức là bất đẳng thức (2.3) đúng với n + 1. Vì (2.3) đúng khi $|x - x_o| \leqslant h$ nên ta đi đến đánh giá sau đây :

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{ML^{n-1}}{n!}\, h^n \tag{2.4}$$

$$x \in [x_o - h,\ x_o + h],\ n = 1, 2, \ldots$$

Xét chuỗi hàm

$$y_o(x) + (y_1(x) - y_o(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots \tag{2.5}$$

Do (2.4) ta suy ra rằng, giá trị tuyệt đối của số hạng tổng quát của chuỗi (2.5) trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$ không vượt quá số hạng tổng quát của chuỗi dương hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ML^{n-1}}{n!}\, h^n$.

Bởi vậy, theo tiêu chuẩn Vâyơstrass chuỗi (2.5) hội tụ đều trên $[x_o - h, x_o + h]$ đến hàm y(x). Dễ thấy rằng, tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi (2.5) là $y_n(x)$ và do đó ta đã chứng minh

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x) \text{ trên } [x_o - h,\ x_o + h].$$

Vì

$$y_n(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau,\ y_{n-1}(\tau))\, d\tau \tag{2.6}$$

và hàm f liên tục trên G nên trong đẳng thức (2.6) ta có thể chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ dưới dấu tích phân. Kết quả ta được

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau,\ y(\tau))\, d\tau \tag{2.7}$$

Vì sự hội tụ của dãy $\{y_n(x)\}$ là đều trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$ nên hàm giới hạn y(x) liên tục trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$. Đẳng thức (2.7) và sự liên tục của hàm f cho ta khẳng định được rằng y(x) là hàm khả vi trên $[x_o - h, x_o + h]$. Lấy đạo hàm hai vế của (2.7) ta có

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ x \in [x_o - h, x_o + h]$$

Hiển nhiên $y(x_o) = y_o$. Vậy y(x) là nghiệm của bài toán Côsi xác định trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$.

Bây giờ ta chứng minh rằng nghiệm này là duy nhất. Giả sử còn có nghiệm $\bar{y}(x)$ của phương trình (2.1) xác định trên khoảng $[x_o - h', x_o + h']$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\bar{y}(x_o) = y_o$. Khi đó

$$\bar{y}'(x) \equiv f(x, \bar{y}(x)) \text{ trên } [x_o - h', x_o + h']$$

Tích phân đồng nhất thức này với $x \in [x_o - h', x_o + h']$ ta có

$$\bar{y}(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(\tau, \bar{y}(\tau))\, d\tau \qquad (2.8)$$

Đặt $\delta = \min\{h', h\}$ và xét các đẳng thức (2.6), (2.8) trên đoạn $[x_o - \delta, x_o + \delta]$. Trừ (2.8) cho (2.6) ta được

$$\bar{y}(x) - y_n(x) = \int_{x_o}^{x} [f(\tau, \bar{y}(\tau)) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))]\, d\tau$$

Ta chứng minh rằng

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}\delta^{n+1} \qquad (2.9)$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Thật vậy, với n = 0 ta có

$$|\bar{y}(x) - y_o(x)| = |\bar{y}(x) - y_o| = \left|\int_{x_o}^{x} f(\tau, \bar{y}(\tau))\, d\tau\right|$$

$$\leqslant M|x - x_o| \leqslant M\delta$$

Tương tự như trên ta chứng minh được rằng

$$|\bar{y}(x) - y_1(x)| \leqslant \frac{ML}{2!} |x - x_o|^2 ,$$

....

$$|\bar{y}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!} |x - x_o|^{n+1}$$

Do đó

$$|\bar{y}(x) - y_{n+1}(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} [f(\tau, \bar{y}(\tau)) - f(\tau, y_n(\tau))]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} \left| \int_{x_o}^{x} |\tau - x_o|^{n+1} d\tau \right| = \frac{ML^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_o|^{n+2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ML^{n+1}}{(n+2)!} \delta^{n+2} \qquad (2.10)$$

Vì chuỗi $M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{(n+1)!} \delta^{n+1}$ hội tụ nên số hạng tổng quát của nó dần tới 0 khi $n \to \infty$. Từ (2.10) ta suy ra

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = \bar{y}(x),\ x \in [x_o - \delta,\ x_o + \delta]$$

Do tính duy nhất của giới hạn ta đi đến kết luận

$$\bar{y}(x) \equiv y(x).$$

Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả. Giả sử hàm f liên tục cùng với đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ trong miền G. Khi đó qua mỗi điểm trong $(x_o, y_o) \in G$ có một và chỉ một đường cong tích phân của hệ (2.1) đi qua.

Thật vậy, vì $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục nên giới nội trên hình chữ nhật Q tâm tại (x_o, y_o). Do đó thỏa mãn điều kiện Lipsit trên Q. Áp dụng định lí ta suy ra điều cần chứng minh.

4. Sự kéo dài nghiệm. Ở trên ta đã chứng minh rằng, với điều kiện đã nêu trong định lý, tồn tại duy nhất nghiệm y(x) của (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$. Nghiệm này xác định trên đoạn $[x_o - h, x_o + h]$. Đặt $x_o + h = x_o^1$, $y(x_o + h) = y(x_o^1) = y_o^1$. Nếu điểm (x_o^1, y_o^1) là điểm trong của miền G thì tồn tại hình chữ nhật Q_1 với tâm tại (x_o^1, y_o^1) sao cho $Q_1 \subset G$. Theo lý luận trên, tồn tại nghiệm $y_1(x)$ của phương trình (2.1) xác định trên đoạn $[x_o^1 - h_1, x_o^1 + h_1]$ sao cho $y_1(x_o^1) = y_o^1$. Do tính duy nhất nghiệm ta suy ra rằng $y_1(x) \equiv y(x)$ trên phần giao của hai đoạn $[x_o - h, x_o + h]$ và $[x_o^1 - h_1, x_o^1 + h_1]$. Khoảng $(x_o^1, x_o^1 + h_1]$ không thuộc đoạn $[x_o - h, x_o + h]$. Do vậy nghiệm $y_1(x)$ trên khoảng này được gọi là phần kéo dài (thác triển) của nghiệm y(x). Tương tự nếu điểm (x_o^2, y_o^2) với $x_o^2 = x_o^1 + h_1$, $y_o^2 = y_1(x_o^2)$ là điểm trong của miền G thì ta có thể kéo dài tiếp nghiệm y(x) lên khoảng $(x_o^2, x_o^2 + h_2]$ theo cách trên. Có thể chứng minh rằng quá trình kéo dài như trên có thể tiếp tục đến tận biên của miền G. Thật vậy, giả sử G_1 là miền đóng giới nội bất kì chứa trong G cùng với biên của nó. Ta chứng minh rằng, tiến hành quá trình kéo dài nghiệm như trên có thể kéo dài nghiệm đến biên của miền G_1. Do G_1 là tập đóng và không có điểm chung với biên của miền G (cũng là tập đóng) nên khoảng cách giữa hai tập đóng này là $d > 0$. Tại mỗi điểm của biên miền G_1 ta kẻ hình tròn bán kính $\frac{d}{2}$ và tâm tại điểm đó. Hợp của G_1 và tất cả các hình tròn đóng này lập nên miền đóng G_2 chứa trong G. Do cách xây dựng G_2 nên mỗi hình vuông cạnh bằng $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ và tâm tại bất kì điểm nào của G_1 cũng chứa hoàn toàn trong G_2. Hàm f(x, y) liên tục trên miền đóng G_2 nên bị chặn trên đó :

$$|f(x, y)| \leqslant M_2 \qquad \forall (x, y) \in G_2$$

Bây giờ tại mọi điểm của G_1 ta có thể chọn hình chữ nhật Q là hình vuông cạnh $a = \frac{d\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{d\sqrt{2}}{4}$, $M = M_2$. Khi đó theo chứng minh trên, đường cong tích phân qua điểm trong (x_o, y_o) bất kì của G_1 sẽ xác định trên khoảng $(x_o - h_2, x_o + h_2)$ trong đó $h_2 = \min\left\{\frac{d\sqrt{2}}{4}, \frac{d\sqrt{2}}{4M_2}\right\}$. Vì h_2 không phụ thuộc (x_o, y_o) và khoảng cách từ (x_o, y_o) đến biên của G_1 là hữu hạn nên tiến hành quá trình thác triển nghiệm như trên, sau một số hữu hạn bước chúng ta sẽ tới biên của miền G_1. Vì G_1 là miền đóng bất kì chứa trong G nên quá trình thác triển nghiệm như trên có thể tiến hành đến lân cận bé tùy ý của biên miền G.

§3. CÁC LOẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Xét phương trình

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

f xác định và liên tục trên miền $G \subset \mathbb{R}^2$.

Định nghĩa 1. Ta nói rằng G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm đối với phương trình (3.1) nếu qua mỗi điểm của miền G có một và chỉ một đường cong tích phân của (3.1) đi qua.

Trong §2 ta đã biết điều kiện đủ để G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (2.1).

Trong tiết này ta sẽ luôn giả thiết rằng G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (2.1).

1. Nghiệm tổng quát. Ta nói rằng, hàm

$$y = \varphi(x, C) \tag{3.2}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) trong miền G nếu

a) Từ hệ thức

$$y_o = \varphi(x_o, C) \tag{3.3}$$

ta có thể giải ra được

$$C = \psi(x_o, y_o) \tag{3.4}$$

với mỗi $(x_o, y_o) \in G$.

b) Hệ thức (3.2) là nghiệm của (3.1) với mỗi hằng số C được xác định từ (3.4).

Từ định nghĩa trên ta suy ra cách tìm nghiệm của bài toán Côsi từ nghiệm tổng quát (3.2).

Chú ý. Như vậy khi ta nói một hệ thức $y = \varphi(x, C)$ là nghiệm tổng quát của (3.1) là ngầm hiểu biểu thức đó là nghiệm tổng quát trong miền G nào đó.

Ví dụ. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Ta chứng minh rằng, hệ thức $y = Cx$ $(x \neq 0)$ là nghiệm tổng quát của phương trình trên trong miền

$$G = \begin{cases} 0 < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

Thật vậy, G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm vì hàm $f(x, y) = \frac{y}{x}$ liên tục trong G và có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$ cũng liên tục trong G.

Với mỗi $(x_o, y_o) \in G$ hệ thức

$$y_o = Cx_o$$

cho ta giải được $C = \frac{y_o}{x_o}$

Dễ kiểm tra trực tiếp rằng biểu thức $y = Cx = \frac{y_o}{x_o} x$ là nghiệm của phương trình trên trong miền G.

2. Tích phân tổng quát. Nhiều khi giải phương trình (3.1) ta đi đến hệ thức dạng

$$\psi(x, y) = C$$

hay tổng quát hơn, dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (3.5)$$

Hệ thức (3.5) được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (3.1) trong miền G nếu trong miền đó (3.5) xác định nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ của phương trình (3.1).

Ví dụ. Phương trình

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

có tích phân tổng quát là

$$x^2 + y^2 = C \qquad (C > 0)$$

vì ở trong nửa mặt phẳng phía trên nó xác định nghiệm tổng quát

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

và trong nửa mặt phẳng phía dưới nó xác định nghiệm tổng quát

$$y = -\sqrt{C - x^2}$$

Đôi khi tích phân phương trình (3.1) (nghĩa là giải (3.1)) ta thu được họ các đường cong tích phân phụ thuộc tham số C dạng

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \psi(t, C) \end{cases} \tag{3.6}$$

Họ các đường cong tích phân dạng (3.6) được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) dưới dạng tham số.

Ví dụ. Phương trình

$$y' = -\frac{x}{y}$$

có nghiệm tổng quát dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = C\cos t \\ y = C\sin t \end{cases}$$

Khử t ta đi đến tích phân tổng quát :

$$x^2 + y^2 = C.$$

3. Nghiệm riêng. Nghiệm của (3.1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được bảo đảm, được gọi là *nghiệm riêng*. Điều này có nghĩa là tại mỗi điểm của đường cong tích phân ứng với nghiệm riêng không có một đường cong tích phân nào khác nó đi qua.

Như vậy, nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị xác định của hằng số C là nghiệm riêng.

4. Nghiệm kì dị. Nghiệm của phương trình (3.1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi bị phá vỡ, được gọi là *nghiệm kì dị*. Như vậy, tại mỗi điểm của đường cong tích phân ứng với nghiệm kì dị có ít nhất một đường cong tích phân khác nó đi qua. Trong miền tồn tại và duy nhất nghiệm không thể có đường cong tích phân ứng với nghiệm kì dị. Bởi vậy nghiệm kì dị không thể nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị xác định của hằng số C bất kì.

Ngoài ra, đối với phương trình (3.1) có thể tồn tại nghiệm không phải là kì dị và cũng không phải là nghiệm riêng. Chẳng hạn khi ta "dán" một phần nghiệm kì dị và một phần nghiệm riêng với nhau. Nghiệm như thế ta gọi là nghiệm trung gian.

Ví dụ. Xét phương trình

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y \geqslant 0) \tag{3.7}$$

Giả sử $y \neq 0$. Chia 2 vế của (3.7) cho $2\sqrt{y}$ ta có

$$(\sqrt{y})' = 1.$$

Do đó $\sqrt{y} = x + C$.

Ở đây $x > -C$ vì $x + C > 0$. Do đó phương trình (3.7) trong miền

$$G = \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$$

có nghiệm tổng quát là

$$y = (x + C)^2, \quad x > -C \tag{3.8}$$

Đây là họ các nhánh bên phải của các parabol mà trục đối xứng song song với trục Oy, còn đỉnh nằm trên trục Ox.

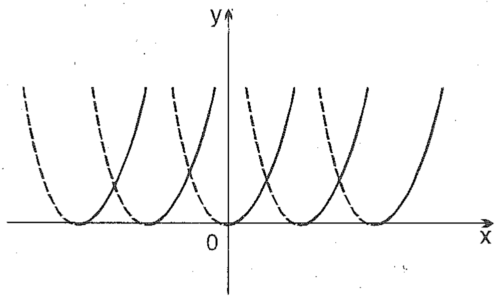
Thật vậy, miền G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm của (3.7) vì trong G hàm $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ liên tục và có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ cũng liên tục. Hệ thức $y_o = (x_o + C)^2$, $(x_o > -C)$ với mỗi $(x_o, y_o) \in G$ cho phép ta giải được

$$C = \sqrt{y_o} - x_o$$

Ngoài ra thay (3.8) vào (3.7) ta có đồng nhất thức

$$2(x + C) \equiv \sqrt{(x + C)^2} \qquad (x > -C)$$

tức là (3.8) thỏa mãn phương trình (3.7).



Hình 2

Bởi vậy (3.8) là nghiệm tổng quát của (3.7) trong miền G. Họ các đường cong tích phân được biểu diễn trên hình 2. Ta nhận thấy rằng phương trình (3.7) còn có nghiệm $y(x) \equiv 0$. Nghiệm này là nghiệm kì dị của phương trình (3.1) vì qua mỗi điểm của đường cong tích phân tương ứng với nó là trục hoành có ít nhất 2 đường cong tích phân của phương trình (3.7) đi qua. Nghiệm $y = x^2$ $(x > 0)$ hoặc $y = (x + 1)^2$ $(x > -1)$ là các nghiệm riêng. Chúng nhận được từ nghiệm tổng quát bởi các giá trị $C = 0$, $C = 1$ tương ứng.

Nhận xét. Việc tìm nghiệm tổng quát (tích phân tổng quát) của phương trình (3.1) nói chung là rất khó. Sau đây ta sẽ xét một lớp các phương trình mà ta có thể tìm được nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát. Những phương trình như vậy đôi khi được gọi là phương trình cầu phương được. Việc giải phương trình, tức là tìm tích phân tổng quát hoặc nghiệm tổng quát của nó còn được gọi là tích phân phương trình.

§4. PHƯƠNG TRÌNH BIẾN SỐ PHÂN LI VÀ PHÂN LI ĐƯỢC

1. Phương trình biến số phân li

Đó là phương trình dạng

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

Ở đây hệ số của dx là hàm chỉ phụ thuộc biến x, hệ số của dy là hàm chỉ phụ thuộc biến y. Ta sẽ giả thiết rằng các hàm X, Y liên tục trong miền xác định của chúng. Khi đó phương trình (4.1) viết được dưới dạng

$$d\left[\int X(x)dx + \int Y(y)dy\right] = 0.$$

Do đó

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C \tag{4.2}$$

Biểu thức (4.2) cho ta tích phân tổng quát của phương trình (4.1).

Nghiệm bài toán Côsi $y(x_o) = y_o$ được xác định từ hệ thức

$$\int_{x_o}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_o}^{y} Y(\tau)d\tau = 0 \tag{4.3}$$

Thật vậy, nếu $y = y(x)$ là nghiệm của bài toán Côsi $y(x_o) = y_o$ xác định tại lân cận điểm x_o thì tích phân hai vế đồng nhất thức

$$X(x)dx + Y(y(x))dy(x) \equiv 0$$

từ x_o đến x và đổi biến lấy tích phân ta đi đến đẳng thức (4.3).

Ví dụ. Phương trình

$$\frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{2y}{1+y^2}dy = 0$$

có tích phân tổng quát là

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \int \frac{2y}{1+y^2}dy = C$$

hay

$$\ln(1 + x^2) + \ln(1 + y^2) = C, C > 0$$

Do đó

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C', C' = e^C$$

là tích phân tổng quát của phương trình.

Chú ý. Sau này khi giải phương trình vi phân cấp một, thực chất là tìm cách đưa phương trình đang xét về dạng phương trình biến số phân li (4.1). Quá trình làm như vậy đôi khi được gọi là quá trình phân li biến số. Một phương trình vi phân cấp 1 có thể coi như đã giải xong nếu chúng ta phân li được biến số.

2. Phương trình biến số phân li được. Đó là phương trình dạng

$$m_1(x)n_1(y)dx + m_2(x)n_2(y)dy = 0 \qquad (4.4)$$

Ở đây các hàm m_1, n_1, m_2, n_2 được giả thiết là liên tục trong miền đang xét.

Giả sử $n_1(y)m_2(x) \neq 0$. Chia hai vế của (4.4) cho biểu thức này ta được

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = 0, \qquad (4.5)$$

tức là ta đi đến phương trình biến số phân li. Bởi vậy tích phân tổng quát của phương trình (4.4) sẽ là

$$\int \frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \int \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = C$$

Chú ý. Để đi đến phương trình biến số phân li (4.5) ta đã giả thiết $n_1(y)m_2(x) \neq 0$. Xét trường hợp $n_1(y)m_2(x) = 0$. Nếu $y = a$ là nghiệm của phương trình $n_1(y) = 0$ thì thay $y = a$ vào (4.4) và để ý rằng $n_1(a) = 0$, $d(a) = 0$ ta suy ra $y = a$ cũng là nghiệm của (4.4). Nếu trong phương trình (4.4) ta coi vai trò của x và y như nhau thì phương trình đó còn có nghiệm $x = b$, trong đó b là nghiệm của phương trình $m_2(x) = 0$.

Ví dụ. Xét phương trình

$$x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$$

Giả sử $\sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - x^2} \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho biểu thức này ta được phương trình biến số phân li

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình là

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = C,\ (C > 0)$$

Hệ thức $\sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - x^2} = 0$ cho ta các nghiệm $y_1(x) \equiv 1$, $y_2(x) \equiv -1$ $(-1 < x < 1)$ và $x_1(y) = 1$, $x_2(y) = -1$ $(-1 < y < 1)$.

§5. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

Trước hết ta nhớ lại định nghĩa hàm thuần nhất. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm thuần nhất bậc k nếu với bất kì t mà $f(tx, ty)$ còn được xác định ta có

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \tag{5.1}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$ từ (5.1) ta suy ra

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} f(x, y)$$

hay

$$f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{5.2}$$

Định nghĩa 1. Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5.3}$$

được gọi là phương trình thuần nhất (phương trình đẳng cấp) nếu $M(x, y)$, $N(x, y)$ là những hàm thuần nhất cùng bậc.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng, phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5.4}$$

là phương trình thuần nhất nếu $f(x, y)$ là hàm thuần nhất bậc 0.

Phương trình thuần nhất (5.3) hoặc (5.4) có thể đưa về phương trình biến số phân li nhờ phép thế $y = xz$, trong đó $z = z(x)$ là hàm số mới phải tìm. Thật vậy, theo (5.2) ta có thể viết

$$M(x, y) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) \; ; \; N(x, y) = x^k N\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Để ý rằng $\frac{y}{x} = z$ và $dy = xdz + zdx$ ta đưa phương trình (5.3) về dạng

$$x^k M(1, z)dx + x^k N(1, z)(xdz + zdx) = 0$$

hay (giả thiết $x \neq 0$)

$$(M(1, z) + zN(1, z))dx + xN(1, z)dz = 0 \tag{5.5}$$

Giả sử $M(1, z) + zN(1, z) \neq 0$. Chia hai vế phương trình (5.5) cho biểu thức này ta được phương trình biến số phân li :

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} dz = 0 \tag{5.6}$$

Tích phân phương trình (5.6) có dạng

$$\ln|x| + \int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} dz = \ln C_1 \qquad (C_1 > 0)$$

hay

$$x = Ce^{-\int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)} dz} \qquad (C = \pm C_1)$$

Kí hiệu

$$\psi(z) = -\int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} dz$$

ta có

$$x = Ce^{\psi(z)}$$

Thay $z = \frac{y}{x}$ ta suy ra tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất (5.3) có dạng

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Xét trường hợp $M(1, z) + zN(1, z) = 0$. Giả sử $z = a$ là một nghiệm của phương trình này. Thay $z = a$ vào (5.5) ta thấy $z = a$ là nghiệm của phương trình (5.5) và vì thế $y = ax$ là nghiệm của phương trình (5.3). Nghiệm này có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm kì dị. Ngoài ra $x = 0$ $(y \neq 0)$ cũng là nghiệm của (5.3).

Ví dụ. Xét phương trình

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

Trước hết ta nhận thấy rằng các đường cong tích phân của phương trình này chỉ có thể nằm trên góc tọa độ thứ nhất và thứ ba vì x và y phải là những giá trị cùng dấu thì vế phải phương trình sẽ được xác định.

Đặt $y = xz$ ta đưa phương trình đang xét về phương trình

$$xz' + z = \sqrt{z}$$

Với giả thiết $x \neq 0$, $z - \sqrt{z} \neq 0$ phương trình đưa được về dạng biến số phân li

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - \sqrt{z}} = 0$$

Tích phân phương trình này là

$$2\ln|\sqrt{z} - 1| + \ln|x| = \ln C_1 \qquad (C_1 > 0)$$

hay $$(\sqrt{z} - 1)^2|x| = C_1$$

Trở lại biến y suy ra

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)^2 |x| = C_1$$

Từ đây, sau khi giản ước ta được

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = C \text{ nếu } x > 0,\ y > 0\ ;$$
$$\sqrt{-y} - \sqrt{-x} = C \text{ nếu } x < 0,\ y < 0$$
$$(C = \pm\sqrt{C_1})$$

Xét trường hợp $z - \sqrt{z} = 0$. Ta có 2 nghiệm của phương trình này là $z = 0$, $z = 1$ tương ứng với 2 nghiệm của phương trình ban đầu là $y = 0$, $y = x$ $(x \neq 0)$. Nghiệm $y = 0$ $(x \neq 0)$ là nghiệm kì dị, còn $y = x$ $(x \neq 0)$ là nghiệm riêng. Ngoài ra các nửa trục tọa độ $x = 0$ $(y \neq 0)$ cũng là các đường cong tích phân.

Tính chất của các đường cong tích phân phương trình thuần nhất

Trước hết từ (5.2) ta suy ra rằng phương trình thuần nhất cấp 1 có thể viết được dưới dạng

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.7}$$

Hàm φ không xác định tại gốc tọa độ O(0, 0). Tại mọi điểm của nửa đường thẳng $y = kx$ $(x \neq 0)$ hàm φ nhận giá trị không đổi $\varphi(k)$. Do đó tại mọi điểm của đường thẳng này trường hướng không thay đổi.

Định nghĩa 2. Đường cong mà tại mỗi điểm của nó trường hướng của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

không thay đổi được gọi là *đường thẳng phụ*.

Như vậy phương trình thuần nhất (5.7) có đường thẳng phụ là các nửa đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ.

Giả sử γ là một đường cong tích phân nào đó của (5.7) khác nửa đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ. Nếu ta tăng hoặc giảm bán kính vectơ tại các điểm của đường cong γ một số lần như nhau thì ta thu được đường cong γ' có tính chất là hướng của tiếp tuyến tại mọi điểm của nó trùng với hướng của tiếp tuyến tại các điểm tương ứng của γ. Bởi vậy γ' cũng là một đường cong tích phân của phương trình (5.7). Thật vậy, nếu ta kí hiệu (x_1, y_1) là tọa độ mỗi điểm của đường cong γ' ; (x, y) là tọa độ mỗi điểm của đường cong γ thì $x_1 = kx$, $y_1 = ky$.

Do đó

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{kdy}{kdx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

Như đã biết, phép biến đổi như trên được gọi là phép biến đổi đồng dạng với tâm đồng dạng tại gốc tọa độ.

Ta đi đến kết luận : Đường cong nhận được từ đường cong tích phân của phương trình thuần nhất qua phép biến đổi đồng dạng với tâm tại gốc tọa độ cũng là đường cong tích phân của phương trình thuần nhất đó.

Ngược lại tất cả các đường cong tích phân của phương trình thuần nhất xác định được từ biểu thức của tích phân tổng quát

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

và không phải là các nửa đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ đều có thể nhận được từ một đường cong tích phân khác dạng trên qua phép biến đổi đồng dạng với tâm tại gốc tọa độ.

Thật vậy, giả sử $x = C_1e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$, $x = C_2e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$ là 2 đường cong tích phân dạng trên. Kí hiệu (x_1, y_1), (x_2, y_2) là các tọa độ tương ứng của mỗi điểm của các đường cong này :

$$x_1 = C_1 e^{\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}, \quad x_2 = C_2 e^{\psi\left(\frac{y_2}{x_2}\right)}$$

Từ quá trình tích phân phương trình thuần nhất ta có $\frac{y_1}{x_1} = z = \frac{y_2}{x_2}$ nên

$$x_1 = C_1 e^{\psi(z)}, \quad x_2 = C_2 e^{\psi(z)}$$

hay $$\frac{x_2}{x_1} = \frac{C_2}{C_1} = k$$

Do đó $x_2 = kx_1$

$$y_2 = x_2 z = x_2 \cdot \frac{y_1}{x_1} = ky_1.$$

Đây là điều cần chứng minh.

Từ quá trình lí luận trên ta suy ra một số tính chất sau đây của các đường cong tích phân phương trình thuần nhất.

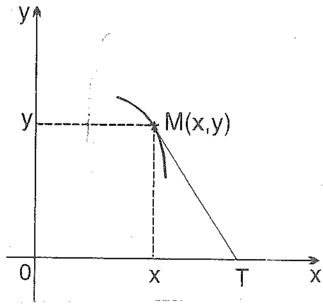
1) Nếu một đường cong tích phân khác nửa đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ nằm ở trên phần mặt phẳng gồm giữa 2 tia $y = z_1 x$, $y = z_2 x$ đạt đến gốc tọa độ thì mọi đường cong tích phân khác nằm ở trong phần mặt phẳng trên cũng đạt đến gốc tọa độ.

2) Đường cong đối xứng qua gốc tọa độ với một đường cong tích phân khác cũng là đường cong tích phân.

3) Nếu một đường cong tích phân là đường cong đóng thì mọi đường cong tích phân đều đóng.

Các nhận xét trên cho ta một hình ảnh về bức tranh các đường cong tích phân phương trình thuần nhất ở trong miền xác định của nó.

Ví dụ. Tìm các đường cong mà đối với chúng đoạn thẳng tiếp tuyến nối tiếp điểm với giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành bằng hoành độ của giao điểm này. Ta gọi tọa độ điểm của đường cong là (x, y). Theo giả thiết ta có



Hình 3

$$MT = OT$$

Vì

$MT = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2}$; $OT = x - \frac{y}{y'}$. Do đó phương trình vi phân của đường cong là

$$y^2 + \frac{y^2}{y'^2} = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2$$

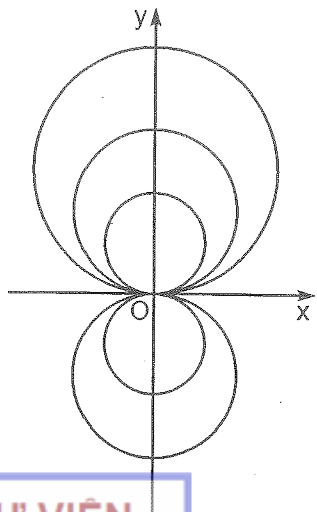
Từ đây suy ra

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Đây là phương trình thuần nhất. Tích phân nó ta được

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = C$$

là tích phân tổng quát. Đây là họ các đường tròn tâm nằm trên trục tung và tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ. Dễ thấy các đường tròn này có thể nhận được từ một trong chúng qua phép biến đổi đồng dạng tâm tại gốc tọa độ (h.4).



Hình 4

§6. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{6.1}$$

Nếu $c_1 = c_2 = 0$ thì (6.1) là phương trình thuần nhất. Bây giờ giả sử một trong 2 số c_1, c_2 khác 0. Ta tìm cách đưa (6.1) về phương trình thuần nhất. Xét 2 trường hợp sau :

a) Giả sử định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Áp dụng phép thế biến

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \tag{6.2}$$

trong đó u, v là biến mới ; α, β là các số ta cần tìm để đưa (6.1) về phương trình thuần nhất. Thay (6.2) vào (6.1) ta được

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right) \tag{6.3}$$

Để (6.3) là phương trình thuần nhất ta chọn α, β sao cho

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có nghiệm duy nhất vì định thức Crame của hệ khác 0.

b) Định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Khi đó $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. Do đó phương trình (6.1) có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y)$$

Đặt $a_1x + b_1y = z$ ta đi đến phương trình biến số phân li dạng

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\varphi(z).$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}$$

Đặt $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ trong đó α, β là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -7\alpha + 3\beta = -7 \\ 3\alpha - 7\beta = 3 \end{cases}$$

Ta tìm được $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Sau phép thế biến trên phương trình đưa về dạng

$$\frac{dv}{du} = \frac{-7u + 3v}{3u - 7v} = \frac{-7 + 3\dfrac{v}{u}}{3 - 7\dfrac{v}{u}}$$

Đặt $\dfrac{v}{u} = z$ ta đưa về phương trình

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{-7 + 3z}{3 - 7z}$$

Tích phân phương trình này và chú ý rằng $z = \dfrac{v}{u} = \dfrac{y}{x - 1}$ ta tìm được tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là

$$(y + x - 1)^5(y - x + 1)^2 = C$$

§7. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT SUY RỘNG

Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7.1)$$

được gọi là phương trình thuần nhất suy rộng nếu tồn tại số k sao cho

$$M(tx, t^k y) = t^m M(x, y) \ ;$$

$$N(tx, t^k y) = t^{m-k+1} N(x, y)$$

Trong trường hợp k = 1 phương trình (7.1) trở thành phương trình thuần nhất thông thường.

Nếu lấy $t = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ thì ta có

$$M\left(1, \frac{y}{x^k}\right) = \frac{1}{x^m} M(x, y) \ ;$$

$$N\left(1, \frac{y}{x^k}\right) = \frac{1}{x^{m-k+1}} N(x, y)$$

Do đó

$$\begin{cases} M(x, y) = x^m M\left(1, \dfrac{y}{x^k}\right) \\ N(x, y) = x^{m-k+1} N\left(1, \dfrac{y}{x^k}\right) \end{cases} \quad (7.2)$$

Áp dụng (7.2) và phép thế biến $y = x^k z$ ta có

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = x^m M(1, z)dx + x^{m-k+1} N(1, z)(x^k dz + + kx^{k-1} z dx) = x^m[M(1, z) + kzN(1, z)]dx + x^{m+1} N(1, z)dz$

Bởi vậy, bằng phép thế $y = x^k z$ $(x \neq 0)$ ta đưa phương trình (7.1) về dạng $(M(1, z) + kzN(1, z)]dx + xN(1, z)dz = 0$.

Đây là phương trình biến số phân li được.

Giả sử $M(1, z) + kzN(1, z) \neq 0$. Khi đó

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + kzN(1, z)} dz = 0$$

Tích phân phương trình sau cùng này ta được :

$$x = Ce^{\psi(z)}$$

trong đó

$$\psi(z) = -\int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + kzN(1, z)}\, dz$$

Trở lại biến cũ y ta có tích phân tổng quát của phương trình (7.1) dạng

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x^k}\right)}$$

Nghiệm kì dị của phương trình (7.1) chỉ có thể là các hàm

$$x = 0, \ y = ax^k$$

trong đó a là nghiệm của phương trình

$$M(1, z) + kzN(1, z) = 0.$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0$$

Ta tìm k sao cho với mọi t ta có

$$(6 - t^{2k+2}x^2y^2) = t^m(6 - x^2y^2) ;$$

$$t^2x^2 = t^{m-k+1}x^2$$

Từ hệ thức thứ hai suy ra

$$m - k + 1 = 2$$

$$\Rightarrow m - k = 1 \Rightarrow m = k + 1.$$

Thay vào hệ thức thứ nhất ta được

$$k + 1 = 0 \text{ hay } k = -1$$

Vậy phải áp dụng phép thế biến $y = \dfrac{z}{x}$. Thay vào phương trình ban đầu ta đi đến phương trình

$$xdz - (z^2 + z - 6)dx = 0$$

Tích phân phương trình này tìm được

$$z = \frac{2 - 3Cx^5}{1 - Cx^5}$$

Trở lại biến y, ta được tích phân tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = \frac{2 - 3Cx^5}{x(1 - Cx^5)}$$

Phương trình trên không có nghiệm kì dị.

§8. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP MỘT

1. Cách giải. Phương trình tuyến tính cấp một có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{8.1}$$

Ta giả thiết p(x), q(x) liên tục trên khoảng (a, b). Khi đó trong miền

$$G = \begin{cases} a < x < b \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình (8.1) tồn tại và duy nhất. Thật vậy, nếu viết (8.1) dưới dạng

$$y' = -p(x)y + q(x)$$

thì hàm $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ liên tục và có đạo hàm riêng theo y liên tục trong G. Do đó theo hệ quả của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm (xem §2) ta suy ra nhận xét trên.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (8.1), trước hết ta xét phương trình

$$y' + p(x)y = 0 \tag{8.2}$$

(8.2) được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với (8.1). Ta viết lại (8.2) dưới dạng

$$dy + p(x)ydx = 0 \tag{8.3}$$

Giả sử $y \neq 0$. Chia 2 vế của (8.3) cho y :

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \qquad (8.4)$$

Tích phân phương trình (8.4) ta được

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0) \qquad (8.5)$$

Nhận thấy $y \equiv 0$ cũng là nghiệm của (8.2). Nghiệm này có thể nhận được từ (8.5) nếu trong biểu thức (8.5) ta lấy cả giá trị $C = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (8.2) có dạng

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \ C \in \mathbb{R} \qquad (8.6)$$

Để tìm nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (8.1) ta áp dụng phương pháp được gọi là phương pháp biến thiên hằng số như sau : Trong biểu thức (8.6) ta coi C không phải là hằng số mà là hàm số của x : $C = C(x)$ và tìm cách chọn C(x) sao cho biểu thức

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (8.7)$$

thỏa mãn phương trình (8.1). Thay (8.7) vào (8.1) ta có

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay $$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Từ đây suy ra

$$C(x) = \int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx + C \qquad (8.8)$$

Thay biểu thức C(x) từ (8.8) vào (8.7) ta được nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (8.1) :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}[C + \int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx] \qquad (8.9)$$

Nhận xét. Khi $q(x) \equiv 0$, biểu thức (8.9) cho ta nghiệm tổng quát dạng (8.6) của phương trình tuyến tính thuần nhất.

2. Nghiệm bài toán Côsi. Giả sử $(x_o, y_o) \in G$. Ta tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (8.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$. Kí hiệu

$$\Phi(x) = \int p(x)dx.$$

Khi đó (8.9) được viết dưới dạng

$$y(x) = e^{-\Phi(x)}\left[C + \int q(x)e^{\Phi(x)}dx\right] \tag{8.10}$$

Đặt

$$\psi(x) = \int q(x)e^{\Phi(x)}dx$$

và viết lại (8.10) dưới dạng

$$y(x) = e^{-\Phi(x)}[C + \psi(x)] \tag{8.11}$$

Theo điều kiện ban đầu ta có

$$y_o = y(x_o) = e^{-\Phi(x_o)}[C + \psi(x_o)]$$

Từ đây suy ra

$$C = y_o e^{\Phi(x_o)} - \psi(x_o).$$

Thay giá trị này của C vào (8.11) ta được

$$y(x) = e^{-\Phi(x)}[y_o e^{\Phi(x_o)} - \psi(x_o) + \psi(x)]$$

$$= e^{-(\Phi(x) - \Phi(x_o))} y_o + e^{-\Phi(x)}(\psi(x) - \psi(x_o)).$$

Từ đây và từ công thức Niutơn–Leibnit ta thu được

$$y(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} p(\tau)d\tau} y_o + e^{-\Phi(x)} \int_{x_o}^{x} q(\tau)e^{\Phi(\tau)}d\tau =$$

$$= e^{-\int_{x_o}^{x} p(\tau)d\tau} y_o + e^{-\Phi(x) + \Phi(x_o)} \int_{x_o}^{x} q(\tau)e^{\Phi(\tau) - \Phi(x_o)}d\tau$$

hay

$$y(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} p(\tau)d\tau}\left[y_o + \int_{x_o}^{x} q(\tau)e^{\int_{x_o}^{\tau} p(s)ds}d\tau\right] \tag{8.12}$$

Biểu thức nghiệm bài toán Côsi dạng (8.12) có nhiều ứng dụng khi nghiên cứu một số tính chất của nghiệm phương trình tuyến tính cấp một.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' - \frac{2}{x} y = x \tag{8.13}$$

Dễ kiểm tra được rằng phương trình thuần nhất tương ứng có nghiệm tổng quát là

$$y_{tn} = Cx^2$$

Ta tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = C(x)x^2$$

Thay vào phương trình (8.13) ta được

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x} C(x)x^2 = x$$

hay là

$$C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Do đó

$$C(x) = \ln|x| + C$$

và nghiệm tổng quát của phương trình (8.13) là

$$y = Cx^2 + x^2\ln|x|.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình

$$y' + y = f(x) \tag{8.14}$$

có nghiệm giới nội duy nhất trên toàn trục số $\mathbb{R}$ nếu f(x) là hàm liên tục giới nội trên toàn trục số và nghiệm đó là hàm tuần hoàn nếu f(x) là hàm tuần hoàn.

Giả sử y(x) là nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ của phương trình (8.14). Đặt $y_o = y(0)$ và áp dụng công thức (8.12) ta có

$$y(x) = e^{-x}\left(y_o + \int_{x_o}^{x} e^{\tau}f(\tau)d\tau\right) = y_o e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^{\tau}f(\tau)d\tau$$

Từ đây suy ra

$$y_o = e^x y(x) - \int_0^x e^\tau f(\tau)d\tau \qquad (8.15)$$

Vì y(x) giới nội trên $\mathbb{R}$ nên khi $x \to -\infty$ thì số hạng thứ nhất ở vế phải dần tới 0. Do đó sau khi chuyển qua giới hạn trong đẳng thức (8.15) khi $x \to -\infty$ ta được

$$y_o = -\int_0^{-\infty} e^\tau f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 e^\tau f(\tau)d\tau.$$

Bởi vậy nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ y(x) có dạng

$$y(x) = e^{-x}\left(\int_{-\infty}^0 e^\tau f(\tau)d\tau + \int_0^x e^\tau f(\tau)d\tau\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^x e^{\tau - x} f(\tau)d\tau \qquad (8.16)$$

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra trực tiếp rằng biểu thức (8.16) cho ta nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ của phương trình (8.14). Nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ của phương trình (8.14) là duy nhất vì nếu có hai nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ thì hiệu của chúng sẽ cho ta nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ của phương trình thuần nhất tương ứng :

$$\frac{dz}{dx} + z = 0$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$z = Ce^{-x}$$

Nghiệm này chỉ có thể giới nội trên $\mathbb{R}$ khi C = 0, tức là nghiệm tầm thường. Từ đây suy ra điều cần chứng minh. Bây giờ giả sử f(x) là hàm tuần hoàn liên tục với chu kì ω : $f(x + \omega) = f(x)$. Ứng với f(x) tuần hoàn này ta có nghiệm giới nội duy nhất y(x) trên $\mathbb{R}$ của phương trình (8.14). Xét hàm

$y_1(x) = y(x+\omega)$. Hiển nhiên $y_1(x)$ xác định và giới nội trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, ta có

$$\frac{d}{dx}\, y_1(x) = \frac{d}{d(x+\omega)}\, y_1(x) = \frac{dy(x+\omega)}{d(x+\omega)} =$$

$$= -y(x+\omega) + f(x+\omega) = -y_1(x) + f(x)$$

vì $y(x)$ là nghiệm của (8.14) trên $\mathbb{R}$. Hệ thức sau cùng chứng tỏ rằng $y_1(x)$ là nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ của phương trình (8.14). Do tính duy nhất của nghiệm giới nội trên $\mathbb{R}$ đối với phương trình (8.14) ta suy ra $y_1(x) \equiv y(x)$ hay $y(x+\omega) = y(x)$. Chứng tỏ $y(x)$ là nghiệm tuần hoàn chu kì ω.

§9. PHƯƠNG TRÌNH BECNULI

Phương trình Becnuli có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{9.1}$$

$p(x)$, $q(x)$ là những hàm liên tục trên khoảng (a, b) nào đó. Ta sẽ giả thiết $\alpha \neq 1$ và $\alpha \neq 0$ vì nếu $\alpha = 1$ ta sẽ được phương trình tuyến tính thuần nhất dạng

$$y' + (p(x) - q(x))y = 0,$$

còn nếu $\alpha = 0$ ta được phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp 1.

Giả sử $y \neq 0$. Nhân 2 vế của (9.1) cho $y^{-\alpha}$ ta được

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \tag{9.2}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ hay $y^{-\alpha}y' = \dfrac{1}{1-\alpha}z'$.

Thay biểu thức này vào (9.2) và chú ý rằng $y^{1-\alpha} = z$ ta đi đến phương trình tuyến tính cấp 1 dạng

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x) \tag{9.3}$$

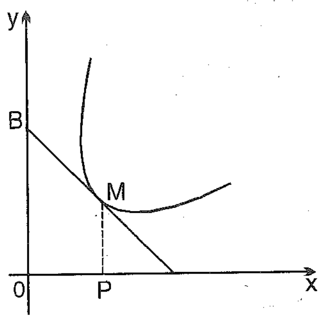
Giả sử $z = \varphi(x, C)$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1 (9.3). Khi đó hệ thức

$$y^{1-\alpha} = \varphi(x, C)$$

cho ta tích phân tổng quát của phương trình Becnuli (9.1).

Ngoài ra nếu $\alpha > 0$ thì $y \equiv 0$ cũng là nghiệm của phương trình (9.1). Nếu $\alpha > 1$ thì nghiệm $y(x) \equiv 0$ là nghiệm riêng ; nếu $0 < \alpha < 1$ thì $y(x) \equiv 0$ là nghiệm kì dị. Điều này có thể suy ra từ định lí tồn tại và duy nhất nghiệm.

Ví dụ. Tìm các đường cong mà đoạn thẳng OB bị cắt bởi tiếp tuyến trên trục tung bằng bình phương tung độ PM của tiếp điểm (hình 5).



Hình 5

Giả sử $M(x, y)$ là điểm nằm trên đường cong phải tìm $y = y(x)$. Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm M có dạng

$$Y - y = y'(X - x)$$

Cho $X = 0$ ta được $Y = OB = y - xy'$.

Theo giả thiết

$$y - xy' = y^2$$

hay

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2 \tag{9.4}$$

Đây là phương trình Becnuli với $\alpha = 2$.

Nhân 2 vế của (9.4) với y^{-2} :

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Đặt $y^{-1} = z$ ta đi đến phương trình tuyến tính cấp 1 :

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$$

Giải phương trình này tìm được nghiệm tổng quát

$$z = \frac{1}{x}(C + x).$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (9.4) là

$$y = \frac{x}{C + x} \qquad (9.5)$$

Ngoài ra nó còn có nghiệm $y(x) \equiv 0$.

Như vậy các đường cong phải tìm là các đường hypecbol (9.5).

§10. PHƯƠNG TRÌNH ĐACBU

Phương trình Đacbu có dạng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0 \qquad (10.1)$$

Ở đây M, N là các hàm thuần nhất bậc α, P là hàm thuần nhất bậc β. Nếu $\beta = \alpha - 1$ thì phương trình Đacbu trở thành phương trình thuần nhất. Ta tìm cách đưa phương trình Đacbu về phương trình Becnuli. Áp dụng phép thế $y = xz$ trong đó z là hàm số mới phải tìm. Khi đó

$$dy = xdz + zdx \ ; \ xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 dz.$$

Do đó (xem §5) phương trình (10.1) viết được dưới dạng

$$x^\alpha M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + x^\alpha N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy +$$

$$+ x^\beta P\left(1, \frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 0$$

hay

$$x^\alpha M(1, z)dx + x^\alpha N(1, z)(zdx + xdz) + x^{\beta+2}P(1, z)dz = 0$$

Rút gọn cho x^α ta đi đến phương trình

$$[M(1, z) + N(1, z)z]dx + [N(1, z)x + P(1, z)x^{\beta+2-\alpha}]dz = 0$$

Do đó với $M(1, z) + N(1, z)z \neq 0$ ta có

$$\frac{dx}{dz} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)}x = -\frac{P(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)}x^{\beta + 2 - \alpha}$$

Đây là phương trình Becnuli mà ta đã biết cách giải. Ngoài ra phương trình Đacbu còn có nghiệm $y = ax$ $(x \neq 0)$ trong đó a là nghiệm của phương trình

$$M(1, z) + N(1, z)z = 0$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$xdx + ydy + x^2(xdy - ydx) = 0$$

Đây là phương trình Đacbu với $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Đặt $y = xz$ ta có

$$xdx + xz(xdz + zdx) + x^4dz = 0$$

hay

$$(1 + z^2)dx + (xz + x^3)dz = 0$$

Do đó

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1 + z^2}x = -\frac{1}{1 + z^2}x^3$$

Tích phân phương trình Becnuli này ta được

$$\frac{1}{x^2} = C(1 + z^2) + (1 + z^2)\operatorname{arctg} z + z$$

Thay $z = \dfrac{y}{x}$ suy ra tích phân tổng quát của phương trình Đacbu ban đầu là

$$C(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + xy - 1 = 0$$

hay chuyển qua tọa độ cực $x = \gamma\cos\varphi$, $y = \gamma\sin\varphi$ ta được

$$\gamma^2 = \frac{1}{C + \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi}$$

§11. PHƯƠNG TRÌNH RICATI

Đó là phương trình dạng

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{11.1}$$

Ở đây $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng (a, b) nào đó. Ta luôn giả thiết rằng $P(x)$, $Q(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên (a, b) vì trong trường hợp ngược lại ta được hoặc là phương trình tuyến tính cấp 1, hoặc là phương trình Becnuli.

1. Dạng chính tắc của phương trình Ricati

Phương trình Ricati dạng

$$y' = \pm\, y^2 + R_1(x) \tag{11.2}$$

được gọi là chính tắc.

Ta chứng minh rằng, phép biến đổi tuyến tính $y = a(x)z + b(x)$ trong đó z là hàm số mới phải tìm, $a(x)$, $b(x)$ sẽ được xác định dưới đây, đưa phương trình Ricati về dạng chính tắc (11.2). Thật vậy, trước hết đặt $y = \alpha(x)z$. Thay biểu thức của y vào (11.1) ta có

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = P(x)\alpha^2(x)z^2 + Q(x)\alpha(x)z + R(x)$$

hay

$$z' = P(x)\alpha(x)z^2 + \left[Q(x) - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]z + \frac{R(x)}{\alpha(x)}$$

Nếu chọn $\alpha(x) = \pm\dfrac{1}{P(x)}$ tức là áp dụng phép thế biến

$$y = \pm\frac{1}{P(x)}\,z \tag{11.3}$$

ta đưa phương trình (11.1) về dạng

$$z' = \pm\, z^2 + \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]z \pm R(x)P(x) \tag{11.4}$$

(Ta giả thiết $P(x) \neq 0$ và khả vi trên (a, b)).

Để làm mất hệ số của z trong phương trình (11.4) ta áp dụng phép thế biến

$$z = u + \beta(x)$$

trong đó u là hàm số mới phải tìm, $\beta(x)$ sẽ được chọn sau. Khi đó

$$u' + \beta'(x) = \pm (u + \beta(x))^2 + \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right](u + \beta(x)) \pm R(x)P(x)$$

hay

$$u' = \pm u^2 + \left[\pm 2\beta(x) + Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right] u \pm \beta^2(x) +$$

$$+ \left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]\beta(x) \pm R(x)P(x) - \beta'(x)$$

Hệ số của u sẽ bị triệt tiêu nếu ta chọn

$$\beta(x) = \pm \frac{1}{2}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]$$

tức là ta áp dụng phép thế

$$z = u \pm \frac{1}{2}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right] \tag{11.5}$$

Khi đó ta được phương trình

$$u' = \pm u^2 \mp \frac{1}{4}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]^2 \pm \frac{1}{2}\left[Q'(x) + \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)}\right] \pm$$

$$\pm R(x)P(x).$$

Kết hợp các phép thế (11.3), (11.5) ta đi đến kết luận rằng, phép thế biến tuyến tính đối với hàm phải tìm

$$y = \pm \frac{1}{P(x)}\left[u \pm \frac{1}{2}\left(Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right)\right] \tag{11.6}$$

đưa phương trình Ricati về dạng chính tắc

$$u' = \pm u^2 + R_1(x)$$

trong đó

$$R_1(x) = \pm \left\{\frac{1}{4}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[Q'(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'^2(x)}{P^2(x)}\right]\right\} \pm$$
$$\pm R(x)P(x)$$

Từ (11.6) ta suy ra điều khẳng định trên với

$$a(x) = \pm \frac{1}{P(x)}\ ;\ b(x) = \pm \frac{1}{2P(x)}\left[Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)}\right]$$

2. Một số tính chất của phương trình Ricati

Nói chung phương trình Ricati không giải được bằng cầu phương ngoại trừ những trường hợp riêng. Chẳng hạn khi P, Q, R là các hằng số thì phương trình Ricati trở thành phương trình biến số phân li được. Ngoài ra các phương trình dạng

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c)$$

(a, b, c là các hằng số) hoặc

$$y' = \frac{ay^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c$$

đều giải được bằng cầu phương vì phương trình thứ nhất có dạng phân li biến số, còn phương trình thứ hai là phương trình thuần nhất.

Ta có khẳng định sau đây :

a) Nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình Ricati (11.1) thì ta có thể đưa nó về phương trình Becnuli và do đó có thể giải được bằng cầu phương. Thật vậy, giả sử $y_1(x)$ là một nghiệm riêng đã biết của phương trình (11.1). Áp dụng phép thế

$$y = y_1(x) + z$$

với z là hàm số mới phải tìm ta đưa (11.1) về dạng

$$y_1'(x) + z' = P(x)y_1^2(x) + 2P(x)y_1(x)z + P(x)z^2 + Q(x)y_1(x) +$$
$$+ Q(x)z + R(x) = P(x)y_1^2(x) + Q(x)y_1(x) + R(x) + 2P(x)y_1(x)z +$$

$$+ P(x)z^2 + Q(x)z \tag{11.7}$$

Theo giả thiết

$$y_1'(x) = P(x)y_1^2(x) + Q(x)y_1(x) + R(x)$$

nên từ (11.7) ta suy ra

$$z' - [2P(x)y_1(x) + Q(x)]z = P(x)z^2 \tag{11.8}$$

Đây là phương trình Becnuli.

Ví dụ. Giải phương trình

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1 \tag{11.9}$$

Dễ kiểm tra trực tiếp rằng $y_1(x) = x$ là một nghiệm của phương trình trên. Do đó phép thế

$$y = x + z = x + \frac{1}{u}$$

ta đưa phương trình (11.9) về phương trình tuyến tính cấp 1 :

$$u' + 3x^2u = -x$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$u = e^{-x^3}\left(C - \int e^{x^3}xdx\right)$$

và do đó nghiệm tổng quát của phương trình (11.9) có dạng

$$y = x + \frac{e^{x^3}}{C - \int e^{x^3}xdx}.$$

b) Nếu biết được hai nghiệm riêng khác nhau của phương trình Ricati (11.1) thì nghiệm tổng quát của nó có thể tìm được bằng một lần cầu phương. Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là 2 nghiệm đã biết của phương trình (11.1). Trước hết ta đưa (11.1) về (11.8) nhờ phép thế $y = y_1(x) + z$.

Như ta đã biết phương trình (11.8) có thể đưa về phương trình tuyến tính cấp 1

$$u' + [2P(x)y_1(x) + Q(x)]u = -P(x) \tag{11.10}$$

nhờ phép thế $z = \dfrac{1}{u}$.

Vì phương trình (11.8) có một nghiệm riêng là $z_1(x) = y_2(x) - y_1(x)$ nên phương trình (11.10) có nghiệm riêng đã biết là

$$u_1(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}$$

Khi đó phép thế $u = u_1(x) + v$ sẽ đưa phương trình (11.10) về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 1 và do đó nghiệm tổng quát tìm được bằng một lần cầu phương.

c) Nếu biết ba nghiệm riêng khác nhau $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ của phương trình Ricati (11.1) thì tích phân tổng quát của nó có dạng

$$\frac{y - y_2(x)}{y - y_1(x)} : \frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_3(x) - y_1(x)} = C.$$

Thật vậy, khi đó phương trình (11.10) có 2 nghiệm riêng khác nhau là

$$u_1(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}, \quad u_2(x) = \frac{1}{y_3(x) - y_2(x)}$$

nên nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$u = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + C\left(\frac{1}{y_3(x) - y_1(x)} - \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}\right) \qquad (11.11)$$

Mặt khác do $u = \dfrac{1}{y - y_1(x)}$ nên từ (11.11) có

$$\frac{1}{y - y_1(x)} = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + C\left[\frac{1}{y_3(x) - y_1(x)} - \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}\right].$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

3. Phương trình Ricati dạng đặc biệt. Phương trình

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^{\alpha} \tag{11.12}$$

trong đó A, B, α là các số thực được gọi là phương trình Ricati dạng đặc biệt. Trong hai trường hợp sau phương trình (11.12) có thể tích phân được bằng hàm sơ cấp :

a) $\alpha = 0$. Khi đó (11.12) có dạng

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = B$$

Đây là phương trình biến số phân li được.

b) $\alpha = -2$. Khi đó (11.12) có dạng

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = \frac{B}{x^2}$$

Đặt $y = \frac{z}{x}$ ta đưa về phương trình biến số phân li được

$$x\frac{dz}{dx} = -Az^2 + (B + 1)z$$

Ngoài những giá trị đó của α, người ta chứng minh được rằng, với mọi giá trị của α mà $\frac{\alpha}{2\alpha + 4}$ là một số nguyên thì phương trình (11.12) tích phân được bằng cầu phương. Liuvin chứng minh được rằng, ngoài các giá trị kể trên của α, phương trình (11.12) không thể tích phân được bằng cầu phương.

§12. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN

Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{12.1}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm U(x, y) khả vi sao cho vi phân toàn phần

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Ta sẽ giả thiết rằng các hàm M(x, y), N(x, y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ trong một miền đơn liên G nào đó.

Như vậy nếu (12.1) là phương trình vi phân toàn phần trong miền G thì ta có

$$dU(x, y) = 0$$

và do đó U(x, y) = C là tích phân tổng quát của phương trình (12.1) trong G. Bài toán đặt ra ở đây là : Khi nào thì (12.1) là phương trình vi phân toàn phần ? và nếu (12.1) là phương trình vi phân toàn phần thì tìm hàm U(x, y) và do đó tìm tích phân tổng quát của nó như thế nào ? Định lí sau đây sẽ trả lời hai câu hỏi trên.

Định lí. Để (12.1) là phương trình vi phân toàn phần trong miền đơn liên G thì cần và đủ là

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{12.2}$$

với mọi $(x, y) \in G$.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử (12.1) là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó với mọi $(x, y) \in G$ ta có

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy .$$

Từ đây suy ra

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} ; \ N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{12.3}$$

Vì trong miền G $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ tồn tại và liên tục nên vi phân hai vế của các đồng nhất thức (12.3) theo y và x tương ứng ta có

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\ ;\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \tag{12.4}$$

Theo giả thiết, các vế trái của các đẳng thức (12.4) liên tục trong G. Do đó các đạo hàm hỗn hợp $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ liên tục và vì thế chúng bằng nhau. Từ (12.4) ta suy ra

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{12.5}$$

với mọi $(x, y) \in G$.

Điều kiện đủ. Giả sử trong G ta có đẳng thức (12.5). Ta sẽ tìm hàm U(x, y) thỏa mãn điều kiện trong định nghĩa phương trình vi phân toàn phần. Trước hết ta đòi hỏi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$$

Do đó

$$U(x, y) = \int_{x_o}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y) \tag{12.6}$$

(Ở đây ta chọn $(x_o, y_o) \in G$ sao cho tại đó các hàm M(x, y), N(x, y) không đồng thời triệt tiêu).

Bây giờ ta chọn hàm $\varphi(y)$ sao cho

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

tức là

$$\int_{x_o}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

hay

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int_{x_o}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx =$$

$$= N(x, y) - \int_{x_o}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx = N(x, y) - N(x, y) + N(x_o, y)$$

Từ đây suy ra

$$\varphi(y) = \int_{y_o}^{y} N(x_o, y)dy.$$

Thay biểu thức này của $\varphi(y)$ vào (12.6) ta được

$$U(x, y) = \int_{x_o}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x_o, y)dy \qquad (12.7)$$

và do đó, hệ thức

$$U(x, y) = \int_{x_o}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x, y)dy = C$$

là tích phân tổng quát của phương trình (12.1) trong G.

Ví dụ. Xét phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

Ta có

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy \; ; \; \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

Vậy phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần. Ta chọn $(x_o, y_o) = (0, 1)$. Theo công thức (12.7) :

$$U(x, y) = \int_{0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_{1}^{y} 4y^3dy$$

$$= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - 1.$$

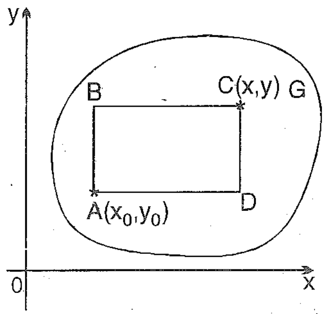
Do đó tích phân tổng quát của phương trình là

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Nhận xét. Công thức (12.7) có thể viết dưới dạng

$$U(x, y) = \int_{\overset{\frown}{ABC}} (Mdx + Ndy)$$

Do điều kiện (12.5) nên tích phân đường không phụ thuộc vào đường nối $A(x_o, y_o)$ và $C(x, y)$. Vì vậy nếu tích phân theo đường ADC thì ta được



Hình 6

$$U(x, y) = \int_{x_o}^{x} M(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} N(x, y)dy \qquad (12.8)$$

Tùy từng trường hợp cụ thể ta áp dụng công thức (12.7) hoặc (12.8) cho thuận lợi nhất.

§13. THỪA SỐ TÍCH PHÂN

Nếu trong miền G điều kiện (12.5) không thỏa mãn thì phương trình (12.1) không phải là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ta có thể chọn hàm $\mu(x, y)$ sao cho khi nhân hai vế của phương trình (12.1) với nó thì phương trình thu được trở thành phương trình vi phân toàn phần. Hàm $\mu(x, y)$ có tính chất như vậy được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (12.1). Như vậy nếu $\mu(x, y)$ là thừa số tích phân của phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (13.1)$$

thì tồn tại hàm $U(x, y)$ sao cho

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = dU(x, y).$$

Một bài toán được đặt ra ở đây là :

1) Khi nào thì phương trình (13.1) có thừa số tích phân ?

2) Trong trường hợp có thừa số tích phân thì tìm nó như thế nào ?

Dưới đây ta sẽ lần lượt trả lời hai câu hỏi trên.

1. Sự tồn tại thừa số tích phân

Định lí 1. Giả sử phương trình (13.1) trong miền G có tích phân tổng quát

$$U(x, y) = C$$

trong đó U(x, y) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục. Khi đó nó có thừa số tích phân.

Thật vậy, dọc theo nghiệm của phương trình (13.1) $dU \equiv 0$ nên

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \equiv 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Mặt khác, dọc theo nghiệm của phương trình ta có

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Từ hai đẳng thức này ta suy ra

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu(x, y)$$

hay là
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu(x, y)M(x, y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mu(x, y)N(x, y)$$

Do đó
$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = dU(x, y)$$

Chứng tỏ $\mu(x, y)$ là thừa số tích phân của phương trình (13.1).

Định lí 2. Nếu $\mu_o(x, y)$ là thừa số tích phân của phương trình (13.1) và $U_o(x, y) = C$ là tích phân tổng quát tương ứng của nó thì

$$\mu(x, y) = \mu_o(x, y)\varphi(U_o(x, y))$$

với φ là hàm khả vi liên tục bất kì, cũng là thừa số tích phân của phương trình (13.1).

Thật vậy

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy =$$

$$= [\mu_o(x, y)M(x, y)dx + \mu_o(x, y)N(x, y)dy]\varphi(U_o(x, y))$$

$$= \varphi(U_o)dU_o = d\int \varphi(U_o)dU_o$$

Hàm $U(x, y) = d\int \varphi(U_o)dU_o$ $(U_o = U_o(x, y))$ là hàm phải tìm trong định nghĩa phương trình vi phân toàn phần.

Hệ quả. Phương trình (13.1) với điều kiện đã nêu trên có vô số thừa số tích phân.

Định lí 3. Hai thừa số tích phân μ_o, μ_1 của phương trình (13.1) liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\mu_1 = \mu_o\psi(U_o)$$

trong đó ψ là hàm khả vi liên tục bất kì.

Thật vậy, giả sử U_o, U_1 là các tích phân tương ứng với μ_o, μ_1 tức là

$$\mu_o(Mdx + Ndy) = dU_o,$$

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = dU_1$$

Vì dọc theo nghiệm của (13.1) $dU_o = dU_1 \equiv 0$ nên

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_o}{\partial x} dx + \frac{\partial U_o}{\partial y} dy = 0 \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} dx + \frac{\partial U_1}{\partial y} dy = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

Do $dy(x) \neq 0$ nên từ (13.2) suy ra

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_o}{\partial x} & \dfrac{\partial U_o}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial x} & \dfrac{\partial U_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13.3)$$

Vì $\dfrac{\partial U_o}{\partial y} \neq 0$ nên (13.3) cho ta

$$U_1 = \varphi(U_o)$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned} \mu_1 M dx + \mu_1 N dy &= dU_1 = \varphi'(U_o) dU_o \\ &= \varphi'(U_o)\mu_o(Mdx + Ndy) \end{aligned}$$

hay là

$$\mu_1 = \mu_o \varphi'(U_o)$$

tức là có dạng phải tìm.

2. Cách tìm thừa số tích phân. Giả sử $\mu(x, y)$ là thừa số tích phân của phương trình (13.1). Khi đó theo định lí ở §13 ta có

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

hay

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (13.4)$$

Như vậy, để tìm thừa số tích phân $\mu(x, y)$ trong trường hợp tổng quát ta phải giải phương trình đạo hàm riêng cấp 1 (13.4). Việc giải phương trình (13.4) nhiều khi còn khó hơn việc giải phương trình (13.1). Tuy vậy trong một số trường hợp đặc biệt, từ phương trình (13.4) ta có thể tìm μ dễ dàng. Ta sẽ xét lần lượt các trường hợp đặc biệt đó.

a) Phương trình (13.1) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x : $\mu = \mu(x)$. Khi đó (13.4) trở thành

$$N\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

hay

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}dx \tag{13.5}$$

Vì vế trái chỉ phụ thuộc x nên vế phải cũng chỉ phụ thuộc x. Như vậy ta đi đến kết luận : Điều kiện để phương trình (13.1) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x là biểu thức

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

là một hàm chỉ phụ thuộc x. Đặt

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$$

từ (13.5) ta tìm được

$$\mu(x) = Ce^{\int \varphi(x)dx}$$

b) Phương trình (13.1) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc y. Khi đó (13.4) có dạng

$$-M\frac{d\mu}{dy} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

hay

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy \tag{13.6}$$

Như vậy, (13.1) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc y khi biểu thức

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

là hàm chỉ phụ thuộc y. Kí hiệu biểu thức này là $\psi(y)$ từ (13.6) ta suy ra

$$\mu(y) = Ce^{\int \psi(y)dy}$$

c) Phương trình (13.1) có thừa số tích phân dạng $\mu = \mu(\omega)$, trong đó $\omega = \omega(x, y)$. Khi đó (13.4) có dạng

$$N\frac{d\mu}{d\omega}.\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{d\mu}{d\omega}.\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

hay

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} \tag{13.7}$$

Vế trái của (13.7) chỉ phụ thuộc ω nên vế phải cũng chỉ phụ thuộc ω. Vậy điều kiện để phương trình (13.1) có thừa số tích phân phụ thuộc $\omega(x, y)$ là vế phải của (13.7) là hàm của ω. Kí hiệu vế phải của (13.7) là $g(\omega)$ ta suy ra trong trường hợp này

$$\mu(\omega) = e^{\int g(\omega)d\omega}$$

Nhận xét. Tùy từng phương trình cụ thể ta chọn ω thích hợp. Đặc biệt khi $\omega = x$ hoặc $\omega = y$ ta được lại kết quả tương ứng ở các phần a, b.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$$

Ta có

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2(1 + xy^2)}{x(xy^2 + 1)} = -\frac{2}{x}.$$

Do đó

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

Nhân hai vế của phương trình với $\dfrac{1}{x^2}$ ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

Giải phương trình này được tích phân tổng quát là

$$3x^2 + xy^3 + 3y - Cx = 0.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2\,;\ \frac{\partial N}{\partial x} = 4x - 2y^2\,;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4x + 5y^2.$$

Ở đây không thỏa mãn điều kiện để thừa số tích phân phụ thuộc x hoặc y. Tuy vậy, nếu ta chọn $\omega = x^2y$ thì dễ kiểm tra được rằng

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = -\frac{1}{x^2y} = -\frac{1}{\omega}$$

Do đó phương trình có thừa số tích phân

$$\mu = e^{-\int \frac{d\omega}{\omega}} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2y}.$$

Nhân hai vế của phương trình với $\mu = \dfrac{1}{x^2y}$ ta được phương trình vi phân toàn phần

$$\frac{y^2}{x^2}dx + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

Tích phân phương trình này suy ra tích phân tổng quát là

$$2\ln y - \frac{y^2}{x} = C.$$

Phương pháp ghép nhóm để tìm thừa số tích phân

Giả sử vế trái của phương trình (13.1) có thể chia thành hai nhóm, tức phương trình có dạng :

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0.$$

Giả sử phương trình

$$M_1dx + N_1dy = 0$$

có thừa số tích phân μ_1 và do đó dạng tổng quát của thừa số tích phân phương trình này là $\mu = \mu_1\varphi(U_1)$, trong đó $U_1 = C$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Giả sử phương trình

$$M_2dx + N_2dy = 0$$

có thừa số tích phân μ_2 và do đó dạng tổng quát của thừa số tích phân phương trình này là $\mu = \mu_2\psi(U_2)$, trong đó $U_2 = C$ là tích phân tổng quát tương ứng. Nếu ta có thể chọn được các hàm φ và ψ sao cho

$$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2) = \mu$$

thì μ sẽ là thừa số tích phân của phương trình (13.1) ban đầu.

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$$

Ta viết lại phương trình như sau :

$$\left(\frac{y}{x}\, dx + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y}\, dy\right) = 0$$

Dễ kiểm tra rằng phương trình ứng với nhóm thứ nhất có thừa số tích phân $\mu_1 = x$ và tích phân tổng quát $U_1 = xy = C$; phương trình ứng với nhóm thứ hai có thừa số tích phân $\mu_2 = y$ và tích phân tổng quát tương ứng $U_2 = x^3y = C$.

Ta chọn hàm φ và ψ sao cho

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3y).$$

Muốn vậy ta lấy $\varphi(U) = U^2$, $\psi(U) = U$.

Khi đó

$$x(xy)^2 = y(x^3y) = x^3y^2.$$

Như vậy thừa số tích phân của phương trình ban đầu là $\mu = x^3y^2$.

Nhân hai vế của phương trình với μ ta được phương trình vi phân toàn phần :

$$(x^2y^3 + 3x^5y^2)dx + (x^3y^2 + x^6y)dy = 0$$

Tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = C.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Tích phân các phương trình sau và giải bài toán Côsi tương ứng

1. $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = 0$; $y(0) = 1$.

2. $\sqrt{1 - x^2}\,dy + \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0.$

3. $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$.

4. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0.$

5. $(x + 2y + 1)dy - (2x + 4y + 3)dx = 0.$

6. $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$.

7. Tìm các đường cong mà đoạn thẳng pháp tuyến từ điểm của đường cong đến trục Ox bằng đại lượng không đổi a.

8. Xét phương trình

$$y' = f(y)$$

trong đó f(y) liên tục trên khoảng (a, b). Biết rằng tồn tại nghiệm $y_o(x)$ của phương trình trên sao cho

$$\lim_{x \to \infty} y_o(x) = c \in (a, b)$$

Chứng minh rằng hàm $y(x) \equiv c$ cũng là nghiệm của phương trình.

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình :

9. $\cos x\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = \cos^2 x.$

10. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{x(1 + x^2)}$.

11. $xy' + y = xy^2\ln x.$

12. $y' - \dfrac{xy}{2(x^2 - 1)} = \dfrac{x}{2y}$.

13. $(x^2y^3 + xy)y' = 1.$

14. Cho phương trình

$$y' + a(x)y = f(x)$$

$$a(x) \geqslant \alpha > 0 \ ; \ f(x) \to 0 \text{ khi } x \to \infty.$$

Chứng minh rằng mỗi nghiệm của phương trình trên dần tới 0 khi $x \to \infty$.

15. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình

$$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

đều giới nội trên toàn trục số.

Giải các phương trình sau :

16. $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$

17. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

18. $(x^2y^2 - 1)dx + 2xy^3dy = 0.$

19. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

20. Tìm thừa số tích phân dạng $\mu = \mu(x + y)$ và giải phương trình

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)dy = 0.$$

21. Cho phương trình

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$$

Chứng minh rằng mỗi nghiệm của phương trình trên đều có giới hạn hữu hạn khi $x \to \infty$.

22. Chứng minh rằng ba nghiệm bất kì $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ của phương trình Ricati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

với p(x), q(x), r(x) liên tục, thỏa mãn hệ thức

$$y_1(x) < y_2(x) < y_3(x).$$

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{2} + 1$.

2. $\arcsin x + \arcsin y = C$.

3. $e^{\frac{y}{x}} = Cy$.

4. $\sin\dfrac{y}{x} = \ln x + C$.

5. $e^{10y - 20x} = C(5x + 10y + 7)^2$.

6. $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2)$.

7. $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

8. Chứng minh $f(c) = 0$ bằng phản chứng chẳng hạn.

9. $y = \dfrac{C}{\cos x} + \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{x}{2\cos x}$.

10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\left(C + \ln\dfrac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$.

11. $\dfrac{1}{y} = x\left(C - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)$.

12. $y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}$.

13. $\dfrac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2$.

14. Đặt $y_o = y(0)$ và áp dụng biểu thức nghiệm bài toán Côsi đối với phương trình tuyến tính cấp 1.

16. $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C.$

17. $\sin\dfrac{y}{x} - \cos\dfrac{x}{y} + x - \dfrac{1}{y} = C.$

18. $x^2y + \dfrac{1}{y} = C.$

19. $x^2 - \dfrac{x}{y} + y + \ln y = C$

20. $\dfrac{x^3 + xy + y^3}{x + y} = C.$

21. Phân li biến số và xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng tương ứng.

22. Sử dụng định lí tồn tại duy nhất nghiệm.

Chương II

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT CHƯA GIẢI RA ĐẠO HÀM

Trong chương này ta xét phương trình vi phân cấp một dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0$$

Trước hết xét cách giải một số phương trình dạng đơn giản.

§1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT CHƯA GIẢI RA ĐẠO HÀM DẠNG ĐẶC BIỆT

1. Giả sử từ phương trình

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

ta có thể giải ra được

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y) \tag{1.2}$$

i chạy trên một tập A nào đó.

Nếu các phương trình đã giải ra đạo hàm (1.2) có thể giải được bằng cầu phương (chẳng hạn thuộc lớp các phương trình đã học ở chương I) thì tích phân các phương trình đó sẽ được nghiệm của (1.1).

Ví dụ. Xét phương trình

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0 \tag{1.3}$$

Giải phương trình này đối với y' ta được hai phương trình đã giải ra đạo hàm là

$$y' = x \text{ và } y' = y.$$

Phương trình thứ nhất cho ta họ nghiệm

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \qquad (1.4)$$

phương trình thứ hai cho ta họ nghiệm

$$y = Ce^x \qquad (1.5)$$

Cả hai họ nghiệm này đều là nghiệm của phương trình (1.3). Ngoài ra phương trình (1.3) còn có nghiệm ứng với đường cong nhận được bằng cách "dán" đường cong (1.4) với đường cong (1.5) sao cho tại điểm dán chúng có tiếp tuyến chung. Chẳng hạn các hàm

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} \text{ với } -\infty < x \leqslant 1 \\ \dfrac{e^x}{e} \text{ với } 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

và

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} \text{ với } x \leqslant 0 \\ 0 \quad \text{với } x \geqslant 0 \end{cases}$$

cũng là các nghiệm của phương trình (1.3).

2. Phương trình dạng F(x, y') = 0 (phương trình không chứa hàm phải tìm)

a) Nếu từ phương trình

$$F(x, y') = 0 \qquad (1.6)$$

ta giải ra được y' :

$$y' = f(x)$$

thì

$$y = \int f(x)dx + C$$

là nghiệm của phương trình (1.6).

b) Nếu từ phương trình (1.6) ta giải ra được x :

$$x = \varphi(y')$$

thì đặt y' = p và xem p như tham số ta có

$$dy = pdx = p\varphi'(p)dp$$

và do đó

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C.$$

Ta được nghiệm tổng quát của (1.6) dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p\varphi'(p)dp + C \end{cases}$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$e^{y'} + y' - x = 0$$

Ta giải được $x = e^{y'} + y'$. Đặt $y' = p$ suy ra $x = e^p + p$ và

$$dy = y'dx = p(e^p + 1)dp$$

Do đó

$$y = \int p(e^p + 1)dp = pe^p - e^p + \frac{p^2}{2} + C$$

Ta được nghiệm tổng quát của phương trình dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = e^p + p \\ y = pe^p - e^p + \dfrac{p^2}{2} + C \end{cases}$$

c) Từ phương trình (1.6) ta biểu diễn được x và y' qua tham số t :

$$x = \varphi(t) \ ; \ y' = \psi(t).$$

Khi đó

$$y = \int dy = \int y'dx = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$$

và ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \end{cases}$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$$

Đặt $y' = tx$ và thay vào phương trình ta biểu diễn được

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}\ ;\ y' = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

Do đó

$$y = \int y'dx = \int \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\,dt =$$

$$= 3\int \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^3}\,3t^2dt = -\frac{9}{2(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C$$

Vậy ta được nghiệm tổng quát của phương trình dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = -\dfrac{9}{2(1+t^3)^2} + \dfrac{6}{1+t^3} + C \end{cases}$$

3. Phương trình không chứa biến số độc lập. Đó là phương trình dạng

$$F(y, y') = 0 \qquad (1.7)$$

Ta sẽ xét các trường hợp sau :

a) Từ (1.7) ta giải được y' :

$$y' = f(y)$$

và do đó tích phân tổng quát có dạng

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

Ngoài ra $y \equiv y_o$ với $f(y_o) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

b) Từ (1.7) ta giải được y :

$$y = \varphi(y').$$

Đặt $y' = p$ và coi p như tham số ta được

$$y = \varphi(p)$$

Để ý rằng $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$ ta suy ra

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C$$

Vậy ta được nghiệm dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp + C \\ y = \varphi(p) \end{cases}$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$y' + \ln y' - y = 0$$

Đặt $y' = p$ ta có

$$y = p + \ln p,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\left(1 + \frac{1}{p}\right) dp}{p} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) dp.$$

Do đó

$$x = \ln p - \frac{1}{p} + C.$$

Ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \ln p - \dfrac{1}{p} + C \\ y = p + \ln p \end{cases}$$

c) Từ phương trình (1.7) ta biểu diễn được y và y' qua tham số t :

$$y = \varphi(t)\ ;\ y' = \psi(t)$$

Khi đó $dx = \dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$

và

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C.$$

Nghiệm tổng quát của (1.7) dưới dạng tham số là

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Ví dụ. Xét phương trình

$$y'^3 - y^2(a - y') = 0,\ a = \text{const}$$

Đặt $y = ty'$ ta có

$$y'^3 - t^2y'^2(a - y') = 0$$

và suy ra

$$y = \frac{at^3}{1+t^2},\ y' = \frac{at^2}{1+t^2}\,;$$

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \frac{3at^2(1+t^2) - 2at^4}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1+t^2}{at^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt = t + 2\,\mathrm{arctg}\,t + C.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{cases} x = t + 2\,\mathrm{arctg}\,t + C \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

§2. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH CLERÔ

1. Trường hợp tổng quát

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

Giả sử phương trình (2.1) thừa nhận sự biểu diễn theo tham số :

$$x = \varphi(u, v) \; ; \; y = \psi(u, v) \; ; \; y' = \chi(u, v) \tag{2.2}$$

sao cho

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] = 0 \; \forall(u, v)$$

Từ (2.2) và $dy = y'dx$ ta suy ra

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \right]$$

Coi u là biến độc lập, từ đẳng thức này ta giải được

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \chi \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}} = f(u, v) \tag{2.3}$$

(2.3) là phương trình đã giải ra đạo hàm. Tích phân nó nếu có thể được ta được nghiệm tổng quát

$$v = \omega(u, C).$$

Thay biểu thức này của v vào hai đẳng thức đầu ở (2.2) ta có

$$x = \varphi[u, \omega(u, C)],$$

$$y = \psi[u, \omega(u, C)].$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) dưới dạng tham số.

Sau đây ta sẽ xét một số trường hợp riêng của (2.1).

2. Phương trình dạng $y = \varphi(x, y')$

Ta chọn

$$u = x \; ; \; v = y' = p.$$

Khi đó

$$y = \varphi(x,\ p) \tag{2.4}$$

$$dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp$$

Để ý rằng $dy = y'dx = pdx$ ta có

$$pdx = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp$$

hay

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.5}$$

(2.5) là phương trình vi phân cấp một giải ra được đạo hàm $\frac{dp}{dx}$.

Giả sử ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của (2.5)

$$p = \omega(x,\ C)$$

Thay biểu thức này của p vào (2.4) ta được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu :

$$y = \varphi[x,\ \omega(x,\ C)].$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}$$

Đặt $y' = p$ ta có

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2} \tag{2.6}$$

$$dy = 2pdp - xdp + (x - p)dx$$

Từ đây suy ra

$$p = (2p - x)\frac{dp}{dx} + (x - p) \text{ hay}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p - x}{2p - x} = 1$$

(giả thiết rằng $2p - x \neq 0$).

Giải phương trình sau cùng ta được

$$p = x + C$$

Thay biểu thức này của p vào (2.6) được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$$

Xét trường hợp $2p - x = 0$ hay $p = \frac{x}{2}$. Thay $p = \frac{x}{2}$ vào (2.6) được nghiệm $y = \frac{x^2}{4}$ của phương trình đã cho. Sau này ta sẽ thấy rằng, đây là nghiệm kì dị của phương trình.

Chú ý. Khi đặt $y' = p$ ta đã coi p như tham số. Do đó để tìm y ta cần thay giá trị của p tìm được vào biểu thức $y = \varphi(x, p)$ mà không được lấy tích phân của p nữa.

3. Phương trình dạng $x = \varphi(y, y')$

Đặt $y' = p$ ta được

$$x = \varphi(y, p), \tag{2.7}$$

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp$$

hay

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp$$

Chia hai vế đẳng thức này cho dy và coi y như biến số độc lập ta được phương trình vi phân cấp một có thể giải ra đạo hàm với hàm phải tìm p, biến độc lập y :

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{2.8}$$

Giả sử tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (2.8) :

$$p = \omega(y, C)$$

Thay biểu thức này của p vào (2.7) ta được tích phân tổng quát của phương trình đang xét ban đầu :

$$x = \varphi(y, \omega(y, C)).$$

Chú ý. Khi giải phương trình (2.8) có thể ta còn tìm được nghiệm $p = g(y)$. Thay vào (2.7) có thể ta được nghiệm kì dị của phương trình ban đầu.

Ví dụ. Xét phương trình

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

Đặt $y' = p$ và giải ra x ta có

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p} \tag{2.9}$$

Từ đây suy ra

$$\frac{dy}{p} = dx = \left(\frac{-p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\right) dy + \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right) dp$$

hay

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2p} \cdot \frac{2yp}{p^3 - 4y^2}$$

Giả sử $p^3 - 4y^2 \neq 0$ và $yp \neq 0$, ta có

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2y}$$

Tích phân phương trình này được

$$p = Cy^{\frac{1}{2}}$$

Thay giá trị này của p vào (2.9) suy ra

$$C^3y^{\frac{3}{2}} - 4Cxy^{\frac{3}{2}} + 8y^2 = 0$$

hay

$$64y = (4Cx - C^3)^2.$$

Từ đây đặt $C_1 = \frac{C^2}{4}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét :

$$y = C_1(x - C_1)^2$$

Trường hợp $p^3 - 4y^2 = 0$ cho ta $p = (4y^2)^{\frac{1}{3}}$. Thay vào (2.9) được nghiệm

$$y = \frac{4}{27}x^3 \qquad (2.9')$$

Trường hợp $yp = 0$ cho ta nghiệm $y \equiv 0$. Sau này sẽ thấy nghiệm này và nghiệm (2.9') đều là nghiệm kì dị của phương trình đang xét.

4. Phương trình Lagrăng. Phương trình Lagrăng là phương trình có dạng

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (2.10)$$

Ta nhận thấy vế phải là một hàm tuyến tính theo x với các hệ số phụ thuộc y'. Đây là một trường hợp riêng của phương trình xét ở mục 2. Do đó để giải phương trình Lagrăng ta đặt $y' = p$ và suy ra

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad (2.11)$$

Từ đẳng thức $dy = pdx$ ta có

$$pdx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$$

hay

$$[\varphi(p) - p]dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp = 0$$

Giả sử $\varphi(p) - p \neq 0$. Khi đó

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \qquad (2.12)$$

(2.12) là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với hàm phải tìm x. Giải nó ta được nghiệm tổng quát

$$x = G(p, C)$$

Thay giá trị này của x vào (2.11) được nghiệm tổng quát của phương trình Lagrăng dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = G(p, C) \\ y = \varphi(p)G(p, C) + \psi(p) \end{cases}$$

Nếu p_i là nghiệm của phương trình $\varphi(p) - p = 0$ thì $y = p_i x + \psi(p_i)$ cũng là nghiệm của phương trình Lagrăng. Tùy từng trường hợp cụ thể, nghiệm đó có thể là nghiệm kì dị hoặc nghiệm riêng. Như vậy nghiệm kì dị của phương trình Lagrăng chỉ có thể là các đường thẳng.

Ví dụ. Giải phương trình

$$y = xy'^2 + y'^2$$

Đặt $y' = p$ ta được

$$y = p^2x + p^2 \tag{2.13}$$

Do đó

$$pdx = (2px + 2p)dp + p^2dx$$

hay

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - p^2}{2p(x+1)} = \frac{1-p}{2(x+1)}$$

Giả sử $p^2 - p \neq 0$. Ta viết lại phương trình :

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một. Giải ra ta được nghiệm tổng quát :

$$x = \frac{C_1}{(p-1)^2} - 1$$

Thay giá trị này của x vào (2.13) ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{(p-1)^2} - 1 \\ y = \dfrac{C_1 p^2}{(p-1)^2} \end{cases}$$

Khử p từ hai đẳng thức này suy ra

$$y = (\sqrt{x+1} + C)^2 \; (C = \sqrt{C_1})$$

Xét trường hợp $p^2 - p = 0$ tức là $p = 0$ và $p = 1$. Thay các giá trị này của p vào (2.13) được các nghiệm

$$y = 0 \; ; \; y = x + 1.$$

Sau này sẽ thấy $y = 0$ là nghiệm kì dị, $y = 1 + x$ là nghiệm riêng.

5. Phương trình Clerô. Nếu trong phương trình Lagrăng hàm $\varphi(y') \equiv y'$ thì ta được phương trình Clerô. Như vậy phương trình Clerô có dạng

$$y = xy' + \psi(y') \tag{2.14}$$

Ta sẽ giả thiết rằng ψ là hàm phi tuyến của y' vì trong trường hợp ngược lại phương trình Clerô trở thành phương trình phân li biến số được.

Đặt $y' = p$ ta có

$$y = px + \psi(p) \tag{2.15}$$

Từ đây suy ra

$$pdx = pdx + (x + \psi'(p))dp$$

Giả sử $x + \psi'(p) \neq 0$ ta được $dp = 0$ hay

$$p = C$$

Thay giá trị này của p vào (2.15) được nghiệm tổng quát của phương trình Clerô (2.14) :

$$y = Cx + \psi(C).$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình Clerô là họ các đường thẳng. Nó có thể nhận được bằng cách thay y' trong phương trình Clerô bằng hằng số C. Xét trường hợp $x + \psi'(p) = 0$. Vì $\psi(p)$ là hàm phi tuyến của p nên từ phương trình này ta xác định được $p = \omega(x)$. Thay vào (2.15) ta được nghiệm của phương trình Clerô :

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x))$$

Sau này sẽ thấy rằng đây là nghiệm kì dị của phương trình Clerô.

Ví dụ. Xét phương trình

$$y = xy' - \frac{1}{4} y'^2$$

Thay $y' = C$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = Cx - \frac{1}{4} C^2$$

Trường hợp $x - \frac{1}{2} p = 0$ cho ta $p = 2x$. Thay $p = 2x$ vào biểu thức

$$y = px - \frac{1}{4} p^2$$

ta được nghiệm kì dị của phương trình :

$$y = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

Nhận xét. Ta đi đến phương trình Clerô khi tìm đường cong dựa vào tính chất của tiếp tuyến không phụ thuộc vào tiếp điểm, nghĩa là tính chất ấy của tiếp tuyến chung cho mọi điểm của đường cong. Thật vậy, phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm M(x, y) có dạng

$$Y - y = y'(X - x).$$

Các tham số xác định tiếp tuyến là hệ số góc của tiếp tuyến $y' = tg\alpha$ và số hạng tự do

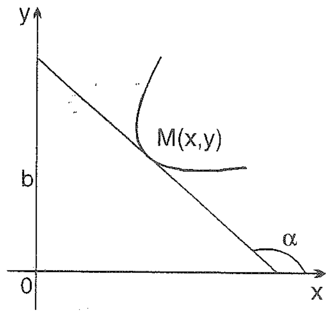
$$b = y - xy'.$$

Tính chất của tiếp tuyến được biểu diễn bằng sự liên hệ giữa k và b :

$$F(k, b) = 0$$

hay

$$F(y', y - xy') = 0.$$



Hình 7

Giải phương trình sau cùng qua biến thứ nhất ta được

$$y - xy' = \psi(y')$$

hay

$$y = xy' + \psi(y'),$$

tức là ta được phương trình Clerô.

§3. CÁCH TÌM NGHIỆM KÌ DỊ CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

1. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm. Trong chương I ta đã chứng minh rằng nếu hàm f(x, y) trong miền G liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipsit theo y thì qua mỗi điểm của miền G có một và chỉ một đường cong tích phân của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua. Trong trường hợp riêng, nếu trong G hàm f(x, y) khả vi liên tục thì điều khẳng định trên đúng. Đối với phương trình

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

ta cũng xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Côsi. Tuy vậy ở đây ta không thể nói rằng sự duy nhất nghiệm của bài toán Côsi tương đương với nhận xét rằng qua mỗi điểm (x_o, y_o) có duy nhất một đường cong tích phân đi qua. Sở dĩ như vậy là vì, nếu giải phương trình (3.1) ra y' trong lân cận điểm (x_o, y_o) thì nói chung, ta được không phải chỉ một mà nhiều phương trình dạng $y' = f_i(x, y)$. Do vậy mặc dù đối với mỗi phương trình này nghiệm bài toán Côsi $y(x_o) = y_o$ có thể tồn tại duy nhất, nhưng qua điểm (x_o, y_o) có thể có nhiều đường cong tích phân của phương trình (3.1) đi qua. Vì vậy khi nói sự duy nhất nghiệm của bài toán Côsi $y(x_o) = y_o$ của phương trình (3.1) ta hiểu là qua mỗi điểm (x_o, y_o) đã cho và theo một hướng cho trước (tức là ứng với một giá trị $y'(x_o)$ xác định) có không quá một đường cong tích phân của phương trình (3.1) đi qua.

Ví dụ 1. Phương trình $y'^2 - 1 = 0$ thỏa mãn điều kiện duy nhất nghiệm của bài toán Côsi vì qua mỗi điểm (x_o, y_o) có hai đường cong tích phân của nó đi qua nhưng theo hai hướng khác nhau : $y' = 1$ và $y' = -1$.

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$$

Giải phương trình này ra y' ta được $y' = x$ và $y' = y$. Do đó qua mỗi điểm (x_o, y_o) nằm trên đường thẳng $y = x$ có 2 đường cong tích phân của phương trình trên cùng hướng $y_o' = y_o = x_o$ đi qua. Do vậy tại các điểm của đường thẳng $y = x$ tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình đang xét bị phá vỡ. Dưới đây ta sẽ đưa ra một điều kiện đủ để nghiệm bài toán Côsi đối với phương trình (3.1) tồn tại và duy nhất.

Định lí. Giả sử hàm F(x, y, y') thỏa mãn các điều kiện sau :

1) F(x, y, y') khả vi liên tục tại một lân cận đóng của điểm (x_o, y_o, y_o') ;

2) $F(x_o, y_o, y_o') = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y'}(x_o, y_o, y_o') \neq 0$.

Khi đó phương trình (3.1) có một nghiệm duy nhất $y = y(x)$ xác định tại lân cận điểm x_o và thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ và sao cho $y'(x_o) = y_o'$.

Chứng minh. Theo định lí hàm ẩn, với các giả thiết đã nêu, phương trình (3.1) xác định duy nhất $y' = f(x, y)$, trong đó $f(x, y)$ khả vi liên tục tại một lân cận đóng của điểm (x_o, y_o) sao cho $f(x_o, y_o) = y_o'$. Mặt khác do $f(x, y)$ khả vi liên tục nên phương trình $y' = f(x, y)$ có duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$. Hơn nữa ta có

$$y'(x_o) = f(x_o, y(x_o)) = f(x_o, y_o) = y_o'.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

2. Tìm nghiệm kì dị theo p – biệt tuyến

Tập hợp các điểm (x, y) mà tại đó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình (3.1) bị phá vỡ được gọi là tập kì dị. Theo định lí chứng minh trên, tập kì dị chỉ có thể có tại những điểm mà tại đó ít nhất một trong các điều kiện của định lí không được thỏa mãn. Đối với đa số các trường hợp gặp trong thực tế, điều kiện 1), 2) thường được thỏa mãn nhưng điều kiện 3) hay bị vi phạm. Do đó nếu các điều kiện 1), 2) thỏa mãn thì tại điểm của tập kì dị phải nghiệm đúng các phương trình :

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F_{y'}'(x, y, y') = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Khử y' từ hệ (3.2) ta được

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (3.3)$$

Như vậy các điểm của tập kì dị thỏa mãn phương trình (3.3). Tuy vậy không phải tất cả các điểm (x, y) thỏa mãn phương trình (3.3) đều thuộc tập kì dị vì định lí trên chỉ cho ta điều kiện đủ bảo đảm sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (3.1).

Định nghĩa. Tập hợp các điểm (x, y) thỏa mãn phương trình (3.3) được gọi là *p – biệt tuyến*. Như vậy nếu đường cong p – biệt tuyến $y = \varphi(x)$ thuộc tập kì dị và là nghiệm của phương trình (3.1) thì nó là nghiệm kì dị của phương trình đó. Từ đây ta đi đến một phương pháp tìm nghiệm kì dị của phương trình (3.1) như sau :

a) Tìm p – biệt tuyến bằng cách khử p từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p'(x, y, p) = 0 \end{cases}$$

b) Bằng cách thay trực tiếp vào phương trình (3.1) thử xem p – biệt tuyến có phải là nghiệm của phương trình hay không.

c) Nếu nó là nghiệm của phương trình thì kiểm tra xem tại mỗi điểm của đường cong tích phân ứng với nghiệm tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình (3.1) có bị phá vỡ hay không. Nếu nó bị phá vỡ thì nghiệm đó chính là nghiệm kì dị của phương trình.

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y - 2xy' + y'^2 = 0$$

Ta xác định p – biệt tuyến từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y - 2xp + p^2 = 0 \\ -2x + 2p = 0 \end{cases}$$

Khử p ta được $y = x^2$ là p – biệt tuyến. Tuy vậy $y = x^2$ không phải là nghiệm của phương trình. Do đó nó không phải là nghiệm kì dị.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm kì dị của phương trình :

$$x - y - \frac{4}{9} y'^2 + \frac{8}{27} y'^3 = 0 \qquad (3.4)$$

Ta tìm p – biệt tuyến từ hệ

$$\begin{cases} x - y - \dfrac{4}{9} p^2 + \dfrac{8}{27} p^3 = 0 \\ \dfrac{8}{9} p - \dfrac{24}{27} p^2 = 0 \end{cases}$$

Sau khi khử p ta được p – biệt tuyến là $y = x$ và $y = x - \dfrac{4}{27}$.

Thay vào phương trình (3.4) ta thấy $y = x - \dfrac{4}{27}$ là nghiệm của phương trình. Bây giờ ta xét xem tại mỗi điểm của đường thẳng này và theo hướng của đường thẳng đó có nghiệm nào khác của phương trình (3.4) đi qua hay không. Muốn vậy ta giải phương trình (3.4). Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$y = x - \frac{4}{9} y'^2 + \frac{8}{27} y'^3$$

Đặt $y' = p$ ta được

$$y = x - \frac{4}{9} p^2 + \frac{8}{27} p^3, \qquad (3.5)$$

$$dy = dx - \frac{8}{9} pdp + \frac{24}{27} p^2dp$$

hay

$$p = 1 + \frac{8}{9} p(p - 1) \frac{dp}{dx}$$

Giả sử $p - 1 \neq 0$ ta có

$$\frac{8}{9} p \frac{dp}{dx} = 1.$$

Giải phương trình này được $p^2 = \dfrac{9}{4} x + C_1$ và vì thế

$$x = \frac{4}{9} p^2 + C \left(C = -\frac{4}{9} C_1 \right)$$

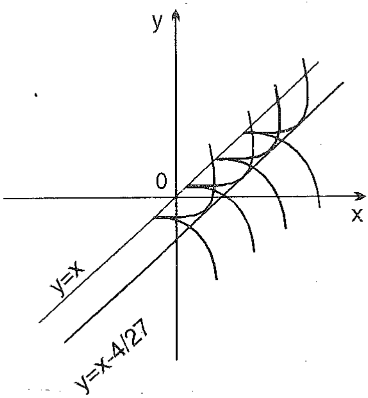
Thay biểu thức của x vào (3.5) ta nhận được

$$y = \frac{8}{27} p^3 + C.$$

Từ hai biểu thức sau cùng của x và y ta suy ra tích phân tổng quát của phương trình (3.4) :

$$(x - C)^3 = (y - C)^2 \qquad (3.6)$$

Trường hợp p − 1 = 0 cho ta nghiệm $y = x - \frac{4}{27}$ đang xét trên. Dưới đây ta sẽ thấy $y = x - \frac{4}{27}$ là bao hình của họ đường cong (3.6). Vì vậy nó là nghiệm kì dị của phương trình. Họ đường cong tích phân (3.6) là họ các nhánh bán parabol bậc 3. Bức tranh của họ đường cong tích phân được biểu diễn bởi hình dưới đây :



Hình 8

3. Tìm nghiệm kì dị bằng C – biệt tuyến

Giả sử $\Phi(x, y, C) = 0$ là tích phân tổng quát của phương trình (3.1). Giả sử Φ là hàm khả vi liên tục. Để tìm nghiệm kì dị của phương trình (3.1) ta tìm bao hình của họ đường cong tích phân ứng với nghiệm tổng quát. Như đã biết, muốn vậy ta tìm biệt tuyến của họ nghiệm tổng quát từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi_C'(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Biệt tuyến này được gọi là C – biệt tuyến. Ta chứng minh kết quả sau đây :

Định lí. Nếu C – biệt tuyến của họ nghiệm tổng quát

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

là bao hình thì nó là nghiệm kì dị của phương trình (3.1).

Thật vậy, tại mỗi điểm của mình bao hình có tiếp tuyến chung với ít nhất một đường cong tích phân của họ nghiệm tổng quát, tức là có cùng y'. Ngoài ra tọa độ (x, y) của mỗi điểm của bao hình cũng là tọa độ của điểm đường cong tích phân. Do vậy x, y, y' của mỗi điểm bao hình thỏa mãn phương trình (3.1). Vì vậy bao hình là một đường cong tích phân của phương trình (3.1). Ngoài ra qua mỗi điểm của bao hình có ít nhất hai đường cong tích phân của (3.1) đi qua. Đó là bản thân nó và một đường cong tích phân của nghiệm tổng quát.

Như vậy ta đi đến một phương pháp khác để tìm nghiệm kì dị như sau :

1) Tìm C – biệt tuyến của họ đường cong tích phân nghiệm tổng quát bằng cách khử C từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Giả sử $\psi(x, y) = 0$ là C – biệt tuyến.

2) Thử xem C – biệt tuyến có phải là bao hình hay không. Nếu nó là bao hình thì nó là nghiệm kì dị của phương trình (3.1).

Chú ý. C – biệt tuyến ngoài bao hình có thể chứa các điểm kì dị. Để một nhánh nào đó của C – biệt tuyến là bao hình thì điều kiện đủ (nhưng không phải là điều kiện cần) là thỏa mãn các hệ thức sau :

a) $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right| \leqslant M_1, \left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right| \leqslant M_2$;

b) $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right| > 0.$

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng $y = x - \dfrac{4}{27}$ là nghiệm kì dị của phương trình (3.4).

Thật vậy, như đã biết ở trên phương trình này có tích phân tổng quát là

$$(x - C)^3 = (y - C)^2$$

Ta tìm C – biệt tuyến của nghiệm tổng quát :

$$\begin{cases} (x - C)^3 = (y - C)^2 \\ 3(x - C)^2 = 2(y - C) \end{cases}$$

Khử C ta được $y = x$ và $y = x - \dfrac{4}{27}$. Tại đường cong $y = x$ (ứng với $C = x$) không thỏa mãn điều kiện b) của chú ý trên. Tại đường cong $y = x - \dfrac{4}{27}$ thỏa mãn các điều kiện a), b) của chú ý đã nêu. Do đó $y = x - \dfrac{4}{27}$ là bao hình của họ đường cong tích phân và do đó nó là nghiệm kì dị.

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y' - 5\sqrt[5]{y^4} = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$\sqrt[5]{y} - x + C = 0 \qquad (3.7)$$

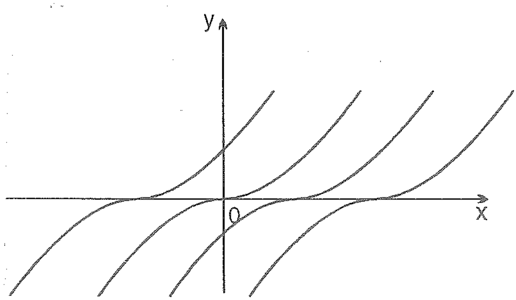
Nếu tìm C – biệt tuyến theo cách trình bày ở trên thì ta đi đến mâu thuẫn : 1 = 0. Sở dĩ như vậy là vì $\Phi = \sqrt[5]{y} - x + C$ không khả vi tại y = 0. Do vậy để tìm nghiệm kì dị ta viết lại (3.7) dưới dạng

$$y = (x - C)^5$$

Khử C từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y - (x - C)^5 = 0 \\ 5(x - C)^4 = 0 \end{cases}$$

ta được C – biệt tuyến là y = 0 (ứng với C = x). Vì ở đây $\Phi_y' = 1$ nên theo chú ý trên y = 0 là bao hình và do đó là nghiệm kì dị của phương trình đang xét. Hình dưới đây cho ta bức tranh của các đường cong tích phân :



Hình 9

§4. BÀI TOÁN QUỸ ĐẠO

Trong phần này ta sẽ áp dụng phương trình vi phân để tìm đường cong theo những tính chất đặc biệt. Giả sử ta có họ đường cong phụ thuộc một tham số λ :

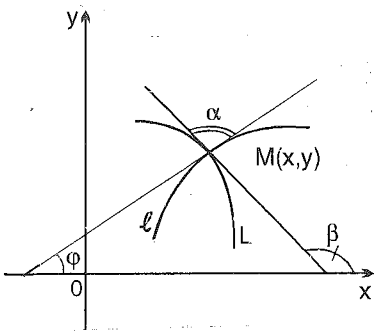
$$F(x, y, \lambda) = 0 \qquad (4.1)$$

Định nghĩa. Đường cong L mà tại mỗi điểm của mình nó cắt đường cong của họ (4.1) dưới cùng một góc không đổi α được gọi là *quỹ đạo đẳng giác* của họ (4.1).

Nếu $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ thì quỹ đạo đẳng giác được gọi là *quỹ đạo trực giao.*

(Ta nhớ lại rằng, góc giữa hai đường cong là góc giữa 2 tiếp tuyến tương ứng kẻ tại giao điểm của hai đường cong đó).

Bài toán đặt ra ở đây là : với họ đường cong (4.1) đã cho hãy tìm quỹ đạo đẳng giác của chúng. Để khỏi nhầm lẫn, ta kí hiệu đường cong của họ (4.1) là l.



Hình 10

a) *Trường hợp* $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Giả sử quỹ đạo L cắt đường cong l của họ tại điểm M(x, y). Kí hiệu φ, β là góc của tiếp tuyến với đường cong l và L tương ứng kẻ từ điểm M. Ta gọi tọa độ của đường cong L là (X, Y), còn tọa độ của đường cong l là (x, y). Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có (xem hình 10)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi\ ,$$

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\beta$$

Vì $\varphi = \beta - \alpha$ nên $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Đặt $k = \operatorname{tg}\alpha$ ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dY}{dX} - k}{1 + k\dfrac{dY}{dX}} \tag{4.2}$$

Bây giờ ta lập phương trình vi phân của họ đường cong (4.1). Muốn vậy ta khử λ từ hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

Sau khi khử λ ta đi đến hệ thức

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4.3}$$

Đây chính là phương trình vi phân của họ đường cong (4.1).

Vì tại giao điểm của l và L tọa độ (x, y) và (X, Y) như nhau nên từ (4.2) ta suy ra quỹ đạo đẳng giác L nghiệm đúng phương trình

$$\Phi\left(X, Y, \frac{\dfrac{dY}{dX} - k}{1 + k\dfrac{dY}{dX}}\right) = 0 \tag{4.4}$$

Tích phân phương trình (4.4) sẽ được họ các quỹ đạo đẳng giác của họ đường cong (4.1).

b) *Trường hợp* $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Khi đó hai đường cong l và L vuông góc với nhau nên

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dY}{dX}}$$

Do đó quỹ đạo đẳng giác L nghiệm đúng phương trình

$$\Phi\left(X, Y, -\frac{1}{\frac{dY}{dX}}\right) = 0$$

Đổi kí hiệu X, Y bằng x, y như thông thường hay dùng, ta đi đến quy tắc tìm quỹ đạo đẳng giác của họ đường cong (4.1) như sau :

1) Tìm phương trình vi phân của họ đường cong (4.1) ;

2) Trong phương trình vi phân tìm được thay $\frac{dy}{dx}$ bằng $\dfrac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}}$ nếu $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (tức là trường hợp tìm quỹ đạo đẳng giác) và thay $\frac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (tức là trường hợp tìm quỹ đạo trực giao). Giải phương trình vi phân thu được ta được các quỹ đạo đẳng giác hoặc quỹ đạo trực giao tương ứng.

Ví dụ. Cho họ đường thẳng $y - \lambda x = 0$. Tìm quỹ đạo cắt họ đường thẳng trên dưới một góc α không đổi.

● Trước hết ta xét trường hợp $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Lập phương trình vi phân họ đường thẳng :

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ y' - \lambda = 0 \end{cases}$$

Khử λ ta được

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Vậy phương trình vi phân của quỹ đạo phải tìm là

$$\frac{\dfrac{dy}{dx} - k}{1 + k\dfrac{dy}{dx}} = \frac{y}{x} \quad (k = tg\alpha)$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx + y}{x - ky}.$$

Đây là phương trình thuần nhất cấp 1. Ta có thể giải theo cách đã học. Tuy vậy ta giải phương trình trên theo cách khác như sau : Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$xdy - ydx = (xdx + ydy)k$$

Nhân hai vế phương trình này với $\dfrac{1}{k(x^2 + y^2)}$ ta được

$$\frac{1}{k}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

hay
$$\frac{1}{k} d\left(\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} d(\ln (x^2 + y^2))$$

Do đó

$$\frac{1}{k}\operatorname{arc tg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln (x^2 + y^2) + \ln C_1$$

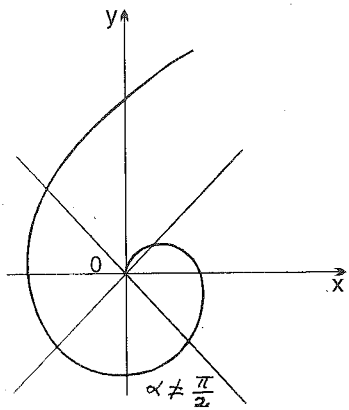
hay

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}}$$

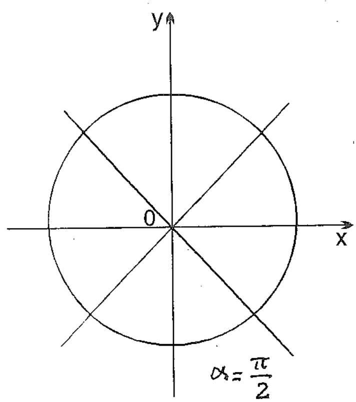
Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ta được

$$r = Ce^{\frac{1}{k}\theta}$$

Đây là đường xoắn ốc lôgarit (xem hình 11).



Hình 11



Hình 12

• Xét trường hợp $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tức là trường hợp tìm quỹ đạo trực giao. Khi đó ta có phương trình vi phân quỹ đạo phải tìm là

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{x}$$

hay
$$xdx + ydy = 0$$

Tích phân ta được

$$x^2 + y^2 = C \ (C > 0)$$

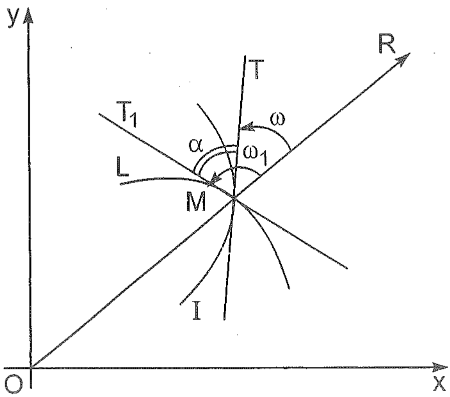
Đây là họ các đường cong tâm tại gốc tọa độ.

c) *Trường hợp tọa độ cực.* Có những trường hợp bài toán quỹ đạo được giải khá đơn giản nếu ta dùng tọa độ cực : $x = r\cos\theta$,

$y = r\sin\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. Giả sử họ đường cong (4.1) được cho bởi phương trình trong tọa độ cực :

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = 0 \qquad (4.5)$$

Gọi L là quỹ đạo đẳng giác và $M(r_1, \theta_1)$ là điểm bất kì trên nó. Kí hiệu $\omega_1 = \widehat{T_1MR}$ (góc giữa tiếp tuyến MT_1 của L tại M và bán kính vectơ OM) ; $\omega = \widehat{TMR}$ (góc giữa tiếp tuyến MT của l tại M và OM). Theo hình vẽ ta có



Hình 13

$$\omega_1 - \omega = \alpha$$

Nhưng $\quad \mathrm{tg}\,\omega_1 = \dfrac{r_1}{\dot{r}_1}$,

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{r}{\dot{r}}$$

trong đó $\quad \dot{r}_1 = \dfrac{dr_1}{d\theta_1}$, $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\theta}$

- Trường hợp $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. Đặt $\mathrm{tg}\alpha = k$ ta có

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\mathrm{tg}\,\omega_1 - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\omega_1} = \frac{\mathrm{tg}\,\omega - k}{1 + k\mathrm{tg}\,\omega_1}$$

hay theo ở trên

$$\frac{r}{\dot{r}} = \frac{\dfrac{r_1}{\dot{r}_1} - k}{1 + k\dfrac{r_1}{\dot{r}_1}}$$

Lập phương trình vi phân của họ đường cong (4.5) theo cách đã biết ta được $F(r, \theta, \dot{r}) = 0$

hay

$$F(r, \theta, \frac{\dot{r}}{r} . r) = 0$$

Thay $r, \theta, \dfrac{\dot{r}}{r}$ tương ứng bởi

$$r_1, \theta_1, \frac{1 + k\dfrac{r_1}{\dot{r}_1}}{\dfrac{r_1}{\dot{r}_1} - k}$$

ta suy ra phương trình vi phân của quỹ đạo đẳng giác là

$$F\left(r_1, \theta_1, \frac{1 + k\dfrac{r_1}{\dot{r}_1}}{\dfrac{r_1}{\dot{r}_1} - k} r_1\right) = 0$$

- Trường hợp $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó $\mathrm{tg}\omega = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\omega_1}$ nên $\dfrac{r}{\dot{r}} = \dfrac{\dot{r}_1}{r_1}$ và phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao là

$$F\left(r_1, \theta_1, -\frac{r_1^2}{\dot{r}_1}\right) = 0$$

Ví dụ. Tìm quỹ đạo trực giao của họ cacđiôit (cardioid) cho bởi phương trình

$$r = \lambda(1 + \cos\theta) \qquad (4.6)$$

Ta có $\dot{r} = -\lambda\sin\theta$. Do đó phương trình vi phân của họ (4.6) là

$$\dot{r} = -\frac{r\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Theo công thức trên phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao (ta giữ luôn kí hiệu r, θ thay cho r_1, θ_1) là

$$\frac{-r^2}{\dot{r}} = -\frac{r\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

hay

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

Giải phương trình này ta được họ quỹ đạo trực giao

$$r = C(1 - \cos\theta).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

Tích phân các phương trình sau đây :

1. $yy'^2 + y'(x - y) = x$.
2. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 = x^2y^2 + x^4$.
3. $xy'^3 = 1 + y'$.
4. $y'^3 + y^3 = 3yy'$.
5. $y - e^{y'}y'^2 = 0$.
6. $y(1 + y'^2) = 2a$.

Tìm tích phân tổng quát của phương trình dạng Lagrăng hoặc Clerô :

7. $y = 2xy' + y^2y'^3$.
8. $y = xy'^2 + y'^3$.
9. $y = 2xy' + \frac{x^2}{2} + y'^2$.

10. $y = xy' + y' - y'^2$.

11. Tìm đường cong sao cho độ dài của đoạn thẳng tiếp tuyến bao gồm giữa các trục tọa độ là một đại lượng không đổi a.

12. Tìm đường cong sao cho mỗi tiếp tuyến của nó cắt trên các trục tọa độ những đoạn thẳng mà tổng các đại lượng nghịch đảo của bình phương độ dài của các đoạn đó bằng 1.

Dùng p – biệt tuyến hoặc C – biệt tuyến tìm nghiệm kì dị (nếu có) của các phương trình vi phân sau đây :

13. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

14. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

15. $y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0$.

16. $y^2(y' - 1) - (2 - y')^2 = 0$.

17. $y - 2xy' - \frac{x^2}{2} = y'^2$.

18. $y'^2 - y'y + e^x = 0$.

Tìm các quỹ đạo đẳng giác của họ các đường cong :

19. $x^2 + y^2 = \lambda^2$ (dưới một góc α).

20. $x^2 + ny^2 = a$ (n là hằng số).

21. Tìm những đường cong cắt tất cả các đường xoắn ốc lôgarit $r = ae^\theta$ dưới một góc bằng $\frac{\pi}{4}$. (Đáp số : $r = C$).

Tìm các quỹ đạo trực giao của họ các đường cong sau :

22. Họ các parabol $y = ax^2$.

23. Họ các đường cong bậc hai đồng dạng $x^2 + ny^2 = a$.

24. Họ các lemiscas

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

25. Tìm những đường cong cắt họ các đường cong $\rho = a(1 + \cos\theta)$ dưới một góc không đổi α.

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $y = x + C$; $y = \sqrt{C^2 - x^2}$.

2. $y = x\,\mathrm{sh}(x + C)$. Giải phương trình đối với p, đặt $\dfrac{y}{x} = u$.

3. $x = t^3 + t^2$, $y = \dfrac{3}{2}t^2 + 2t + C$.

4. $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $x = -t + \ln\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}}$.

5. $y = e^p p^2$, $x = e^p(p + 1) + C$.

6. $y = a(1 + \cos 2\varphi)$, $x = a(-2\varphi - \sin 2\varphi) + C$.

7. Nghiệm kì dị $y^4 = -\dfrac{32x^3}{27}$.

8. $x = -p - \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{(1-p)^2}$.

9. $y = -\dfrac{x^2}{4} + Cx + C^2$, $y = -\dfrac{x^2}{2}$ là nghiệm kì dị.

10. Nghiệm kì dị là $y = \dfrac{(x+1)^2}{4}$.

11. Phương trình vi phân của đường cong là $y = y'x + \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Đường cong có phương trình $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

13. Bao hình : $y = -x$; $x = 0$.

14. $y = \pm 2x$.

15. $y = C^2(x - C)^2$; Nghiệm kì dị : $y = 0$, $y = \dfrac{x^4}{16}$.

16. $y = x - C = \dfrac{1}{x - C}$. Không có nghiệm kì dị.

17. $y = -\dfrac{x^2}{4} + Cx + C^2$; nghiệm kì dị : $y = \dfrac{-x^2}{2}$.

18. $y = 2e^{\frac{x}{2}}$, $y = Ce^x + \dfrac{1}{C}$.

19. $r = Ce^{k\varphi}$.

20. $y = C|x|^n$.

22. $\dfrac{x^2}{2C^2} + \dfrac{y^2}{C^2} = 1$.

23. Xem bài 20.

24. $(x^2 + y^2)^2 = 2Cxy$.

25. $\rho = a[1 + \cos(\theta - 2a)]$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Phương trình vi phân cấp n có dạng tổng quát :

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

Hàm F xác định trong một miền G nào đấy của không gian $\mathbf{R}^{n+2}$. Trong phương trình (1.1) có thể vắng mặt một số trong các biến x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$ nhưng $y^{(n)}$ nhất thiết phải có mặt.

Nếu từ (1.1) ta giải ra được đạo hàm cấp cao nhất, tức là phương trình (1.1) có dạng

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1.2)$$

thì ta được phương trình vi phân cấp n đã giải ra đối với đạo hàm cấp cao nhất.

Định nghĩa. Nghiệm của phương trình (1.1) là hàm $y = \varphi(x)$ khả vi n lần trên khoảng (a, b) sao cho

a) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in G, \forall x \in (a, b)$

b) Nó nghiệm đúng phương trình (1.1) trên (a, b).

Ví dụ. Phương trình

$$y'' - 4y = 0$$

có nghiệm tổng quát là $\varphi(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kì ; phương trình

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

có nghiệm tổng quát là $y = C_1\sqrt{x^2 + C_2}$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số bất kì. Ta có thể thấy các hàm trên thỏa mãn các phương trình tương ứng bằng phương pháp kiểm tra trực tiếp.

Nhận xét. Qua hai ví dụ trên ta thấy rằng, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai phụ thuộc hai hằng số tùy ý C_1, C_2. Một cách tổng quát hơn : nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n phụ thuộc n hằng số tùy ý $C_1, C_2, ..., C_n$. Trong thực tế người ta chỉ quan tâm đến nghiệm của (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn một số điều kiện nào đấy. Một trong những điều kiện đó là điều kiện ban đầu :

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)} \qquad (1.3)$$

trong đó $x_o, y_o, y_o', ..., y_o^{(n-1)}$ là các giá trị cho trước.

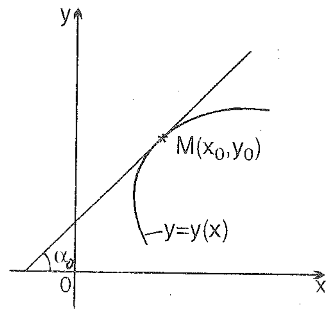
Bài toán Côsi. Tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.3). Khi nào thì bài toán Côsi tồn tại nghiệm ? Khi nào thì nghiệm bài toán Côsi tồn tại duy nhất ? Ta sẽ trả lời những vấn đề này trong tiết sau. Trước hết ta minh họa ý nghĩa hình học của bài toán Côsi trong trường hợp n = 2. Chẳng hạn ta xét bài toán Côsi đối với phương trình vi phân cấp hai

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1.4)$$

Trong trường hợp này bài toán Côsi được phát biểu như sau : Tìm nghiệm y(x) của phương trình (1.4) thỏa mãn các điều kiện ban đầu :

$$y(x_o) = y_o\ ;\ y'(x_o) = y_o'.$$

Như đã biết ở chương I, điều kiện $y(x_o) = y_o$ tương đương với điều kiện đường cong tích phân đi qua điểm (x_o, y_o) cho trước. Điều kiện $y'(x_o) = y_o'$ đòi hỏi đường cong tích phân khi đi qua điểm (x_o, y_o) phải theo một hướng $y_o' = \text{tg}\,\alpha_o$ cho trước. Như vậy trong trường hợp phương trình vi phân cấp hai, việc tìm nghiệm của bài toán Côsi tương đương với việc xác định đường cong tích phân của phương trình (1.4) đi qua điểm (x_o, y_o) cho trước và theo một hướng cho trước y_o'.



Hình 14

Chú ý. Đối với phương trình vi phân cấp n ($n \geqslant 2$), khác với trường hợp phương trình vi phân cấp một, sự duy nhất của bài toán Côsi không có nghĩa là chỉ có một đường cong tích phân qua điểm (x_o, y_o) cho trước mà có thể có vô số đường cong tích phân đi qua điểm (x_o, y_o).

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' + y = 0 \tag{1.5}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y = 1,\ y' = 0 \text{ khi } x = 0 \tag{1.6}$$

Có thể kiểm tra trực tiếp nghiệm tổng quát của phương trình (1.5) có dạng

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Từ điều kiện ban đầu (1.6) ta tìm được

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0$$

và do đó nghiệm bài toán Côsi (1.5) – (1.6) là $y = \cos x$. Nghiệm này là duy nhất. Tuy vậy có vô số đường cong tích phân của phương trình (1.5) đi qua điểm (0, 1). Đó là các đường $y = \cos x + C_2\sin x$ với C_2 là hằng số bất kì.

§2. ĐỊNH LÍ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM. CÁC LOẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP n

1. Định lí tồn tại duy nhất nghiệm

Dưới đây ta sẽ đưa ra một điều kiện đủ để nghiệm bài toán Côsi đối với phương trình

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2.1)$$

tồn tại và duy nhất.

Định nghĩa. Hàm $f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ xác định trong miền $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipsit theo các biến $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nếu tồn tại hằng số $L > 0$ (hằng số Lipsit) sao cho đối với hai điểm bất kì $(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) \in G$,

$$(x, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \ldots, \bar{\bar{u}}_n) \in G$$

ta có bất đẳng thức

$$|f(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) - f(x, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \ldots, \bar{\bar{u}}_n)| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{i=1}^{n} |\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i| \qquad (2.2)$$

Nhận xét. Điều kiện Lipsit sẽ được thỏa mãn, chẳng hạn nếu hàm f trong miền G có các đạo hàm riêng theo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ giới nội, tức là tồn tại số dương M sao cho

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u_i} \right| \leqslant M, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.3)$$

Thật vậy, theo công thức số gia giới nội đối với hàm nhiều biến ta có

$$f(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) - f(x, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \ldots, \bar{\bar{u}}_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_{\tilde{u}_1}(\overline{u}_1 - \overline{\overline{u}}_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)_{\tilde{u}_2}(\overline{u}_2 - \overline{\overline{u}}_2) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial u_n}\right)_{\tilde{u}_n}(\overline{u}_n - \overline{\overline{u}}_n) \quad (2.4)$$

ở đây kí hiệu $\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)_{\tilde{u}_i}$ có nghĩa là trong $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ ta thay biến u_i bằng $\overline{\overline{u}}_i + \theta(\overline{u}_i - \overline{\overline{u}}_i)$ $(0 < \theta < 1)$.

Từ (2.3), (2.4) ta suy ra (2.2) với $L = M$.

Định lí. Giả sử trong miền $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ hàm $f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Khi đó với bất kì điểm trong $(x_o, y_o, y_o', \ldots, y_o^{(n-1)}) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)} \quad (2.5)$$

Nghiệm này xác định tại lân cận, nói chung, khá bé của điểm x_o.

Ta sẽ chứng minh định lí này ở chương sau. Trước hết ta nêu một hệ quả của nó.

Hệ quả. Giả sử hàm $f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ liên tục trong miền G cùng với các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_n}$. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu (2.5).

Thật vậy, tồn tại lân cận đóng $U_o \subset G$ của điểm $(x_o, y_o, y_o', \ldots, y_o^{(n-1)})$ sao cho tại đó hàm f cùng các đạo hàm riêng theo biến u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ liên tục và do đó giới nội. Theo nhận xét trên hàm f sẽ thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ trong U_o.

2. Nghiệm tổng quát. Ta giả thiết rằng G là miền tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (2.1), tức là nghiệm bài toán Côsi tồn tại và duy nhất đối với mỗi điểm

$$(x_o, y_o, y_o', \dots, y_o^{(n-1)}) \in G.$$

Hàm

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

xác định trong miền biến thiên của các biến x, $C_1, C_2, \dots, C_n$ có tất cả các đạo hàm riêng theo x liên tục đến cấp n được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) trong miền G nếu trong G từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y_o = \varphi(x_o, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_o' = \varphi_x'(x_o, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_o^{(n-1)} = \varphi_x^{(n-1)}(x_o, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

ta có thể xác định được

$$\left.\begin{aligned} C_1^o &= \psi_1(x_o, y_o, y_o', \dots, y_o^{(n-1)}) \\ C_2^o &= \psi_2(x_o, y_o, y_o', \dots, y_o^{(n-1)}) \\ &\dots\dots\dots \\ C_n^o &= \psi_n(x_o, y_o, y_o', \dots, y_o^{(n-1)}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

và hàm $y = \varphi(x, C_1^o, C_2^o, \dots, C_n^o)$ là nghiệm của phương trình (2.1) ứng với mỗi hệ $C_1^o, C_2^o, \dots, C_n^o$ xác định được từ (2.6) khi $(x_o, y_o, y_o', \dots, y_o^{(n-1)})$ biến thiên trong G.

3. Tích phân tổng quát. Khi giải phương trình (2.1) nhiều khi ta được nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn :

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \qquad (2.7)$$

và được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (2.1).

Hệ thức (2.7) được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (2.1) trong miền G nếu nó xác định nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ của phương trình đó trong miền G.

4. Nghiệm riêng. Nghiệm của phương trình (2.1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được bảo đảm được gọi là nghiệm riêng của phương trình (2.1). Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với các giá trị xác định của các hằng số $C_1, C_2, ..., C_n$ là nghiệm riêng.

5. Nghiệm kì dị. Nghiệm của phương trình (2.1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi bị phá vỡ được gọi là nghiệm kì dị.

Nghiệm kì dị của phương trình vi phân cấp n có thể là cả một họ phụ thuộc một số hằng số tùy ý, nhưng số hằng số tùy ý này không được quá n − 1.

Ví dụ. Xét phương trình

$$y'' = 2\sqrt{y'}$$

Đặt y' = z và coi z là hàm số mới phải tìm ta được

$$z' = 2\sqrt{z} \tag{2.8}$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$z = (x + C_1)^2 \quad (x > -C_1)$$

Vì z = y' nên ta có

$$y' = (x + C_1)^2$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2 \quad (x > -C_1)$$

Phương trình vi phân cấp một (2.8) có nghiệm kì dị là $z \equiv 0$. Cho nên phương trình đang xét của ta có họ nghiệm kì dị phụ thuộc một hằng số tùy ý : $y \equiv C$.

§3. TÍCH PHÂN TRUNG GIAN ; TÍCH PHÂN ĐẦU

Thông thường khi tích phân phương trình vi phân cấp n ta đi đến những hệ thức chứa các hằng số tùy ý và các đạo hàm cấp thấp hơn n dạng

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0$$
$$(1 \leqslant k < n).$$

Hệ thức như vậy được gọi là tích phân trung gian của phương trình (1.1). Trong trường hợp $k = 1$ tức ta có hệ thức dạng

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$$

thì tích phân trung gian được gọi là tích phân đầu. Ta nhận thấy rằng tích phân đầu hoặc tích phân trung gian là những phương trình vi phân cấp thấp hơn n. Nếu biết hai tích phân đầu

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) &= 0 \\ \Phi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

thì khử $y^{(n-1)}$ từ hệ (3.1) ta thu được tích phân trung gian

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0 \qquad (3.2)$$

Như vậy ta đưa việc tích phân phương trình vi phân cấp n về việc tích phân phương trình vi phân cấp $n - 2$ (3.2).

Một cách tổng quát : Nếu biết k tích phân đầu độc lập $(1 \leqslant k < n)$ thì việc tích phân phương trình vi phân cấp n đưa về việc tích phân phương trình vi phân cấp $n - k$. Đặc biệt, nếu tìm được n tích phân đầu độc lập của phương trình (1.1) thì khử y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ từ chúng, ta đi đến hệ thức

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

tức là tích phân tổng quát.

Chú ý. Đối với phương trình chưa giải ra đạo hàm cấp cao nhất

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.3}$$

nếu ta giải được

$$y^{(n)} = f_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.4}$$

thì tập hợp các tích phân tổng quát của các phương trình (3.4) được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (3.3). Trong thực tế nhiều khi ta không cần giải ra đạo hàm cấp cao nhất mà tích phân trực tiếp phương trình (3.3).

§4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO GIẢI ĐƯỢC BẰNG CẦU PHƯƠNG

1. Phương trình chỉ chứa biến số độc lập và đạo hàm cấp cao nhất. Đó là phương trình dạng

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{4.1}$$

Ta xét các trường hợp sau :

a) Từ (4.1) ta giải ra được đạo hàm $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Khi đó

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = g_1(x, C_1)$$

$$y^{(n-2)} = \int g_1(x, C_1)dx + C_2 = g_2(x_1, C_1, C_2)$$

....

$$y' = \int g_{n-2}(x, C_1, C_2, ..., C_{n-2})dx + C_{n-1}$$

$$= g_{n-1}(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

$$y = \int g_{n-1}(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx + C_n$$

$$= g(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Như vậy trong trường hợp này, tích phân tổng quát thu được qua n lần cầu phương.

Ví dụ. $y''' - 4x^2 = 0$

$$y''' = 4x^2$$

$$y'' = \int 4x^2dx + C_1 = \frac{4}{3}x^3 + C_1$$

$$y' = \int \left(\frac{4}{3}x^3 + C_1\right)dx = \frac{1}{3}x^4 + C_1x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{1}{3}x^4 + C_1x + C_2\right)dx + C_3$$

$$= \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

b) Từ (4.1) ta giải được x qua $y^{(n)}$:

$$x = \varphi(y^{(n)})$$

Đặt $y^{(n)} = p$ và coi p như tham số ta được

$$x = \varphi(p)$$

Vì $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = p\varphi'(p)dp$

nên

$$y^{(n-1)} = \int p\varphi'(p)dp + C_1 = \psi_1(p, C_1)$$

Tương tự

$$dy^{(n-2)} = \psi_1(p, C_1)dx = \psi_1(p, C_1)\varphi'(p)dp$$

nên

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(p, C_1)\varphi'(p)dp + C_2 = \psi_2(p, C_1, C_2)$$

....

$$y' = \int \psi_{n-2}(p, C_1, C_2, ..., C_{n-2})\varphi'(p)dp + C_{n-1}$$

$$= \psi_{n-1}(p, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

Cuối cùng ta có

$$y = \int \psi_{n-1}(p, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx + C_n$$

$$= \psi(p, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Vậy ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \psi(p, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$e^{y''} + y'' - x = 0$$

Ta có

$$x = e^{y''} + y''$$

Đặt $y'' = p$ ta được

$$x = e^p + p.$$

Do đó

$$dy' = y''dx = p(e^p + 1)dp ;$$

$$y' = \int (pe^p + p)dp + C_1 = pe^p - e^p + \frac{p^2}{2} + C_1 ;$$

$$dy = y'dx = \left(pe^p - e^p + \frac{p^2}{2} + C_1\right)(e^p + 1)dp \ ;$$

$$y = \int \left(pe^p - e^p + \frac{p^2}{2} + C_1\right)(e^p + 1)dp =$$

$$= \left(\frac{p}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2p} + \left(\frac{p^2}{2} + C_1 - 1\right)e^p + \frac{p^3}{6} + C_1p + C_2.$$

Cuối cùng ta được nghiệm dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = e^p + p \\ y = \left(\frac{p}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2p} + \left(\frac{p^2}{2} + C_1 - 1\right)e^p + \frac{p^3}{6} + C_1p + C_2 \end{cases}$$

c) Từ phương trình (4.1) ta biểu diễn được x và $y^{(n)}$ qua tham số :

$$x = \varphi(t) \ ; \ y^{(n)} = \psi(t)$$

trong đó $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ sao cho $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Tương tự như trên ta có :

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1),$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt.$$

Do đó

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$$

....

$$y = g(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Ta được nghiệm dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}$$

Ví dụ. $y'''^2 + x^2 = 1$

Đặt $x = \cos t$, $y''' = \sin t$ ta thấy

$$y'''^2 + x^2 = \sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$$

$$dy'' = y'''dx = \sin t(-\sin t)dt = -\sin^2 t dt$$

$$= \frac{\cos 2t - 1}{2} dt ;$$

$$y'' = \int \frac{\cos 2t - 1}{2} dt + C_1 = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{1}{2} t + C_1 ;$$

$$dy' = y''dx = \left(\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2} t + C_1\right)(\cos t)'dt$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2} t + C_1\right)(-\sin t)dt$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\sin t \sin 2t + \frac{1}{2} t\sin t - C_1 \sin t\right) dt ;$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{4}\sin t\sin 2t + \frac{1}{2} t\sin t - C_1\sin t\right)dt + C_2$$

$$= -\frac{1}{4}\int 2\sin^2 t\cos t dt + \frac{1}{2}\int t\sin t dt - C_1\int \sin t dt + C_2$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^3 t - \frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{2}\sin t + C_1\cos t + C_2 ;$$

$$dy = y'dx = \left(-\frac{1}{6}\sin^3 t - \frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{2}\sin t + C_1\cos t + C_2\right)(-\sin t)dt$$

$$= \left(\frac{1}{6}\sin^4 t + \frac{1}{2} t\cos t\sin t - \frac{1}{2}\sin^2 t - C_1\cos t\sin t - C_2\sin t\right) dt$$

$$y = \int\left(\frac{1}{6}\sin^4 t + \frac{1}{2} t\cos t\sin t - \frac{1}{2}\sin^2 t - C_1\cos t\sin t - C_2\sin t\right) dt + C_3$$

$$= \frac{1}{192}\sin 4t + \frac{C_1}{4}\cos 2t - \frac{5}{48}\sin 2t + C_2\cos t +$$

$$+ \frac{5}{16}t - \frac{1}{8}t\cos 2t + C_3$$

Cuối cùng ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\frac{1}{8}t\cos 2t + \frac{5}{16}t - \frac{5}{48}\sin 2t + \frac{1}{192}\sin 4t + \frac{C_1}{4}\cos 2t + C_2\cos t + C_3 \end{cases}$$

2. Phương trình chỉ chứa đạo hàm cấp n và cấp n - 1

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (4.2)$$

Ta xét lần lượt các trường hợp sau :

a) Từ (4.2) ta giải ra được $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$$

Đặt $y^{(n-1)} = z$ và coi z như hàm số mới phải tìm ta được

$$z' = f(z) \qquad (4.3)$$

Giải phương trình vi phân cấp một này (giả thiết là nó giải được) ta có nghiệm tổng quát

$$z = g(x, C_1)$$

hay tích phân tổng quát

$$\Phi(x, z, C_1) = 0$$

Thay $z = y^{(n-1)}$ vào các biểu thức này ta trở về trường hợp 1 đã xét ở trên. Nếu nghiệm tổng quát của phương trình (4.3) tìm được dưới dạng tham số

$$x = \varphi(t, C_1), \; z = \varphi(t, C_2)$$

thì ta trở về trường hợp c) của mục 1.

b) Từ phương trình (4.2) ta biểu diễn được $y^{(n-1)}$ qua $y^{(n)}$:

$$y^{(n-1)} = f(y^{(n)})$$

Đặt $y^{(n)} = p$ và coi p như tham số ta được

$$y^{(n-1)} = f(p)$$

Vì $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{f'(p)dp}{p}$ nên

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\, dp + C_1 = \varphi(p, C_1)$$

Như vậy ta trở về trường hợp c) của mục 1 :

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1) \\ y^{(n-1)} = f(p) \end{cases}$$

c) Từ phương trình (4.2) ta biểu diễn được $y^{(n)}$ và $y^{(n-1)}$ qua tham số :

$$y^{(n)} = \varphi(t),$$
$$y^{(n-1)} = \psi(t)$$

Khi đó

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

và vì thế

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\, dt + C_1 = g(t, C_1)$$

Ta trở về trường hợp c) của mục 1 :

$$\begin{cases} x = g(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases}$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

Giải ra y'' và đặt y' = z ta có

$$z' = -(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

hay

$$-\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = dx$$

Do đó

$$x = -\int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1.$$

Đặt z = tgφ ta được

$$x = -\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}} + C_1$$

$$= -\int \cos\varphi d\varphi + C_1$$

$$= -\sin\varphi + C_1$$

Vì $y' = z = \mathrm{tg}\varphi$

nên

$$dy = y'dx = \mathrm{tg}\varphi(-\cos\varphi)d\varphi = -\sin\varphi d\varphi$$

Từ đây suy ra

$$y = -\int \sin\varphi d\varphi + C_2 = \cos\varphi + C_2$$

Ta được nghiệm tổng quát dưới dạng tham số :

$$x = -\sin\varphi + C_1 \; ; \; y = \cos\varphi + C_2$$

hay

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$$

Như vậy, các đường cong tích phân là họ các đường tròn bán kính bằng 1 và tâm tùy ý.

3. Phương trình chỉ chứa $y^{(n)}$ và $y^{(n-2)}$

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \tag{4.4}$$

a) Giả sử từ (4.4) ta giải được $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

Đặt $y^{(n-2)} = z$ ta đi đến phương trình vi phân cấp hai với hàm phải tìm là z :

$$z'' = f(z)$$

Nhân 2 vế phương trình này với $2z'$ $(z' \neq 0)$ ta được

$$2z'z'' = 2z'f(z)$$

hay

$$d(z'^2) = 2f(z)dz$$

Tích phân phương trình này :

$$z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1.$$

Do đó

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}$$

Từ đây suy ra

$$x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}$$

hay

$$\Phi(x, z, C_1, C_2) = 0.$$

Theo $z = y^{(n-2)}$ ta trở lại phương trình ở mục 1 đã xét :

$$\Phi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0.$$

b) Giả sử từ phương trình (4.4) ta không giải được $y^{(n)}$ nhưng có thể biểu diễn $y^{(n)}$ và $y^{(n-2)}$ qua tham số :

$$y^{(n-2)} = \varphi(t),$$

$$y^{(n)} = \psi(t).$$

Khi đó

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx.$$

Từ hai hệ thức cuối suy ra

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$$

hay

$$d[y^{(n-1)}]^2 = 2y^{(n)}dy^{(n-2)} = 2\psi(t)\varphi'(t)dt$$

Do đó

$$[y^{(n-1)}]^2 = \int 2\psi(t)\varphi'(t)dt + C_1$$

hay

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{\int 2\psi(t)\varphi'(t)dt + C_1} = \psi_1(t, C_1)$$

Ta đi đến hệ thức

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi(t) \end{cases}$$

tức là trở lại trường hợp c) ở mục 2 đã xét ở trên.

Ví dụ. Tích phân phương trình

$$a^2y^{(4)} = y'' \quad (a = \text{const})$$

Đặt $y'' = z$ ta có

$$a^2z'' = z$$

Nhân hai vế với $2z'$ ta được

$$2a^2z''z' = 2zz'$$

hay

$$a^2z'^2 = z^2 + C_1$$

Do đó

$$az' = \sqrt{z^2 + C_1}$$

Phân li biến số và tích phân phương trình sau cùng ta có

$$\ln(z + \sqrt{z^2 + C_1}) = \frac{x}{a} + \ln C_2$$

hay

$$z + \sqrt{z^2 + C_1} = C_2 e^{\frac{x}{a}} \qquad (4.5)$$

Để tìm z ta viết lại hệ thức (4.5) như sau :

$$\frac{1}{z + \sqrt{z^2 + C_1}} = \frac{1}{C_2 e^{\frac{x}{a}}}$$

Nhân tử và mẫu ở vế trái cho $z - \sqrt{z^2 + C_1}$:

$$z - \sqrt{z^2 + C_1} = -\frac{C_1}{C_2} e^{-\frac{x}{a}} \qquad (4.6)$$

Từ (4.5), (4.6) suy ra

$$z = \frac{C_2}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{C_1}{2C_2} e^{-\frac{x}{a}}$$

hay trở lại z = y'' :

$$y'' = \frac{C_2}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{C_1}{2C_2} e^{-\frac{x}{a}}$$

Lấy tích phân lần lượt biểu thức này ta có :

$$y = \frac{a^2 C_2}{2} e^{\frac{x}{a}} - \frac{a^2 C_1}{2C_2} e^{-\frac{x}{a}} + C_3 x + C_4$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

§5. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO HẠ THẤP CẤP ĐƯỢC

Trong tiết này ta sẽ xét một số phương trình cấp cao cho phép ta hạ thấp cấp của chúng và do đó trong nhiều trường hợp có thể giải được.

1. Phương trình không chứa hàm phải tìm và các đạo hàm của nó đến cấp k. Đó là phương trình dạng

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (5.1)$$

$$(k \geqslant 1)$$

Đặt $y^{(k)} = z$ và coi z như hàm số mới phải tìm ta đưa (5.1) về phương trình dạng

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \qquad (5.2)$$

Đây là phương trình cấp $n - k$. Giả sử ta giải được phương trình (5.2) :

$$z = \omega(x, C_1, C_2, \dots, C_k)$$

hay

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, C_2, \dots, C_k)$$

Ta được trường hợp a) ở mục 1 của §4. Nếu tích phân phương trình (5.2) ta được tích phân tổng quát

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0$$

thì ta có

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0$$

tức là ta trở về trường hợp 1 của §4 nhưng cấp thấp hơn n.

Ví dụ. Xét phương trình

$$4y' + y''^2 = 4xy'' \qquad (5.3)$$

Đặt $y' = z$ ta đi đến phương trình

$$4z + z'^2 = 4xz'$$

hay

$$z = xz' - \frac{z'^2}{4} \tag{5.4}$$

Đây là phương trình Clerô. Nghiệm tổng quát của nó là

$$z = C_1x - \frac{C_1^2}{4}$$

Thay $z = y'$ ta được

$$y' = C_1x - \frac{C_1^2}{4}$$

Do đó

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 - \frac{C_1^2}{4}x + C_2.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình (5.3). Phương trình (5.4) có nghiệm kì dị $z = x^2$. Ứng với nó ta được nghiệm $y = \frac{x^3}{3} + C$. Đây là nghiệm kì dị của phương trình (5.3).

2. Phương trình không chứa biến số độc lập

Đó là phương trình dạng

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.5}$$

Đặt $y' = z$ và coi z như hàm số mới. Ta biểu diễn $y'', y''', ..., y^{(n)}$ qua z và các đạo hàm của nó như sau :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}z = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$y''' = \frac{d}{dx}y'' = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\cdot\frac{dy}{dx} =$$

$$= \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z, ...$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)$$

Thay các biểu thức này của y', y'', ..., $y^{(n)}$ vào phương trình (5.5) ta được phương trình dạng

$$\Phi\left(y,\ z,\ \frac{dz}{dy},\ ...,\ \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Đây là phương trình cấp n - 1. Giả sử ta giải được nó và nghiệm tổng quát là

$$z = \psi(y,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-1})$$

hay

$$y' = \psi(y,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-1})$$

Tích phân phương trình vi phân cấp một sau cùng ta được nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát của phương trình (5.5).

Ví dụ. Giải phương trình

$$(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2 \qquad (5.6)$$

Đặt y' = z ta có

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Thay các biểu thức của y', y'' vào phương trình (5.6) ta được :

$$(1 + y^2)\,yz\frac{dz}{dy} = (3y^2 - 1)z^2$$

hay (giả sử $z \neq 0$)

$$(1 + y^2)y\frac{dz}{dy} = (3y^2 - 1)z,$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2 - 1}{y(1 + y^2)}\,dy$$

Từ đây suy ra

$$\ln|z| = 2\ln(1 + y^2) - \ln|y| + \ln|C_1|$$

hay

$$\frac{yz}{(1 + y^2)^2} = C_1 \qquad (5.7)$$

Thay $z = y'$ vào (5.7) :

$$\frac{yy'}{(1+y^2)^2} = C_1$$

Tích phân phương trình sau cùng ta được tích phân tổng quát của phương trình (5.6) :

$$\frac{1}{1+y^2} = -2C_1x + C_2$$

Trường hợp $z = 0$ cho ta $y = C$. Đây cũng là nghiệm của phương trình (5.6).

3. Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó. Nếu F là hàm thuần nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$, tức là

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

thì phương trình

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.8}$$

được gọi là phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Phương trình thuần nhất (5.8) có thể hạ một bậc nhờ phép thế $y' = yz$ trong đó z là hàm số mới phải tìm. Thật vậy

$$y'' = (y')' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + z'y = y(z^2 + z')$$

$$y''' = (y'')' = (yz^2 + z'y)' = y'z^2 + 2yzz' +$$
$$+ z''y + z'y' = yz^3 + 2yzz' + yz'' + yzz' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

Một cách tổng quát

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', ..., z^{(n-1)})$$

Thay các biểu thức này của $y', y'', ..., y^{(n)}$ vào vế trái của phương trình (5.8) và chú ý rằng F là hàm thuần nhất theo $y, y', ..., y^{(n)}$ ta được

$$y^kF(x,\ 1,\ z,\ z^2 + z',\ ...,\ \omega(z,\ z',\ ...,\ z^{(n-1)}) = 0$$

Giả sử $y \neq 0$, từ hệ thức này suy ra phương trình cấp $n - 1$:

$$\Phi(x,\ z,\ z',\ ...,\ z^{(n-1)}) = 0 \qquad (5.9)$$

Giả sử

$$z = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-1})$$

là nghiệm tổng quát của (5.9). Vì

$$z = \frac{y'}{y}$$

nên tích phân phương trình vi phân cấp một

$$y' = y\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-1})$$

ta được nghiệm tổng quát của phương trình (5.8) là

$$y = C_n e^{\int \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ ...,\ C_{n-1})dx}$$

Nghiệm $y \equiv 0$ ứng với $k > 0$ có thể coi như nhận được từ họ nghiệm tổng quát với $C_n = 0$.

Ví dụ. Cho phương trình

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

Đây là phương trình thuần nhất đối với y, y', y''. Do đó đặt

$$y' = yz, \text{ suy ra } y'' = y(z^2 + z').$$

Thay vào phương trình trên ta được

$$y^2(xz^2 + xz') + xz^2y^2 - y^2z = 0$$

hay

$$xz' + 2xz^2 - z = 0 \qquad (5.10)$$

Đây là phương trình Becnuli. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}$$

Do đó

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}$$

Tích phân ta có

$$y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}$$

Vì phương trình (5.10) còn có nghiệm $z \equiv 0$ nên phương trình đã cho còn có nghiệm $y \equiv C$.

4. Phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần

Đó là phương trình dạng

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.11}$$

trong đó F là đạo hàm toàn phần theo x của một hàm $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ nào đó, tức là

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

hay là

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}y'' + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}$$

Ta thấy ngay rằng, phương trình (5.11) có tích phân đầu dạng

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_1$$

tức là ta được phương trình vi phân cấp n − 1.

Ví dụ. Xét phương trình

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1 + y'^2} = 0.$$

Ta thấy

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1 + y'^2} = \frac{d}{dx}\left[\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln(1 + y'^2)\right]$$

nên phương trình đang xét có một tích phân đầu là

$$\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln(1 + y'^2) = \ln|C_1|$$

hay

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1 = 0$$

Vế trái của phương trình này lại là đạo hàm toàn phần của hàm

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - C_1x$$

nên ta được phương trình

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - C_1x = C_2$$

Tích phân phương trình sau cùng suy ra tích phân tổng quát của phương trình đang xét là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

với

$$a = -\frac{C_2}{C_1}, \; b = \frac{C_3}{C_1}, \; R = \frac{1}{C_1}.$$

Nhận xét. Nếu vế trái của phương trình (5.11) không phải là đạo hàm toàn phần thì đôi khi người ta có thể tìm được hàm $\mu(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ sao cho khi nhân với nó thì vế trái của phương trình thu được sẽ là đạo hàm toàn phần. Hàm μ có tính chất như vậy được gọi là thừa số tích phân. Chúng ta không đi sâu vào việc tìm thừa số tích phân mà chỉ xét các ví dụ sau :

Ví dụ 1. Phương trình

$$y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0 \qquad (5.12)$$

không phải là phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần.

Nhân hai vế của phương trình với hàm $\mu = \dfrac{1}{yy'}$ ta được

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0 \ (yy' \neq 0)$$

hay

$$\frac{d}{dx}[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|] = 0$$

Đây là phương trình với vế trái là đạo hàm toàn phần. Tích phân đầu của nó là

$$\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x| = \ln|C_1|$$

hay

$$yy'e^{y^2} - C_1x^2 = 0$$

Nhưng

$$yy'e^{y^2} - C_1x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3\right)$$

Do đó

$$\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3 = C_2$$

là tích phân tổng quát của phương trình (5.12). Trường hợp $yy' \equiv 0$ cho ta nghiệm $y \equiv C$. Nghiệm này suy ra được từ tích phân tổng quát khi $C_1 = 0$.

Ví dụ 2. Xét phương trình Liuvil

$$y'' + f(x)y' + F(y)y'^2 = 0 \qquad (5.13)$$

trong đó f(x), F(y) là những hàm cho trước.

Nhân hai vế của phương trình cho $\mu = \dfrac{1}{y'}$ ta có

$$\frac{y''}{y'} + f(x) + F(y)y' = 0$$

hay

$$\frac{d}{dx}\left[\ln|y'| + \int_{x_o}^{x} f(x)dx + \int_{y_o}^{y} F(y)dy\right] = 0.$$

Do đó

$$\ln|y'| + \int_{x_o}^{x} f(x)dx + \int_{y_o}^{y} F(y)dy = \ln|C_1|$$

là tích phân đầu của phương trình (5.13). Ta viết lại phương trình sau cùng dưới dạng

$$y' = C_1 e^{-\int_{x_o}^{x} f(x)dx - \int_{y_o}^{y} F(y)dy}$$

và tích phân nó lần nữa ta được tích phân tổng quát của phương trình Luivil (5.13) :

$$\int_{y_o}^{y} e^{\int_{y_o}^{y} F(y)dy} dy = C_1 \int_{x_o}^{x} e^{-\int_{x_o}^{x} f(x)dx} dx + C_2$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

Tìm tích phân tổng quát của các phương trình :

1. $y''' - \ln x = 0.$

2. a) $x - y''e^{y''} + y'' = 0$;

b) $y'''^2 + x^2 = 1.$

3. $a^2y'''y'' = (1 + c^2y''^2)^{\frac{1}{2}}.$

4. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}.$

5. $y''' = (1 + y''^2)^{\frac{1}{2}}$.

Hạ thấp cấp và giải các phương trình :

6. $y'' - xy''' + y'''^2 = 0$.

7. $4ay'' - 2yy'' - y'^2 - 1 = 0$.

8. $yy'' - y'^2 - y^2\ln y = 0$.

9. $nx^3y'' - (y - xy')^2 = 0$.

10. $x^2y^2y'' - 3xy^2y' + 4y^3 + x^6 = 0$.

11. $(x^2y'' - xy' + y)y^2 - x^3 = 0$.

12. $x(x^2y' + 2xy)y'' + 4xy'^2 + 8xyy' + 4y^2 - 1 = 0$.

13. $yy'' - y'^4 - y'^2 = 0$.

14. $x^2(yy'' + y'^2) - 5xyy' + 4y^2 = 0$.

15. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$.

16. $a^2y'' - 2x\sqrt{1 + y'^2} = 0$.

17. $40y'''^3 - 45y''y'''y^{(4)} + 9y''^2y^{(4)} = 0$.

18. $y''^2 + 2xy'' - y' = 0$

19. $y''^2 - 2xy'' - y' = 0$.

20. Cho phương trình $y^{(4)} = f(x)$, trong đó

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } |x| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nghiệm y(x) của phương trình trên với điều kiện ban đầu

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

có dạng

$$y(x) = \frac{1}{6}\int_0^u |t|(x - t)^3 dt$$

trong đó

$$u = \begin{cases} x & \text{nếu } |x| < 1 \\ \operatorname{sign} x & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

2. b) $x = \cos t,\ y = -\frac{1}{8}t\cos 2t + \frac{5}{16}t + C_2\cos t -$

$$- \frac{5}{48}\sin 2t + \frac{C_1}{4}\cos 2t + \frac{1}{192}\sin 4t + C_3$$

3. $y = \frac{1}{6a^3c^5}[c^3(x+C_1)^2 - a^6]^{\frac{3}{2}} - \frac{a^3}{2c^3}(x+C_1)\ln[c^2(x+C_1) +$

$$+ \sqrt{c^4(x+C_1)^2 - a^6} + \frac{a^3}{2c^5}\sqrt{c^4(x+C_1)^2 - a^6}\,] + C_2x + C_3.$$

4. $x + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{1}{2}}.$

5. $y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2x + C_3.$

6. $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_1^2x_1^2}{2} + C_2x + C_3.$

7. $y = 2a + C_1(1 - \cos\varphi),\ x = C_1(\varphi - \sin\varphi) + C_2.$

8. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$

9. $y = nx\ln\frac{C_1x}{1 + C_2x}.$

10. $C_2x^{C_1^3} = \dfrac{C_1\sqrt{y} + \sqrt{C_1y - 2x^2}}{C_1\sqrt{y} - \sqrt{C_1y + 2x^2}} \times \exp\left[\dfrac{2C_1\sqrt{y}\sqrt{C_1y + 2x^2}}{(C_1^2 - C_1)y - 2x^2}\right]$

11. $C_2x^{C_1^2} = \dfrac{C_1\sqrt{y} + \sqrt{C_1y - 2x}}{C_1\sqrt{y} - \sqrt{C_1y - 2x}} - \exp\left[\dfrac{2C_1\sqrt{y}\sqrt{C_1y - 2x}}{(C_1^2 - C_1)y - 2x^2}\right]$

12. $y = \dfrac{(x^2 + C_1)^{\frac{3}{2}}}{3x^2} + \dfrac{C_2}{x^2}$.

13. $x = C_1\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) + C_2,\ y = C_1\sin\varphi$.

14. $y = C_1x\sqrt{x^2 + C_2}$.

15. $y = C_1x + C_2 + \sqrt{C_3x + C_4}$.

16. $y = C_2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left[e^{\frac{x^2}{a^2} + C_1} - e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + C_1\right)}\right]dx.$

18. $x = -\dfrac{2t}{3} + \dfrac{C_1}{t^2}\ ;\ y = \dfrac{2}{27}t^3 - \dfrac{2C_1}{3}\ln t + \dfrac{4C_1^2}{3t^3} + C_2.$

19. $x = \dfrac{C_1}{t^2} + \dfrac{2}{5}t^3\ ,\ y = -\dfrac{4C_1^2}{t} - \dfrac{7}{10}t^4 + \dfrac{2}{75}t^3 + C_2.$

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP n

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu một số tính chất và cấu trúc của tập nghiệm một lớp phương trình vi phân cấp cao đặc biệt. Đó là phương trình tuyến tính cấp n.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n có dạng tổng quát là

$$a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x) \qquad (1.1)$$

Như vậy ở đây hàm F trong định nghĩa dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp cao phụ thuộc một cách tuyến tính theo y, y', ..., $y^{(n)}$. Ta giả thiết các hàm $a_o(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, g(x) liên tục trên khoảng (a, b) và $a_o(x) \neq 0$ trên (a, b). Khi đó chia hai vế của (1.1) cho $a_o(x)$ ta được phương trình

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \qquad (1.2)$$

trong đó $p_i(x) = \dfrac{a_i(x)}{a_o(x)}$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_o(x)}$ (i = 1, 2, ..., n) là những hàm liên tục trên khoảng (a, b).

Nếu trong phương trình (1.2) hàm $f(x) \equiv 0$ tức là ta có phương trình

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \qquad (1.3)$$

thì nó được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n. Bấy giờ phương trình (1.2) được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp n.

Ta nhận thấy rằng, với các giả thiết đã nêu ở trên, đối với bất kì điểm $x_o \in (a, b)$ và $(y_o, y_o', \ldots, y_o^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ phương trình (1.2) có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu :

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_o',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}.$$

Thật vậy, kí hiệu

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_n(x)y + f(x),$$

phương trình (1.2) được viết dưới dạng

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1.4)$$

Lấy đoạn $[a_1, b_1]$ chứa điểm x_o và sao cho $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Khi đó ta có

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -p_n(x)\ ;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -p_{n-1}(x)\ ,\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x)$$

Do các hàm $p_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ liên tục trên đoạn kín $[a_1, b_1]$ nên chúng giới nội trên đó. Như vậy các đạo hàm riêng của hàm φ theo $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ giới nội trên miền $G = [a_1, b_1] \times \mathbb{R}^n$. Ngoài ra theo giả thiết đã nêu trên, φ liên tục trên G. Vì vậy các điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm ở chương 2 được thỏa mãn và ta suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét. Sau này sẽ thấy rằng nghiệm $y(x)$ nói trên không những chỉ xác định tại lân cận điểm x_o mà xác định trên toàn khoảng (a, b), tức là trên khoảng liên tục của các hệ số $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ và $f(x)$. Tạm thời trong chương này ta thừa nhận điều khẳng định trên.

Sau đây là một số tính chất của phương trình tuyến tính cấp n.

1) Phép thế biến số độc lập không làm mất tính tuyến tính của phương trình (1.1). Thật vậy, giả sử

$$x = \psi(t) \qquad (1.5)$$

là phép thế biến độc lập, trong đó ψ là hàm khả vi liên tục n lần trên khoảng (α, β) và $\psi'(t) \neq 0$ trên (α, β). Từ (1.3) ta có

$$dx = \psi'(t)dt \; ; \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\psi'(t)} \; ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\psi'^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\psi''(t)}{\psi'^3(t)}\frac{dy}{dt}$$

Tương tự ta dễ thấy rằng $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ được biểu diễn tuyến tính (và thuần nhất) qua $\dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^ky}{dt^k}$ với các hệ số là các hàm liên tục theo t. Thay các biểu thức này của $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ vào phương trình (1.1) ta đi đến phương trình tuyến tính cấp n mới :

$$b_o(t)\frac{d^ny}{dt^n} + b_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n(t)y = h(t)$$

Chú ý. Phép biến đổi (1.5) đưa phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n.

2) Phép biến đổi tuyến tính hàm phải tìm

$$y = v(x)z + \gamma(x) \qquad (1.6)$$

trong đó v, γ khả vi liên tục n lần trên (a, b) và $v(x) \neq 0$, không làm mất tính tuyến tính của phương trình (1.1). Thật vậy, ta có

$$\frac{dy}{dx} = v(x)\frac{dz}{dx} + v'(x)z + \gamma'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v(x)\frac{d^2z}{dx^2} + 2v'(x)\frac{dz}{dx} + v''(x)z + \gamma''(x),$$

....

Tương tự như vậy ta thấy đạo hàm cấp k : $\frac{d^ky}{dx^k}$ được biểu diễn tuyến tính qua z và các đạo hàm $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^kz}{dx^k}$ với các hệ số là các hàm của x. Sau khi thay các biểu thức này của y, y', ..., $y^{(n)}$ vào (1.1) ta đi đến phương trình tuyến tính cấp n mới :

$$c_o(x)z^{(n)} + c_1(x)z^{(n-1)} + \dots + c_n(x)z = d(x).$$

Nhận xét. a) Dễ thấy rằng phép biến đổi tuyến tính thuần nhất y = v(x)z đưa phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n (1.3) về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n.

b) Ta có thể chọn phép biến đổi tuyến tính y = v(x)z sao cho phương trình thu được sau phép biến đổi không chứa số hạng với đạo hàm cấp n − 1 của z. Thật vậy, vì

$$y^{(n)} = v(x)z^{(n)} + nv'(x)z^{(n-1)} + \dots,$$

$$y^{(n-1)} = v(x)z^{(n-1)} + \dots$$

nên sau khi thế vào phương trình (1.3) ta được

$$v(x)z^n + [nv'(x) + p_1(x)v(x)]z^{(n-1)} + \dots = 0$$

Ta chọn v(x) sao cho $nv'(x) + p_1(x)v(x) = 0$

Từ đây suy ra $v(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)dx}$.

§2. LÍ THUYẾT TỔNG QUÁT VỀ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CẤP n

Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu một số tính chất và cấu trúc của tập nghiệm phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \qquad (2.1)$$

trong đó $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ liên tục trên khoảng (a, b).

1. Một số tính chất của nghiệm phương trình

Để đơn giản cách viết về sau, ta kí hiệu

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y.$$

$L[y]$ được gọi là toán tử vi phân tuyến tính. Với kí hiệu trên phương trình (2.1) được viết dưới dạng

$$L[y] = 0 \qquad (2.2)$$

Toán tử $L[y]$ có các tính chất sau :

1) Đối với $y_1(x)$, $y_2(x)$ khả vi n lần liên tục ta có

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

Thật vậy, theo định nghĩa toán tử L ta có

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots +$$
$$+ p_n(x)(y_1 + y_2) = [y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots +$$
$$+ p_n(x)y_1] + [y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2] =$$
$$= L[y_1] + L[y_2].$$

2) Đối với hàm khả vi liên tục n lần $y(x)$ và hằng số C bất kì ta có

$$L[Cy] = CL[y],$$

nói cách khác, hằng số C có thể đưa ra ngoài dấu của toán tử vi phân.

Thật vậy, theo định nghĩa ta có

$$L[Cy] = (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \dots + p_n(x)Cy =$$
$$= C[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y] = CL[y].$$

Dựa vào tính chất của toán tử L ta suy ra các tính chất sau đây của tập nghiệm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n :

a) Nếu y(x) là nghiệm của phương trình (2.1) thì Cy(x) với C là hằng số tùy ý cũng là nghiệm của phương trình (2.1).

Thật vậy, vì y(x) là nghiệm nên $L[y(x)] = 0$. Theo tính chất toán tử L ta có $L[Cy(x)] = CL[y(x)] = C.0 = 0$.

b) Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm bất kì của phương trình (2.1) thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2.1).

Thật vậy, vì $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của (2.1) nên $L[y_1(x)] = 0$, $L[y_2(x)] = 0$. Theo tính chất của toán tử L ta có

$$L[y(x)] = L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + [y_2(x)]$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

c) Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ là các nghiệm của phương trình (2.1) thì

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ky_k(x)$$

cũng là nghiệm của phương trình (2.1). Tính chất này là hệ quả của các tính chất a), b). Để nghiên cứu tập tính chất nghiệm của phương trình (2.1) ta cần đến khái niệm sau đây :

2. Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của hệ hàm

Giả sử ta có hệ hàm $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ xác định trên khoảng (a, b).

Định nghĩa. Hệ hàm trên được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad (2.3)$$

trên (a, b).

Nếu đồng nhất thức (2.3) chỉ có thể xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên (a, b). Dễ thấy rằng, nếu một trong các hàm $\varphi_i(x)$ đồng nhất bằng 0 trên (a, b) thì hệ hàm $\{\varphi_i(x), i = 1, 2, \ldots, k\}$ phụ thuộc tuyến tính trên (a, b). Thật vậy, chẳng hạn $\varphi_1(x) \equiv 0$. Khi đó chọn $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$ ta đi đến đồng nhất thức (2.3).

Sau đây là một số ví dụ quan trọng về các hệ hàm độc lập tuyến tính trên khoảng (a, b) bất kì.

Ví dụ 1. Hệ hàm $1, x, x^2, \ldots, x^k$ độc lập tuyến tính trên mọi khoảng (a, b) bất kì. Thật vậy, giả sử tồn tại khoảng (α, β) và các hằng số $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_o + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k = 0 \qquad (2.4)$$

với mọi $x \in (\alpha, \beta)$.

Điều này vô lí vì vế trái của (2.4) là một đa thức cấp nhỏ thua hoặc bằng k nên có không quá k nghiệm.

Ví dụ 2. Hệ hàm $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ trong đó $\lambda_i \neq \lambda_j$ nếu $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$ là độc lập tuyến tính trên mọi khoảng (a, b) bất kì. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại khoảng (α, β) và các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \qquad (2.5)$$

trên (α, β). Không làm mất tổng quát ta giả sử $\alpha_k \neq 0$. Chia hai vế của đồng nhất thức (2.5) cho $e^{\lambda_1 x}$ và lấy đạo hàm đồng nhất thức thu được ta có :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} + \ldots +$$

$$+ \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} \equiv 0 \qquad (2.6)$$

Chia hai vế đồng nhất thức (2.6) cho $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ và lấy đạo hàm đồng nhất thức thu được ta có

$$\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)e^{(\lambda_k - \lambda_2)x} \equiv 0$$

Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta đi đến hệ thức

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})e^{(\lambda_k - \lambda_{k-1})x} \equiv 0$$

Điều này vô lí vì $\alpha_k \neq 0$ và các λ_i khác nhau từng đôi một.

Ví dụ 3. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các hằng số khác nhau từng đôi một. Khi đó hệ hàm

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1}e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{k_2}e^{\lambda_2 x},$$

$$\cdots\cdots$$

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{k_k}e^{\lambda_k x}$$

độc lập tuyến tính trên mọi khoảng (a, b) (ở đây $k_1, k_2, \ldots, k_k$ là các số tự nhiên).

Chứng minh khẳng định này gần tương tự như chứng minh ví dụ 2. Chúng tôi dành cho độc giả chứng minh, chẳng hạn với trường hợp k = 3.

Ví dụ 4. Hệ hàm $-1, -\sin^2 x, -\cos^2 x$ là phụ thuộc tuyến tính trên mọi khoảng (a, b). Thật vậy, ta chỉ việc chọn $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$.

3. Định thức Vronski. Qua các ví dụ trên ta thấy việc xét xem một hệ hàm phụ thuộc tuyến tính hay độc lập tuyến tính nhiều khi không đơn giản. Trong trường hợp hệ hàm đã cho khả vi một số lần cần thiết, việc nghiên cứu đó có thể đơn giản hơn nhờ định thức Vronski mà ta sẽ đưa ra định nghĩa dưới đây.

Giả sử hệ hàm $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ khả vi k − 1 lần trên khoảng (a, b). Khi đó định thức

$$W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k] \equiv W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_k'(x) \\ \dots\dots\dots & & & \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Vronski của hệ hàm trên.

Ví dụ. Hệ hàm x, sinx, cosx có định thức Vronski là

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x$$

Định lí sau đây cho ta một điều kiện cần của sự phụ thuộc tuyến tính của hệ hàm.

Định lí 1. Giả sử hệ hàm $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ khả vi k − 1 lần và phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b). Khi đó định thức Vronski của chúng đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó.

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại các hằng số α_1, α_2, ..., α_k không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \quad (2.7)$$

Lấy đạo hàm đồng nhất thức (2.7) k − 1 lần ta đi đến hệ biểu thức sau :

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k^{(k-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Với mỗi $x \in (a, b)$ cố định (2.8) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất. Theo lí luận trên, hệ có nghiệm không tầm thường $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Do đó định thức Crame của hệ phải bằng 0. Dễ thấy định thức Crame của hệ là định thức Vronski $W(x)$ của hệ hàm đang xét. Do x là điểm bất kì thuộc khoảng (a, b) nên từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Hệ quả. Nếu định thức Vronski của hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ khác 0 dù chỉ tại một điểm của khoảng (a, b) thì hệ hàm trên độc lập tuyến tính trên (a, b).

Định lí trên chỉ cho ta điều kiện cần của sự phụ thuộc tuyến tính của hệ hàm chứ không phải là điều kiện đủ. Chẳng hạn xét ví dụ sau đây :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases} ; \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Khi đó $W[\varphi_1, \varphi_2] \equiv 0$ trên $(-\infty, +\infty)$. Tuy vậy $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ độc lập tuyến tính trên khoảng $(-\infty, +\infty)$. Thật vậy, nếu tồn tại các hằng số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 (chẳng hạn $\alpha_2 \neq 0$ sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

thì trên khoảng $(-\infty, 0]$ ta phải có $\alpha_2 x^2 = 0$. Điều này vô lí vì $\alpha_2 \neq 0$.

Như vậy để sự đồng nhất bằng 0 trên (a, b) của định thức Vronski của hệ hàm là điều kiện đủ cho sự phụ thuộc tuyến tính thì cần thêm điều kiện phụ nữa. Một trong những điều kiện phụ đó là đòi hỏi các hàm của hệ là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất. Cụ thể ta có khẳng định sau đây :

Định lí 2. Giả sử hệ $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là n nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n (2.1). Điều kiện cần và đủ để hệ hàm trên phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) là định thức Vronski của chúng đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó.

Chứng minh. Điều kiện cần được suy ra từ định lí 1 như một trường hợp riêng. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử định thức Vronski

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots\dots\dots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

đồng nhất bằng 0 trên (a, b). Lấy điểm $x_o \in (a, b)$ và xét hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất sau đây với các ẩn số là α_1, α_2, ..., α_n :

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_o) + \alpha_2 y_2(x_o) + \dots + \alpha_n y_n(x_o) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_o) + \alpha_2 y_2'(x_o) + \dots + \alpha_n y_n'(x_o) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_o) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_o) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_o) = 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Dễ thấy rằng định thức Crame của hệ (2.9) là $W(x_o)$. Theo giả thiết $W(x_o) = 0$. Do đó hệ (2.9) có nghiệm không tầm thường α_1^o, α_2^o, ..., α_n^o. Xét hàm

$$y(x) = \alpha_1^o y_1(x) + \alpha_2^o y_2(x) + \dots + \alpha_n^o y_n(x) \qquad (2.10)$$

Theo tính chất c) y(x) là nghiệm của phương trình (2.1). Mặt khác, vì α_1^o, α_2^o, ..., α_n^o là nghiệm của hệ (2.9) nên từ (2.9), (2.10) ta suy ra

$$y(x_o) = 0,\ y'(x_o) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_o) = 0.$$

Do phương trình (2.1) có nghiệm tầm thường $z(x) \equiv 0$ cũng thỏa mãn điều kiện ban đầu $z(x_o) = 0$, $z'(x_o) = 0$, ..., $z^{(n-1)}(x_o) = 0$ nên theo định lí tồn tại và duy nhất nghiệm ta phải có $y(x) \equiv z(x)$ hay

$$\alpha_1^o y_1(x) + \alpha_2^o y_2(x) + \ldots + \alpha_n^o y_n(x) \equiv 0$$

Vì $\alpha_1^o, \alpha_2^o, \ldots, \alpha_n^o$ không đồng thời bằng 0 nên từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Hệ quả. Định thức Vronski của n nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n hoặc là đồng nhất bằng 0 trên (a, b) hoặc là khác 0 tại mọi điểm của khoảng (a, b).

4. Công thức Ostrogradski – Liuvil. Từ quá trình trên ta thấy vai trò của định thức Vronski quan trọng như thế nào. Do việc giải phương trình (2.1) trong trường hợp tổng quát không thực hiện được nên tìm biểu thức của định thức Vronski của n nghiệm phương trình (2.1) là điều không thể làm được. Tuy vậy Ostrogradski và Liuvil đã tìm ra được biểu thức của định thức Vronski của n nghiệm phương trình (2.1) mà không cần giải nó và đưa ra công thức nổi tiếng sau đây :

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \quad C = \text{const}$$

hoặc

$$W(x) = W(x_o)e^{\int_{x_o}^{x} p_1(x)dx}$$ trong đó $p_1(x)$ là hệ số của $y^{(n-1)}$.

Bây giờ ta chứng minh công thức trên. Ta có định thức Vronski của hệ nghiệm bất kì là

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & & y'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Theo qui tắc lấy đạo hàm của định thức ta được :

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Vì $n - 1$ định thức đầu của tổng này có hai hàng giống nhau và do đó bằng 0 nên cuối cùng ta có

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Nhân hàng thứ nhất với $p_n(x)$, hàng thứ hai với $p_{n-1}(x)$, ..., hàng thứ $n - 1$ với $p_2(x)$ rồi cộng với hàng cuối cùng và chú ý rằng $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là nghiệm của (2 . 1) ta được

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x)W(x)$$

hay

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

Từ phương trình này suy ra các công thức phải tìm.

Hệ quả. Từ công thức Ostrogradski – Liuvil một lần nữa ta suy ra rằng định thức Vronski của hệ n nghiệm phương trình (2.1) hoặc là khác 0 tại mọi điểm, hoặc là đồng nhất bằng 0 trên (a, b).

Công thức Ostrogradski – Liuvil được ứng dụng để tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

khi biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ của nó. Giả sử $y(x)$ là nghiệm bất kì của phương trình này khác $y_1(x)$. Khi đó theo công thức Ostrogradski – Liuvil ta có

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y'_1 & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

hay

$$y_1y' - y'_1y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Chia hai vế cho $y_1^2(x)$ ta được

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Do đó

$$y = y_1\left\{\int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2\right\}$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp hai .

Ví dụ. Dễ kiểm tra rằng phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

có nghiệm riêng $y_1 = x$. Trong trường hợp của ta :

$p(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$. Do đó

$$y = x\left\{\int C_1 \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx + C_2\right\}$$

$$= x\left\{C_1\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2\right\} = x\left\{C_1\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right] + C_2\right\}$$

$$= C_2x + C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\right)$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đang xét trên.

5. Hệ nghiệm cơ bản. Nghiệm tổng quát

Định nghĩa. Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Câu hỏi đặt ra ở đây là phương trình (2.1) có hệ nghiệm cơ bản không ? Ta có khẳng định sau đây :

Định lí 3. *Phương trình (2.1) với các hệ số $p_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ liên tục trên (a, b) có vô số hệ nghiệm cơ bản.*

Chứng minh. Chọn ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bất kì sao cho $\det A \neq 0$.

Lấy điểm $x_o \in (a, b)$ và chọn nghiệm $y_1(x)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y_1(x_o) = a_{11}$, $y'_1(x_o) = a_{21}$, ..., $y_1^{(n-1)}(x_o) = a_{n1}$

Theo nhận xét ở §1 nghiệm này tồn tại và duy nhất xác định trên (a, b) . Chọn nghiệm y_2 (x) của phương trình (2. 1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y_2(x_o) = a_{12}$, $y'_2(x_o) = a_{22}$, ..., $y_2^{(n-1)}(x_o) = a_{n2}$. Tương tự như trên, nghiệm này tồn tại và duy nhất xác định trên (a, b).

Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được nghiệm y_n (x) với điều kiện ban đầu

$$y_n(x_o) = a_{1n},\ y'_n(x_o) = a_{2n},\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_o) = a_{nn}$$

xác định trên (a, b).

Như vậy ta đã xây dựng được n nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ của phương trình (2.1). Dễ thấy rằng

$$W\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right]_{x=x_o} = W(x_o) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det A \neq 0.$$

Do đó hệ n nghiệm được xây dựng ở trên độc lập tuyến tính và vì thế là hệ nghiệm cơ bản. Do A là ma trận bất kì có định thức khác 0 nên phương trình (2.1) có vô số hệ nghiệm cơ bản.

Chú ý. Nếu trong quá trình xây dựng hệ nghiệm cơ bản ở trên ta chọn ma trận A là ma trận đơn vị cấp n thì hệ nghiệm cơ bản thu được tương ứng được gọi là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc.

Định lí 4. *Giả sử* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ *là hệ nghiệm cơ bản của phương trình* (2.1). *Khi đó biểu thức*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

(C_1, C_2, ... , C_n là các hằng số)

cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) *trong miền* $G = (a, b) \times \mathbf{R}^n$.

Thật vậy, theo tính chất c) y(x) là nghiệm của (2.1). Xét hệ

$$\begin{cases} y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) \\ y' = C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x) + \dots + C_n\,y'_n\,(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

Vì định thức Crame của hệ này là định thức Vronski W(x) của hệ n nghiệm độc lập tuyến tính $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ nên luôn luôn khác 0 trên (a, b). Do đó từ hệ (2.10) ta giải được

$$C_i = C_i(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) , \; i = 1, 2, \dots, n$$

Để tìm nghiệm riêng $y_o(x)$ với điều kiện ban đầu

$$y_o(x_o) = y_o^o \, , \; y'_o\,(x_o) = y'_o \, , \dots, \; y_o^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$$

ta thay các giá trị tương ứng vào (2.10)

$$\begin{cases} y_o^o = C_1y_1(x_o) + C_2y_2(x_o) + \dots + C_ny_n(x_o) \\ y'_o = C_1y'_1(x_o) + C_2y'_2(x_o) + \dots + C_ny'_n(x_o) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_o^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x_o) + C_2y_2^{(n-1)}(x_o) + +C_ny_n^{(n-1)}(x_o) \end{cases}$$

Định thức Crame của hệ phương trình đại số tuyến tính này là $W(x_o) \neq 0$ nên ta có thể giải ra được $C_i = C_i^o$, i = 1, 2, ..., n.

Khi đó nghiệm

$$y_o(x) = C_1^o\, y_1(x) + C_2^oy_2(x) + \dots + C_n^oy_n(x)$$

là nghiệm phải tìm.

Ví dụ 1 . Tìm nghiệm tổng quát y(x) và nghiệm riêng $y_o(x)$ với điều kiện ban đầu $y_o(0) = -1$, $y'_o(0) = 1$ của phương trình

$$y'' + 4\,y = 0 \qquad (2.11)$$

Về sau ta sẽ biết cách giải loại phương trình này. Tạm thời bằng phương pháp kiểm tra trực tiếp ta nhận thấy $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$ là các nghiệm của phương trình (2.11). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính vì định thức Vronski

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Do đó nghiệm tổng quát của (2.11) là

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Để tìm nghiệm riêng $y_o(x)$ ta xác định C_1^o, C_2^o từ hệ

$$\begin{cases} C_1^o \cos 0 + C_2^o \sin 0 = -1 \\ -2C_1^o \sin 0 + 2C_2^o \cos 0 = 1 \end{cases}$$

Suy ra $C_1^o = -1, \quad C_2^o = \dfrac{1}{2}$

Do đó nghiệm riêng phải tìm là

$$y_o(x) = -\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

Ví dụ 2. Xét phương trình Becxel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0 \qquad (x \neq 0)$$

Dễ kiểm tra rằng $y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình Becxel trên khoảng $(0, +\infty)$. Do đó biểu thức

$$y = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình trong miền

$$0 < x < +\infty, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty.$$

Định lí 3 chứng tỏ rằng phương trình tuyến tính thuần nhất (2.1) có n nghiệm độc lập tuyến tính trên (a, b). Dưới đây ta sẽ thấy rằng số nghiệm độc lập tuyến tính lớn nhất của phương trình (2.1) đúng bằng n.

Định lí 5. *Hệ n + 1 nghiệm* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ *của phương trình* (2.1) *phụ thuộc tuyến tính trên khoảng* (a, b).

Thật vậy, nếu hệ con $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên (a, b), tức là tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$$

thì hệ n + 1 nghiệm trên cũng phụ thuộc tuyến tính trên (a, b) và lúc đó

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) \equiv 0$$

Nếu hệ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ là độc lập tuyến tính trên (a, b) thì chúng lập thành hệ nghiệm cơ bản. Theo định lý 4, tồn tại $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

tức là hệ n + 1 nghiệm trên phụ thuộc tuyến tính trên (a, b).

Từ các tính chất a), b) của nghiệm phương trình (2.1) và các định lí 3, 4, 5 ta đi đến khẳng định sau đây :

Tập hợp nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n lập nên một không gian tuyến tính n chiều trên trường số thực **R**.

6. Lập phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ nghiệm cơ bản cho trước. Ở phần trước ta đã chứng minh rằng phương trình tuyến tính thuần nhất với các hệ số liên tục trên (a, b) có hệ nghiệm cơ bản. Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại sau đây : Hệ n hàm khả vi liên tục n lần, độc lập tuyến tính trên (a, b) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ và có định thức Vronski khác 0 trên đó sẽ xác định duy nhất một phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n sao cho phương trình này nhận hệ hàm đã cho làm hệ nghiệm cơ bản.

Thật vậy, giả sử $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ là hệ số của phương trình phải tìm và

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Để $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ là nghiệm của phương trình phải tìm ta phải có

$$\begin{cases} \varphi_1^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)\varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)\varphi_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)\varphi_n(x) = 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} p_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + p_2\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + p_n\varphi_1(x) = -\varphi_1^{(n)}(x) \\ p_1\varphi_2^{(n-1)}(x) + p_2\varphi_2^{(n-2)}(x) + \dots + p_n\varphi_2(x) = -\varphi_2^{(n)}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1\varphi_n^{(n-1)}(x) + p_2\varphi_n^{(n-2)}(x) + \dots + p_n\varphi_n(x) = -\varphi_n^{(n)}(x) \end{cases}$$

Giá trị tuyệt đối của định thức Crame của hệ này là $|W(x)| \neq 0$ trên (a, b) nên hệ xác định một cách duy nhất các hệ số $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... , $p_n(x)$ của phương trình cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai nhận $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ làm hệ nghiệm cơ bản.

Giả sử phương trình phải tìm là

$$y'' + p\,y' + qy = 0.$$

Khi đó p, q được xác định từ hệ

$$\begin{cases} -\,p\sin x + q\cos x = \cos x \\ p\cos x + q\sin x = \sin x \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $p\,(x) \equiv 0$, $q\,(x) \equiv 1$.

Do đó phương trình phải tìm có dạng

$$y'' + y = 0$$

Ví dụ 2. Tìm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai nhận

$$y_1 = x,\ y_2 = x^2$$

làm hệ nghiệm cơ bản.

Các hàm này độc lập tuyến tính trên khoảng $(-\infty, +\infty)$. Tuy nhiên định thức Vronski bằng 0 tại điểm $x = 0$.

Giải hệ (giả sử $x \neq 0$)

$$\begin{cases} p + xq = 0 \\ 2xp + x^2q = -2 \end{cases}$$

ta được $p = -\dfrac{2}{x}$, $q = \dfrac{2}{x^2}$.

Do đó phương trình phải tìm có dạng

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = 0$$

Ta thấy ở đây các hệ số $p = -\dfrac{2}{x}$, $q = \dfrac{2}{x^2}$ gián đoạn tại điểm $x = 0$. Điều này có thể dự đoán được vì tại đó định thức Vronski của hai hàm trên bằng 0. Các hàm $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình tìm được trên mỗi khoảng $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT CẤP n

1. Nghiệm tổng quát

Trong phần này ta sẽ xét một số tính chất và cấu trúc nghiệm của phương trình

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

trong đó các hàm $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Nếu dùng kí hiệu toán tử vi phân tuyến tính $L[y]$ thì phương trình (3.1) có thể được viết dưới dạng

$$L[y] = f(x)$$

Dựa vào tính chất của toán tử L, ta dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây của phương trình tuyến tính không thuần nhất.

a) Nếu $z(x)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (3.2)$$

và $y_1(x)$ là một nghiệm riêng nào đấy của (3.1) thì $y(x) = z(x) + y_1(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (3.1). Thật vậy, theo tính chất của toán tử L ta có

$$L[y] = L[z + y_1] = L[z] + L[y_1] = 0 + f(x) = f(x)$$

b) Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm tương ứng của các phương trình không thuần nhất

$$L[y] = f_1(x),$$

$$L[y] = f_2(x)$$

thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm của phương trình

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

Điều này suy ra một cách hiển nhiên từ tính chất của toán tử L. Tính chất này của phương trình tuyến tính không thuần nhất đôi khi còn được gọi là *nguyên lí chồng chất nghiệm*.

Bây giờ giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình (3.2) ; y^* (x) là một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (3. 1). Khi đó biểu thức

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)+y^*(x) \tag{3.3}$$

cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (3. 1) trong miền $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$. Thật vậy, theo tính chất a) y(x) là nghiệm của (3.1). Xét hệ

$$\begin{cases} y = C_1y_1(x)+C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) + y^*(x) \\ y' = C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x) + \dots + C_ny'_n(x) + y^{*'}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x) + y^{*(n-1)}(x) \end{cases}$$

Nếu coi C_1 , C_2 , ..., C_n là ẩn thì đây là hệ phương trình đại số tuyến tính không thuần nhất. Định thức Crame của hệ là định thức Vronski của hệ nghiệm độc lập tuyến tính trên (a, b) y_1 (x) , y_2 (x) , ... , y_n (x) và do đó khác 0 trên (a, b). Bởi vậy từ hệ phương trình trên ta luôn giải ra được

$$C_i = \varphi_i(x , y , y', ,y^{(n-1)})$$

$$(i = 1, 2, ..., n)$$

Điều này chứng tỏ biểu thức (3.3) là nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) trong miền G.

Từ (3.3) ta suy ra rằng nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng tổng của một nghiệm riêng nào đấy của phương trình đó và nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.

Ví dụ. Xét phương trình

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x$$

Dễ kiểm tra trực tiếp rằng phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + 2y = 0$$

có 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos\sqrt{2}x$, $y_2 = \sin\sqrt{2}x$ và do đó có nghiệm tổng quát

$$z = C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x$$

Phương trình không thuần nhất

$$y'' + 2y = 2$$

có nghiệm riêng $y_1^*(x) = 1$; phương trình

$$y'' + 2y = 3e^x$$

có nghiệm riêng $y_2^*(x) = e^x$.

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm phương trình đang xét có nghiệm riêng $y^*(x) = 1 + e^x$ và do đó có nghiệm tổng quát là :

$$y(x) = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 1 + e^x$$

2. Phương pháp biến thiên hằng số (Phương pháp Lagrange)

Trong phần trên ta đã thấy rằng nếu biết được nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) và một nghiệm riêng nào đấy của (3.1) thì ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát của (3.1). Sau này ta sẽ thấy rằng trong nhiều trường hợp ta có thể tìm được hệ nghiệm cơ bản của (3.2) và do đó nghiệm tổng quát của nó. Vì vậy việc tìm nghiệm riêng của (3.1) đóng vai trò rất quan trọng. Dưới đây ta sẽ chỉ ra một phương pháp tìm nghiệm riêng của (3.1) khi biết hệ nghiệm cơ bản của (3. 2). Đó là phương pháp biến thiên hằng số hoặc phương pháp Lagrange.

Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là n nghiệm độc lập tuyến tính của (3.2). Ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ của (3.1) dưới dạng

$$y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \qquad (3.4)$$

và tìm cách chọn các hàm $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ sao cho $y^*(x)$ là nghiệm của (3.1). Ở đây ta có n hàm phải tìm liên hệ với nhau bởi một điều kiện là biểu thức (3. 4) thỏa mãn phương trình (3.1). Do đó ta có thể chọn n – 1 hệ thức còn lại bất kì để xác định $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$. Tuy vậy ta phải chọn thế nào để cách tính toán được đơn giản nhất. Ta tiến hành như sau :

Lấy đạo hàm hai vế của (3. 4) ta có

$$y^{*'}(x) = C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_n(x) + \dots + C_n(x)y'_n(x) +$$

$$+ C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + \dots + C'_n(x)y_n(x).$$

Ta đòi hỏi $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ sao cho

$$C'_1(x)y_2(x) + C'_2(x)y_2(x) + \dots + C'_n(x)y_n(x) = 0 \qquad (1')$$

Khi đó

$$y^{*''}(x) = C_1(x)y''_1(x) + C_2(x)y''_2(x) + \dots + C_n(x)y''_n(x) +$$

$$+ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + \dots + C'_n(x)y'_n(x).$$

Ta đòi hỏi

$$C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + \dots + C'_n(x)y'_n(x) = 0 \qquad (2')$$

Tiếp tục quá trình này đến bước thứ n – 1 ta được :

$$C'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \quad (n-1)'$$

Cuối cùng

$$y^{*(n)}(x) = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) +$$

$$+ C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Bây giờ ta đòi hỏi $y^*(x)$ thỏa mãn phương trình (3.1). Muốn vậy ta thay các biểu thức của $y^*(x)$, $y^{*'}(x)$, ..., $y^{*(n-1)}(x)$, $y^{*(n)}(x)$ vào (3.1) và chú ý đến (1'), (2'), ... , (n – 1)'.

Khi đó ta có

$$C_1(x)\left[y_1^{(n)}(x) + p_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ...+ p_n(x)y_1(x)\right] +$$
$$+ C_2(x)\left[y_2^{(n)}(x) + p_1(x)y_2^{(n-1)}(x) + ...+ p_n(x)y_2(x)\right] + ... +$$
$$+ C_n(x)\left[y_n^{(n)}(x) + p_1(x)y_n^{(n-1)}(x) + ...+ p_n(x)y_n(x)\right] +$$
$$+ C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + ...+C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \equiv f(x)$$

Vì $y_1(x)$, $y_n(x)$, ..., $y_n(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (3.2) nên ta được

$$C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + ...+ C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)(n)'$$

Kết hợp (1'), (2'), ... , (n – 1)',(n)' ta đi đến hệ phương trình đại số tuyến tính sau đây :

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + ... + C'_n(x)y_n(x) = 0 \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_n(x) + ... + C'_n(x)y'_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + ... + C'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + C'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

Định thức Crame của hệ (3. 5) là định thức Vronski của n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (3. 2) nên khác 0 trên (a, b). Do đó từ hệ phương trình (3. 5) ta xác định được $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, ... , $C'_n(x)$:

$$C'_i(x) = \psi_i(x)\ ,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó

$$C_i(x) = \int\psi_i(x)dx\ ,\ i = 1, 2, ..., n$$

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$xy'' - y' = x^2$$

Phương trình thuần nhất tương ứng

$$xy'' - y' = 0$$

có thể viết được dưới dạng

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x},$$

suy ra $y' = C_1 x$ và do đó

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Từ đây ta suy ra nó có hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$

Tìm nghiệm riêng của phương trình đang xét dưới dạng

$$y^*(x) = C_2(x)x^2 + C_1(x)$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 \,.\, C'_1(x) + x^2C'_2(x) = 0 \\ 0 \,.\, C'_1(x) + 2xC'_2(x) = x \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được

$$C'_1(x) = -\frac{x^2}{2} \;;\; C'_2(x) = \frac{1}{2}$$

Do đó $\qquad C_1(x) = -\frac{x^3}{6},\ C_2(x) = \frac{1}{2}x$ và

$$y^*(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^3 = \frac{x^3}{3}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3} \quad (C_1,\ C_2 \text{ là hằng số })$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta dễ thấy rằng phương trình thuần nhất tương ứng có hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y^*(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được

$$C'_1(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad C'_2(x) = 1.$$

Do đó $C_1(x) = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$, $C_2(x) = \int dx = x$ (vì ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng nên các hằng số của tích phân tương ứng được coi bằng 0).

Nghiệm riêng của phương trình không thuần có dạng

$$y^*(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

và do đó phương trình đang xét có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + \sin x$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kì.

Nhận xét. Nếu biết được hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất (3.2) thì ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (3.1).

Thành vậy, giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất (3.2). Bằng phương pháp biến thiên hằng số ta tìm được nghiệm riêng $y^*(x)$ của phương trình không thuần nhất (3.1).Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) có dạng

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) + y^*(x)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Cho hệ hàm $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ liên tục trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng hệ hàm trên phụ thuộc tuyến tính trên đoạn đó khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} \int_a^b y_1^2(x)dx & \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx & \dots & \int_a^b y_1(x)y_k(x)dx \\ \int_a^b y_2(x)y_1(x)dx & \int_a^b y_2^2(x)dx & \dots & \int_a^b y_2(x)y_k(x)dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b y_k(x)y_1(x)dt & \int_a^b y_k(x)y_2(x)dx & \dots & \int_a^b y_k^2(x)dx \end{vmatrix} = 0$$

2. Chứng minh rằng phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp n với các hệ số liên tục trên (a, b) có đúng n + 1 nghiệm độc lập tuyến tính trên (a, b).

3. Tìm phương trình tuyến tính thuần nhất nhận các hệ hàm sau đây làm hệ nghiệm cơ bản :

a) $1, x, x^2$;

b) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$.

Trong các khoảng nào thì phương trình tương ứng với b) có các hệ số liên tục (nếu đòi hỏi hệ số của đạo hàm cấp cao nhất bằng 1) ; Chứng tỏ rằng 1, cos2x cũng là hệ nghiệm cơ bản của phương trình đó.

4. Tính định thức Vronski của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

biết nghiệm riêng của nó là $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

6. Giải phương trình

$$y''\sin^2 x - 2y = 0$$

biết nghiệm riêng $y_1 = \cot g x$.

7. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

biết hai nghiệm riêng của nó là $y_1 = x$ và $y_2 = x^2$.

8. Giải phương trình

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$$

biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1 = x$.

9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$$

biết một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là $y_1 = e^x$.

10. Giải phương trình

$$y'' + \frac{1}{x^2\ln x}y = e^x\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$$

biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1 = \ln x$.

11. Giả sử trên (a, b) $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính, có đạo hàm liên tục và

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Chứng minh rằng, tồn tại điểm $x_o \in (a, b)$ sao cho

$$y_1(x_o) = y_2(x_o) = y'_1(x_o) = y'_2(x_o) = 0$$

12. Tìm hệ nghiệm cơ bản và định thức Vronski của hệ phương trình

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y_j\ ,\ (i = 1, ..., n)$$

trong đó $a_j(x)$, $j = 1, 2, ..., n$ liên tục trên (a, b).

13. Cho hai phương trình

$$y'' = p(x)y, \qquad (1)$$

$$z'' = q(x)z \qquad (2)$$

Tìm điều kiện mà các hàm p và q phải thỏa mãn để có một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình (1) và một nghiệm riêng $z_1(x)$ của phương trình (2) nghiệm đúng hệ thức $y_1(x)z_1(x) \equiv 1$. Có thể có nhiều cặp nghiệm y_1, z_1 khác nhau thỏa mãn hệ thức đó không ?

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. Chứng minh điều kiện cần khá dễ. Điều kiện đủ có thể suy ra từ nhận xét : tích phân của một hàm liên tục không âm từ a đến b bằng không thì hàm dưới dấu tích phân đồng nhất bằng 0.

2. Chú ý rằng hiệu của hai nghiệm phương trình thuần nhất là một nghiệm của phương trình thuần nhất.

3. a) $y''' = 0$; b) $y'' - 2y'\text{cotg}2x = 0$.

4. $W(x) = \dfrac{C}{1-x^2}$.

5. $y = C_1\dfrac{\sin x}{x} + C_2\dfrac{\cos x}{2}$.

6. $y = C_2(C_1 - C_2x)\text{cotg}x$.

7. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$.

8. $y = C_1x + C_2x^2 + x^3$.

10. $y = \ln x\left(C_1 + C_2\int\dfrac{dx}{\ln^2 x} + e^x\right)$

12. Hệ giải được.

Chương V

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP n DẠNG ĐẶC BIỆT

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu một số lớp phương trình tuyến tính mà đối với chúng, ta có thể xây dựng được nghiệm tổng quát hoặc nghiên cứu được một số tính chất của nghiệm.

§1. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG

Nó có dạng tổng quát

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y_n = 0 \tag{1.1}$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các hằng số thực. Nếu ta dùng kí hiệu của toán tử vi phân tuyến tính

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

thì phương trình (1. 1) được viết dưới dạng

$$L[y] = 0 \tag{1.2}$$

Trước khi đi đến việc xây dựng nghiệm tổng quát của phương trình (1.1) ta chứng minh khẳng định say đây :

Bổ đề 1. Nếu phương trình (1.1) có nghiệm phức $y(x) = u(x) + iv(x)$ thì phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ là các nghiệm thực của phương trình (1.1).

Thật vậy, theo tính chất của toán tử L ta có

$$L[y(x)] = L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)].$$

Mặt khác do y (x) là nghiệm của (1.1) nên theo (1.2) ta có

$$L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$$

Từ đây suy ra

$$L[u(x)] \equiv 0 \ ; \quad L[v(x)] \equiv 0$$

Nhận xét. Từ cách chứng minh ta suy ra rằng, khẳng định của bổ đề đúng cho cả trường hợp khi các hệ số của phương trình tuyến tính thuần nhất là các hàm số thực.

Bây giờ ta xây dựng nghiệm tổng quát của phương trình (1.1). Ta tìm nghiệm của (1.1) dưới dạng $y = e^{\lambda x}$, trong đó hằng số λ được xác định sao cho y là nghiệm của (1.1). Muốn vậy ta thay biểu thức của y vào (1.1). Ta có

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \ , \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \ , \ \ldots \ , \ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Do đó :

$$L[y] = L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)e^{\lambda x} \qquad (1.3)$$

Ta kí hiệu

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1.4)$$

(1. 4) được gọi là *đa thức đặc trưng* của phương trình (1.1). Từ (1.3) ta có

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}F(\lambda) \qquad (1.5)$$

Vì $e^{\lambda x} \neq 0$ nên hàm $y = e^{\lambda x}$ là nghiệm của (1.1) khi và chỉ khi

$$F(\lambda) = 0$$

hay

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1.6)$$

Hệ thức (1.6) được gọi là *phương trình đặc trưng* tương ứng với (1.1). Như vậy để hàm $e^{\lambda x}$ là nghiệm của (1.1) thì λ phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (1. 6) và ngược lại. Ta sẽ xét các trường hợp riêng biệt sau đây.

1. Phương trình đặc trưng (1.6) có n nghiệm thực khác nhau : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ nếu $i \neq j$)

Khi đó ta xây dựng được n nghiệm riêng của phương trình (1.1) sau :

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ \ldots, \ y_n = e^{\lambda_n x}$$

Theo ví dụ 2 ở phần 2, §2, chương 4, hệ n hàm trên độc lập tuyến tính và do đó lập nên hệ nghiệm cơ bản của phương trình (1.1).

Bởi vậy, trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (1.1) có dạng

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

trong đó $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số bất kì.

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

Phương trình đặc trưng tương ứng là

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

hay
$$\lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

Do đó phương trình đặc trưng có các nghiệm thực khác nhau :

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = -2.$$

Phương trình vi phân đang xét có hệ nghiệm cơ bản là $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = e^{-2x}$ và vì thế nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

2. Phương trình đặc trưng (1.6) có n nghiệm khác nhau : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nhưng trong chúng có nghiệm phức

Nếu xây dựng nghiệm của (1.1) như đã làm ở phần 1 thì ta vẫn được hệ n nghiệm độc lập tuyến tính nhưng trong chúng có nghiệm phức. Để tránh điều này ta tiến hành như sau : Giả sử $\alpha + i\beta$ là một nghiệm phức của phương trình đặc trưng (1.6). Khi đó $\alpha - i\beta$ cũng là nghiệm của (1.6). Đối với cặp nghiệm phức liên hợp này của (1.6) ta có hai nghiệm phức của (1.1) là $e^{(\alpha + i\beta)x}$, $e^{(\alpha - i\beta)x}$. Theo công thức Ơle

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Áp dụng bổ đề đã chứng minh ở trên ta suy ra rằng phần thực $e^{\alpha x}\cos\beta x$, phần ảo $e^{\alpha x}\sin\beta x$ là hai nghiệm thực của phương trình (1.1). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính vì nếu ta có

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \equiv 0$$

thì suy ra

$$\begin{cases} C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x \equiv 0 \\ -C_1\beta\sin\beta x + C_2\beta\cos\beta x \equiv 0 \end{cases}$$

Định thức Crame của hệ này là

$$\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ -\beta\sin\beta x & \beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta \neq 0$$

nên $$C_1 = C_2 = 0.$$

Như vậy ứng với mỗi cặp nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ của phương trình (1.6) ta xây dựng được hai nghiệm thực độc lập tuyến tính của phương trình (1.1) là $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Kết hợp chúng với những nghiệm thực khác ta xây dựng được hệ nghiệm cơ bản của (1.1).

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

hay

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

Do đó phương trình đặc trưng có các nghiệm là $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Theo lí luận trên ta được ba nghiệm thực độc lập tuyến tính của phương trình đang xét là

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{2x}\sin 3x$$

và do đó nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x$$

(C_1, C_2, C_3 là các hằng số bất kì).

3. Trường hợp phương trình đặc trưng (1.6) có nghiệm bội

Nếu một nghiệm nào đó của phương trình đặc trưng (1.6) có bội $\geqslant 2$ thì bằng cách xây dựng nghiệm như ở phần 1 hoặc 2 ta không thể xây dựng đủ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (1.1). Cụ thể, chẳng hạn nghiệm λ_1 bội k, còn các nghiệm còn lại là đơn thì bằng cách xây dựng như trên ta chỉ được $n - k + 1$ nghiệm độc lập tuyến tính của (1.1) và như vậy ta còn thiếu $k - 1$ nghiệm độc lập tuyến tính nữa. Để khắc phục khó khăn này, trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây :

Bổ đề 2. Với mọi số nguyên $m \geqslant 0$ ta có

$$L[x^m e^{\lambda x}] = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} F^{(\nu)}(\lambda)\, x^{m-\nu} e^{\lambda x}$$

Thật vậy, với $u = e^{\lambda x}$, bằng cách đổi thứ tự lấy đạo hàm ta dễ dàng kiểm tra rằng

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m} L[u] = L\left[\frac{\partial^m u}{\partial\lambda^m}\right] \tag{1.7}$$

Từ biểu thức của u suy ra

$$L\left[\frac{\partial^m u}{\partial\lambda^m}\right] = L[x^m e^{\lambda x}] \tag{1.8}$$

Vì $L[u] = F(\lambda)e^{\lambda x}$ nên theo công thức Leibniz về đạo hàm cấp m của tích ta có

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m} L[u] = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} F^{(\nu)}(\lambda)\, x^{m-\nu} e^{\lambda x} \tag{1.9}$$

Từ (1.7), (1.8), (1.9) ta đi đến biểu thức

$$L[x^m e^{\lambda x}] = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} F^{(\nu)}(\lambda)\, x^{m-\nu} e^{\lambda x} \tag{1.10}$$

Đây chính là điều cần chứng minh. Bây giờ trở lại bài toán của ta. Vì λ_1 là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng $F(\lambda) = 0$ nên từ lí thuyết đại số tuyến tính ta có

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \ldots = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Trong công thức (1.10) lần lượt cho $m = 1, 2, \ldots, k-1$ ta suy ra rằng các hàm

$$xe^{\lambda_1 x},\ x^2 e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

là các nghiệm của phương trình (1.1). Theo ví dụ 3 ở §2 hệ các hàm này độc lập tuyến tính và do đó nó bổ sung vào k − 1 nghiệm độc lập tuyến tính thiếu ở trên.

Nếu $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ là nghiệm phức bội k thì $\lambda_j = \alpha - i\beta$ cũng là nghiệm phức bội k của phương trình đặc trưng (1.6). Áp dụng quá trình tiến hành ở phần 2 ta suy ra rằng, cặp nghiệm phức liên hợp bội k : $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ tương ứng với hệ 2k nghiệm thực độc lập tuyến tính của phương trình (1.1) :

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ví dụ 3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

hay

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

Suy ra nghiệm $\lambda = 1$ bội 3. Các hàm

$$e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$$

lập nên hệ nghiệm cơ bản và biểu thức

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$$

là nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 4. Xét phương trình

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

Trong trường hợp này phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

có một nghiệm đơn $\lambda_1 = 3$ và một nghiệm kép $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Chúng tương ứng với các nghiệm e^{3x}, e^{2x}, xe^{2x} của phương trình đang xét và nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}.$$

Ví dụ 5. Xét phương trình

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có một nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ và hai nghiệm phức liên hợp nhau : $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. Tương ứng với chúng, ta được hệ nghiệm cơ bản

$$e^{2x},\ xe^{2x},\ \cos x,\ \sin x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

Dễ kiểm tra rằng nó có cặp nghiệm phức liên hợp bội 2 là $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1 - i$. Do đó các hàm

$$e^x\cos x,\ xe^x\cos x,\ e^x\sin x,\ xe^x\sin x$$

lập thành hệ nghiệm cơ bản của phương trình vi phân đang xét. Nghiệm tổng quát là

$$y = e^x(C_1 + C_2x)\cos x + e^x(C_3 + C_4x)\sin x$$

Ví dụ 7. Xét phương trình

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$$

Phương trình đặc trưng tương ứng

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$$

có một nghiệm đơn $\lambda_1 = 1$ và một cặp nghiệm phức liên hợp bội 2 : $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$. Do đó hệ hàm

$$e^x,\ \sin 2x,\ x\sin 2x,\ \cos 2x,\ x\cos 2x$$

lập thành hệ nghiệm cơ bản của phương trình vi phân đang xét và nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\sin 2x + (C_4 + C_5x)\cos 2x.$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG

Trong tiết này ta xét phương trình

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x) \tag{2.1}$$

trong đó a_1, a_2, ..., a_n là các hằng số, f(x) liên tục trên khoảng (a, b). Nếu dùng kí hiệu toán tử

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

thì (2.1) được viết dưới dạng

$$L[y] = f(x) \tag{2.2}$$

Như ở §1 ta đã biết, phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$L[y] = 0$$

có thể giải được, nghĩa là ta có thể tìm được hệ nghiệm cơ bản của nó. Nhưng khi đó áp dụng phương pháp biến thiên hằng số (§3, chương 4) ta có thể tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ của phương trình không thuần nhất (2.1) và do đó có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (2.1). Tuy nhiên, khi áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng của phương trình (2.1) nhiều lúc ta đi đến những tính toán phức tạp. Trong trường hợp hàm f(x) có những dạng đặc biệt (khá thông dụng) ta có thể áp dụng phương pháp hệ số bất định dưới đây để tìm nghiệm riêng của phương trình (2.1) một cách đơn giản hơn.

● *Trường hợp 1*. Hàm f(x) có dạng một đa thức cấp m nhân với hàm mũ :

$$f(x) = (b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)\, e^{\alpha x}$$

trong đó b_o, b_1, ..., b_m, α là các hằng số. Ta kí hiệu

$$P_m(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

Khi đó phương trình (2.1) được viết dưới dạng

$$L[y] = P_m(x) e^{\alpha x} \tag{2.3}$$

Có hai trường hợp có thể xảy ra sau đây :

a) α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

tức là $F(\alpha) \neq 0$. Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (2.1) dưới dạng

$$y^*(x) = Q_m(x)e^{\alpha x} \tag{2.4}$$

trong đó $Q_m(x)$ là một đa thức cấp m với các hệ số ta cần xác định :

$$Q_m(x) = d_o x^m + d_1 x^{m-1} + \dots + d_m.$$

Để xác định các hệ số $d_o, d_1, \dots, d_m$ ta thay (2.4) vào (2.3) và sau khi giản ước thừa số $e^{\alpha x}$ ta đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai đa thức vế phải và vế trái. Thật vậy, trước hết ta chú ý rằng, theo công thức (1.10) ở §1 ta có

$$\left.\begin{aligned} L[e^{\alpha x}] &= F(\alpha)e^{\alpha x} \\ L[x^k e^{\alpha x}] &= \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu F^{(\nu)}(\alpha)\, x^{k-\nu} e^{\alpha x} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Thay biểu thức của $y^*(x)$ vào (2.3) và áp dụng (2.5) cũng như tính chất của toán tử L ta được

$$L[y^*] = d_o \sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu F^{(\nu)}(\alpha)x^{m-\nu}e^{\alpha x} + d_1 \sum_{\nu=0}^{m-1} C_{m-1}^\nu F^{(\nu)}(\alpha)x^{m-1-\nu}e^{\alpha x}$$

$$+ \dots + d_{m-1} \sum_{\nu=0}^{1} C_1^n F^{(\nu)}(\alpha)x^{1-\nu}e^{\alpha x} + d_m F(\alpha)e^{\alpha x} \equiv$$

$$\equiv (b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)e^{\alpha x}.$$

Giản ước với $e^{\alpha x}$ và đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai vế ta có

x^m : $d_o F(\alpha) = b_o$

x^{m-1} : $d_o C_m^1 F'(\alpha) + d_1 F(\alpha) = b_1$

. . . .

x : $d_o C_m^{m-1} F^{(m-1)}(\alpha) + d_1 C_{m-1}^{m-2} F^{(m-2)}(\alpha) + \dots + d_{m-1} F(\alpha) = b_{m-1}$

x^o : $d_o C_m^m F^{(m)}(\alpha) + d_1 C_{m-1}^{m-1} F^{(m-1)}(\alpha) + \dots + d_m F(\alpha) = b_m$

Vì $F(\alpha) \neq 0$ nên từ hệ phương trình trên ta giải được duy nhất các hệ số cần xác định $d_o, d_1, \ldots, d_m$.

b) α là nghiệm bội k ($k \geqslant 1$) của phương trình đặc trưng. Khi đó

$$F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(k-1)}(\alpha) = 0 \ ; \ F^{(k)}(\alpha) \neq 0 \quad (2.6)$$

Trong trường hợp này ta không thể tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng (2.4) vì $F(\alpha) = 0$ không cho phép ta xác định được các hệ số $d_o, d_1, \ldots, d_m$. Ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \qquad (2.7)$$

Để xác định các hệ số $d_o, d_1, \ldots, d_m$ của $Q_m(x)$ ta tiến hành như ở phần a) :

Thay biểu thức (2.7) vào (2.3) ta được

$$L[y^*] = L[x^k Q_m(x) e^{\alpha x}] = L[\sum_{s=0}^{m} d_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}]$$

$$= \sum_{s=0}^{m} d_s L[x^{k+m-s} e^{\alpha x}]$$

$$= \sum_{s=0}^{m} d_s \sum_{\nu=k}^{k+m-s} C^{\nu}_{k+m-s} F^{(\nu)}(\alpha)\, x^{k+m-s} e^{\alpha x}$$

$$= \sum_{s=0}^{m} b_s x^{m-s} e^{\alpha x} \qquad (2.8)$$

(ở đây do (2.6) nên ν chạy từ k).

Ta viết lại (2.8) dưới dạng

$$\sum_{s=0}^{m} d_s \sum_{\nu=0}^{m-s} C^{k+\nu}_{k+m-s} F^{(k+\nu)}(\alpha) x^{m-s-\nu} = \sum_{s=0}^{m} b_s x^{m-s} \qquad (2.9)$$

Đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai vế ta được hệ

$$x^m : d_o C^k_{k+m} F^{(k)}(\alpha) = b_o$$

$$x^{m-1} : d_o C_{k+m}^{k+1} F^{(k+1)}(\alpha) + d_1 C_{k+m-1}^{k} F^{(k)}(\alpha) = b_1$$

. . . .

$$x : d_o C_{k+m}^{k+m-1} F^{(k+m-1)}(\alpha) + d_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} F^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots +$$

$$+ d_{m-1} C_{k+1}^{k} F^{(k)}(\alpha) = b_{m-1}$$

$$x^o : d_o C_{k+m}^{k+m} F^{(k+m)}(\alpha) + d_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} F^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots +$$

$$+ d_{m-1} C_{k+1}^{k+1} F^{(k+1)}(\alpha) + d_m C_k^k F^{(k)}(\alpha) = b_m.$$

Vì $F^{(k)}(\alpha) \neq 0$ nên từ hệ trên ta xác định được duy nhất các hệ số cần tìm $d_o, d_1, \ldots, d_m$.

Hệ quả. Nếu f(x) là một đa thức cấp m :

$$f(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

thì ta đi đến quy tắc tìm nghiệm riêng như sau :

a) Nếu mọi nghiệm của phương trình đặc trưng khác 0 thì ta cần tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = d_o x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_m$$

b) Nếu phương trình đặc trưng có một nghiệm bằng 0 bội k thì ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = x^k(d_o x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_m).$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

có hai nghiệm thực khác 0 là $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Do vậy ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Thay biểu thức này vào phương trình ta đi đến hệ thức sau :

$$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A \equiv 6x^2 - 10x + 2$$

Đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta được

$$6A = 6 \ ; \ 6B - 10A = -10 \ ; \ 6C - 5B + 2A = 2$$

Giải ra ta được $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ và do đó

$$y^*(x) = x^2.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

có nghiệm $\qquad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5.$

Ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$$

Thay $y^*(x)$ vào phương trình đang xét và hằng đẳng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta tìm được $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = 0$. Do đó $y^*(x) = \frac{1}{3}x^3$ và nghiệm tổng quát của phương trình đang xét có dạng

$$y^*(x) = C_1 + C_2e^{5x} + \frac{1}{3}x^3$$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - y = (2x + 1)e^{2x}.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$

Vì $2 \neq \lambda_i$ (i = 1, 2) nên ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = (Ax + B)e^{2x}$$

Thao vào phương trình ta có

$$4Axe^{2x} + (4A + 4B)e^{2x} - (Ax + B)e^{2x} \equiv (2x + 1)e^{2x}$$

hay

$$3Ax + 4A + 3B \equiv 2x + 1$$

Do đó

$$A = \frac{2}{3}, \ B = -\frac{5}{9}$$

và $$y^*(x) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{9}\right)e^{2x}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{9}\right)e^{2x}$$

Ví dụ 4. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có nghiệm bội 2 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Ta tìm nghiệm riêng $y^*(x) = x^2Ae^{2x} = Ax^2e^{2x}$. Thay biểu thức của $y^*(x)$ vào phương trình vi phân tìm được hệ số $A = 1$ và do đó $y^*(x) = x^2e^x$. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + x^2e^{2x}$$

- *Trường hợp 2.* Hàm f(x) có dạng

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$$

trong đó $P_m^{(1)}(x)$, $P_m^{(2)}(x)$ là các đa thức của x bậc không quá m và ít nhất một trong hai đa thức trên có bậc bằng m. Có thể một trong hai là hằng số, thậm chí đồng nhất bằng 0.

Áp dụng phép biến đổi Ơle

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

ta viết lại f(x) dưới dạng sau :

$$f(x) = P_m^{(1)}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P_m^{(2)}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} =$$

$$= \widetilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha + i\beta)x} + \widetilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha - i\beta)x}$$

trong đó $\widetilde{P}_m^{(1)}(x)$, $\widetilde{P}_m^{(2)}(x)$ là các đa thức bậc m tức f(x) là tổng của hai hàm dạng đã xét ở trường hợp 1. Áp dụng nguyên lí chồng chất nghiệm và kết quả ở trường hợp 1 ta suy ra :

a) Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng $y^*(x)$ được tìm dưới dạng

$$y^*(x) = \widetilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha + i\beta)x} + \widetilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha - i\beta)x} \qquad (2.10)$$

trong đó $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ là các đa thức cấp m với các hệ số bất định.

b) Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k $(k \geqslant 1)$ của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng $y^*(x)$ được tìm dưới dạng

$$y^*(x) = x^k[Q_m^{(1)}(x)e^{(\alpha + i\beta)x} + Q_m^{(2)}(x)e^{(\alpha - i\beta)x}] \qquad (2.11)$$

Từ (2.10), (2.11) trở lại dạng thực ta đi đến quy tắc tìm nghiệm riêng của phương trình (2.1) trong trường hợp này như sau :

– Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng :

$$y^*(x) = [Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x} \qquad (2.12)$$

trong đó $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ là các đa thức cấp m với các hệ số ta cần xác định.

– Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng ($k \geqslant 1$) thì ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = x^k[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x} \qquad (2.13)$$

Để xác định các hệ số của $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ ta thay $y^*(x)$ vào phương trình (2.1) như đã tiến hành ở trường hợp 1. Ta cần chú ý rằng ngay cả khi một trong hai đa thức $P_m^{(1)}(x)$ hoặc $P_m^{(2)}(x)$ đồng nhất bằng 0 thì vẫn phải tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng (2.12) hoặc (2.13).

Ví dụ 5. Xét phương trình

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Trong trường hợp đang xét $\alpha + i\beta =$ $= 1 + i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng. Do đó ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = e^x(A\cos x + B\sin x),$$

$$y^{*'}(x) = e^x(A + B)\cos x + (B - A)\sin x,$$

$$y^{*''}(x) = e^x(2B\cos x - 2A\sin x).$$

Thế vào phương trình vi phân đang xét, giản ước thừa số e^x và hằng đẳng hệ số của cosx, sinx ta được hệ sau :

$$-A + 3B = 1, \; -B - 3A = -7.$$

Giải hệ này ta tìm được $A = 2$, $B = 1$ và do đó

$$y^*(x) = e^x(2\cos x + \sin x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đang xét có dạng :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$$

Ví dụ 6. Xét phương trình

$$y'' + y' + y = -13\sin 2x$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Trong trường hợp đang xét $\alpha + i\beta = 2i$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vì vậy ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

Thay $y^*(x)$ vào phương trình đang xét ta tìm được $A = 2$, $B = 3$ và do đó

$$y^*(x) = 2\cos 2x + 3\sin 2x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos 2x + 3\sin 2x.$$

Ví dụ 7. Xét phương trình

$$y'' + y = 2\sin x$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Trong trường hợp đang xét $\alpha + i\beta = i = \lambda_1$. Do vậy ta tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ dưới dạng

$$y^*(x) = x(A\cos x + B\sin x)$$

Thay $y^*(x)$ vào phương trình đang xét ta tìm được $A = -1$, $B = 0$ và do đó $y^*(x) = -x\cos x$. Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP n ĐƯA ĐƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

1. Đưa phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng phép thế biến số độc lập

Ở §1 ta đã thấy rằng phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng có thể giải được, nghĩa là có thể tìm được nghiệm tổng quát của nó. Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số biến thiên, thậm chí đối với phương trình cấp 2 không tồn tại cách giải tổng quát. Tuy vậy trong một số trường hợp ta có thể đưa phương trình với hệ số biến thiên về phương trình với hệ số hằng nhờ phép thế biến độc lập và do đó có thể tìm được nghiệm tổng quát của chúng. Giả sử ta xét phương trình

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (3.1)$$

Thực hiện phép thế biến độc lập

$$t = \psi(x) \qquad (3.2)$$

với ψ là hàm khả vi một số lần cần thiết. Ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\psi'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\psi'(x)\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}[\psi'(x)]^2 + \frac{dy}{dt}\,\psi''(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny}{dt^n}[\psi'(x)]^n + \ldots + \frac{dy}{dt}\,\psi^{(n)}(x).$$

Thay các biểu thức này vào phương trình (3.1) ta được

$$\frac{d^ny}{dt^n}[\psi'(x)]^n + \ldots + p_n(x)y = 0.$$

Chia hai vế cho $[\psi'(x)]^n$ suy ra

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + \frac{p_n(x)}{[\psi'(x)]^n} = 0 \qquad (3.3)$$

Giả sử đã chọn được $\psi(x)$ sao cho (3.3) là phương trình với hệ số hằng. Khi đó bắt buộc $\dfrac{p_n(x)}{[\psi'(x)]^n}$ là hằng số. Ta đặt

$$\frac{p_n(x)}{[\psi'(x)]^n} = \frac{1}{C^n} \quad (C = \text{const})$$

Khi đó

$$\psi'(x) = C\sqrt[n]{p_n(x)}$$

và do đó

$$\psi(x) = C\int \sqrt[n]{p_n(x)}\,dx$$

Như vậy ta đi đến kết luận : Nếu phương trình (3.1) có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng nhờ phép thế biến độc lập (3.2) thì phép thế đó phải theo công thức

$$t = C\int \sqrt[n]{p_n(x)}\,dx \qquad (3.4)$$

Dĩ nhiên, không phải lúc nào phép thế (3.4) cũng đưa được phương trình (3.1) về phương trình với hệ số hằng. Dưới đây sẽ chỉ ra hai lớp phượng trình mà đối với chúng phép thế (3.4) đưa được chúng về phương trình với hệ số hằng.

2. Phương trình tuyến tính Ơle. Phương trình tuyến tính Ơle có dạng

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \qquad (3.5)$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các hằng số. Điểm $x = 0$ là điểm kì dị của phương trình. Nghiệm phương trình (3.5) tồn tại và duy nhất trên khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$. Giả sử ta xét phương trình trên khoảng $(0, \infty)$. Chia hai vế phương trình cho x^n ta được

$$y^{(n)} + \dots + \frac{a_n}{x^n} y = 0$$

Như vậy, ở đây $p_n(x) = \frac{a_n}{x^n}$. Theo công thức (3.4) ta áp dụng phép thế

$$t = C \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}}\, dx$$

Lấy $c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ và cho hằng số tích phân bằng 0 ta được

$$t = \ln x \text{ hay } x = e^t \tag{3.6}$$

Khi đó dễ kiểm tra được rằng

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}, \\
&\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}, \\
&\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) e^{-3t}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{d^ny}{dx^n} = \left[\frac{d^ny}{dt^n} + \dots + (-1)^{n-1}(n-1)\frac{dy}{dt}\right] e^{-nt}
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Thay (3.6), (3.7) vào phương trình (3.5) sau khi giản ước đi đến phương trình tuyến tính với hệ số hằng dạng

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + b_n y = 0 \tag{3.8}$$

trong đó $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các hằng số.

Tìm nghiệm tổng quát của (3.8) rồi thay $t = \ln x$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình Ơle (3.5).

Chú ý. Nếu ta xét phương trình (3.5) trên khoảng $(-\infty, 0)$ thì phép thế biến (3.6) được thay bởi phép thế

$$x = -e^t$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{3.9}$$

trên khoảng $(0, \infty)$.

Đặt $x = e^t$ ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t} \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}$$

Thay vào phương trình ta có

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} - 2e^t \cdot \frac{dy}{dt} e^{-t} + 2y = 0$$

hay

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{3.10}$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) có dạng

$$y = C_1e^t + C_2e^{2t}$$

Thay $t = \ln x$ ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (3.9) là

$$y = C_1x + C_2x^2$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Phép thế $x = e^t$ đưa phương trình về dạng

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0 \tag{3.11}$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Do đó phương trình (3.11) có nghiệm tổng quát

$$y = C_1e^t + C_2te^t = (C_1 + C_2t)e^t.$$

Thay t = lnx suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đang xét có dạng

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x$$

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$$

Phép thế biến $x = e^t$ đưa phương trình đang xét về dạng

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0 \qquad (3.12)$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

có cặp nghiệm phức liên hợp

$$\lambda_1 = 2 + i,\ \lambda_2 = 2 - i$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.12) là

$$y = C_1e^{2t}\cos t + C_2e^{2t}\sin t = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t}$$

Trở lại biến x ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét :

$$y = (C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x)x^2.$$

Nhận xét 1. Vì phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng mà phương trình Ơle được dẫn tới có các nghiệm riêng dạng $e^{\lambda t}$, $t^m.e^{\lambda t}$ nên trở lại biến x ta suy ra phương trình Ơle có các nghiệm riêng dạng x^λ, $(\ln x)^m x^\lambda$. Từ đây suy ra phương pháp trực tiếp giải phương trình Ơle như sau : Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$y = x^{\lambda}$$

Khi đó

$$y^{(k)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots [\lambda - (k - 1)]x^{\lambda - k} \ (k = 1, 2, \dots, n)$$

Thay vào phương trình Ơle (3.5) ta được

$$P(\lambda)x^{\lambda} = 0 \tag{3.13}$$

trong đó

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Từ (3.13) ta suy ra rằng hàm $y = x^{\lambda}$ là nghiệm của phương trình (3.5) khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình

$$P(\lambda) = 0$$

hay

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.14}$$

(3.14) được gọi là phương trình đặc trưng ứng với phương trình tuyến tính Ơle. Giả sử mọi nghiệm của phương trình đặc trưng là thực và khác nhau : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Khi đó phương trình Ơle có các nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = x^{\lambda_1}$, $y_2 = x^{\lambda_2}, \dots, y_n = x^{\lambda_n}$ và do đó nghiệm tổng quát có dạng

$$y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \dots + C_nx^{\lambda_n}$$

Nếu mọi nghiệm của phương trình đặc trưng (3.14) khác nhau nhưng giữa chúng có nghiệm phức a + ib thì a − ib cũng là nghiệm của (3.14). Áp dụng công thức

$$x^{a+ib} = x^a[\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x)]$$

ta suy ra cặp nghiệm phức liên hợp a ± ib ứng với hai nghiệm thực

$$x^a\cos(b\ln x), \ x^a\sin(b\ln x).$$

Giả sử phương trình đặc trưng (3.14) có nghiệm bội, chẳng hạn nghiệm λ_1 bội k. Khi đó

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = ... = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0 \ ; \ P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Lí luận tương tự như ở phần 3, §1 ta đi đến kết luận : nghiệm λ_1 bội k cho ta k nghiệm độc lập tuyến tính là

$$x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_1}\ln x,\ x^{\lambda_1}(\ln x)^2,\ ...,\ x^{\lambda_1}(\ln x)^{k-1}$$

Nếu λ_1 là thực thì k nghiệm này là thực ; nếu $\lambda_1 = a + ib$ thì $\lambda_2 = a - ib$ cũng là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng (3.14). Cặp nghiệm phức liên hợp hội k này ứng với 2k nghiệm thực của phương trình Ơle :

$$x^a(\ln x)^m\cos(b\ln x),\ x^a(\ln x)^m\sin(b\ln x)$$

$$m = 0, 1, 2, ..., k - 1$$

Ví dụ 4. Xét phương trình

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

Đặt $y = x^\lambda$ ta có $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}$. Thay vào phương trình ta được

$$x^2\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + 3x\lambda x^{\lambda-1} + x^\lambda = 0$$

Chia hai vế cho x^λ :

$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 1 = 0$$

hay

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Do đó $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ và nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}\ln x = \frac{1}{x}(C_1 + C_2\ln x).$$

Nhận xét 2. Đối với phương trình

$$(ax + b)^n y^{(n)} + (ax + b)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = 0$$

trong đó a, b, a_1, ..., a_n là các hằng số ta cũng đưa được về phương trình tuyến tính với hệ số hằng bằng phép thế tương tự như (3.6) :

$$ax + b = e^t$$

Ví dụ 5. Xét phương trình

$$(1 + x)^2 y'' + (1 + x)y' + y = 4\cos\ln(1 + x).$$

Đặt $1 + x = e^t$ (ta xét trong miền $-1 < x < \infty$)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}$$

Thay vào phương trình suy ra

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t} + e^t \frac{dy}{dt} e^{-t} + y = 4\cos\ln e^t$$

hay

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 4\cos t$$

Dễ dàng tính được nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + 2t\sin t$$

Trở lại biến x ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = C_1\cos(\ln(1 + x)) + (C_2 + 2\ln(1 + x))\sin(\ln(1 + x))$$

3. Phương trình Trêbusep. Phương trình này có dạng

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{3.15}$$

Các điểm $x = 1$, $x = -1$ là các điểm kì dị của phương trình. Trên các khoảng $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ nghiệm của phương trình (3.15) tồn tại duy nhất.

Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3.15) trên khoảng $(-1, 1)$.

Công thức (3.4) cho ta

$$t = C\int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\,dx$$

Chọn $C = -\dfrac{1}{n}$ và hằng số tích phân bằng 0 ta được

$$t = \arccos x \text{ hay } x = \cos t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

$$y'' = \left[\frac{1}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$= -\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin t} - \frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

Thay vào phương trình (3.15) sau khi rút gọn ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1\cos nt + C_2\sin nt$$

và do đó nghiệm tổng quát của phương trình Trêbusep trên khoảng $(-1, 1)$ có dạng

$$y = C_1\cos(n\arccos x) + C_2\sin(n\arccos x)$$

Đặc biệt với n = 1 ta được

$$y = C_1x + C_2\sqrt{1 - x^2}$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CẤP HAI

Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu một số tính chất nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.1}$$

Trường hợp p(x), q(x) là những hằng số như ở §1 đã thấy, ta luôn tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (4.1) và do đó dễ dàng biết được các tính chất nghiệm của phương trình. Trường hợp p(x), q(x) không phải là hằng số, thậm chí đối với phương trình dạng đơn giản hơn

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{4.2}$$

nói chung, không thể tìm được biểu thức của nghiệm tổng quát. Tuy vậy, như sau đây sẽ thấy, dựa vào các tính chất của hàm p(x), q(x) ta có thể biết được một số tính chất của nghiệm phương trình (4.1).

1. Đưa phương trình về dạng không chứa đạo hàm cấp 1

Giả thiết các hàm p(x), q(x) liên tục trên khoảng (a, b), ta chứng minh rằng tồn tại phép biến đổi

$$y = \alpha(x)z \tag{4.3}$$

với z là hàm số mới phải tìm đưa phương trình (4.1) về dạng (4.2). Thật vậy, thay (4.3) vào (4.1) ta được

$$\alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z'' + p(x)[\alpha'(x)z + \alpha(x)z'] + q(x)\alpha(x)z = 0$$

hay

$$z'' = \left[\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x)\right]z' + \left[\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} + p(x)\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} + q(x)\right]z = 0 \quad (4.4)$$

Ta chọn $\alpha(x)$ sao cho

$$\frac{2\alpha'(x)}{\alpha(x)} + p(x) = 0$$

Từ đây suy ra

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx} \quad (4.5)$$

Khi đó

$$\alpha'(x) = \frac{-p(x)}{2}\, e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx};$$

$$\alpha''(x) = \left[\frac{-p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right]e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}$$

Do đó phương trình (4.4) có dạng

$$z'' + \left[-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p^2(x)}{2} + q(x)\right]z = 0$$

hay

$$z'' + I(x)z = 0 \quad (4.6)$$

trong đó

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x) \quad (4.7)$$

Hàm I(x) được gọi là cái bất biến của phương trình (4.1) (vì mọi phép thế dạng (4.3) đưa phương trình (4.1) về dạng (4.6) cùng chung I(x)).

Phương trình (4.6) sẽ tích phân được nếu I(x) là hằng số hoặc có dạng $I(x) = \dfrac{c}{(x-a)^2}$ với a, c là hằng số.

Ví dụ 1. Xét phương trình Becxel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (4.8)$$

hay $$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

Ở đây $$p(x) = \frac{1}{x}, \; q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$$

Do đó

$$I(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}.$$

Từ đây ta suy ra, nếu $n = \pm \frac{1}{2}$ thì phép thế

$$y = e^{-\int \frac{1}{2x}dx} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

sẽ đưa phương trình Becxel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0 \qquad (4.9)$$

về phương trình với hệ số hằng

$$z'' + z = 0$$

Phương trình này có các nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$. Do đó phương trình Becxel (4.9) có các nghiệm riêng độc lập tuyến tính $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Nhân các hàm này với $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ta được các hàm được gọi là các hàm Becxel sau :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \; ; \; J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Các nghiệm này độc lập tuyến tính nên phương trình Becxel dạng(4.9) có nghiệm tổng quát

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

Ở đây $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = 1$. Do đó

$$I(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{4x^2} + 1 = 1$$

Vậy phép thế

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} z = \frac{1}{x} z$$

đưa phương trình đang xét về dạng

$$z'' + z = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$z = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Từ đây suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đang xét :

$$y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}.$$

Định lí 1. *Để các phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2*

$$y''_1 + p_1(x)\, y'_1 + q_2(x)\, y_1 = 0 \qquad (4.10)$$

$$y''_2 + p_2(x)y'_2 + q_2(x)y_2 = 0 \qquad (4.11)$$

có thể đưa về lẫn nhau qua phép thế (4.3) thì cần và đủ là chúng có cùng chung các bất biến I(x).

Chứng minh. Giả sử $I_1(x)$ và $I_2(x)$ là cái bất biến của (4.10) và (4.11) tương ứng. Giả sử phép thế $y_1 = \beta(x)y_2$ đưa (4.10) về (4.11) ; phép thế $y_2 = \alpha(x)z$ đưa (4.11) về dạng

$$z'' + I_2(x)z = 0 \qquad (4.13)$$

Khi đó phép thế $y_1 = \beta(x)\alpha_2(x)z$ đưa (4.10) về (4.3) và do tính bất biến của $I_1(x)$ đối với các phép biến đổi dạng (4.3) ta phải có

$$I_1(x) \equiv I_2(x)$$

Ngược lại nếu $I_1(x) \equiv I_2(x) = I(x)$ thì các phép thế $y_1 = \alpha_1(x)z$, $y_2 = \alpha_2(x)z$ đưa (4.10) , (4.11) tương ứng về cùng một phương trình

$$z'' + I(x)z = 0 \qquad (4.12)$$

Vì phép thế $z = \dfrac{1}{\alpha_2(x)} y_2$ đưa (4.12) về (4.11) nên phép thế $y_1 = \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} y_2$ đưa (4.10) về (4.11). Vậy ta chỉ cần chọn $\beta(x) = \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$.

2. Đưa phương trình về dạng liên hợp

Định nghĩa. Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 mà hệ số của y' bằng đạo hàm của hệ số y'' được gọi là phương trình tự liên hợp.

Như vậy phương trình tự liên hợp cấp 2 có dạng

$$P(x)y'' + P'(x)y' + q(x)y = 0$$

hay

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + q(x)y = 0 \qquad (4.12)$$

Ta chứng minh rằng, phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2

$$p_o(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (4.13)$$

với các hệ số liên tục trên khoảng (a, b) và $p_o(x) \neq 0$ có thể đưa được về dạng tự liên hợp.

Thật vậy, nhân hai vế của (4.13) với hàm $\mu = \mu(x)$ ta được

$$p_o(x)\mu(x)y'' + p_1(x)\mu(x)y' + p_2(x)\mu(x)y = 0$$

Ta chọn μ (x) sao cho

$$[p_o(x)\mu(x)]' = p_1(x)\mu(x)$$

hay

$$p_o(x)\,\mu' + [p'_o(x) - p_1(x)]\,\mu = 0$$

Tích phân phương trình này tìm được

$$\mu(x) = \frac{1}{p_o(x)}\, e^{\int \frac{p_1(x)}{p_o(x)} dx}$$

Ví dụ 1 .. Xét phương trình Lerander

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

Điểm $x = \pm 1$ là điểm kì dị của phương trình. Với $\neq \pm 1$, phương trình Lerander là phương trình tự liên hợp vì

$$(1 - x^2)' = -2x$$

Do đó phương trình có thể viết lại được dưới dạng :

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)y'] + n(n + 1)y = 0$$

Ví dụ 2. Xét phương trình Becxel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

trên khoảng $(0, +\infty)$. Đây không phải là phương trình tự liên hợp. Ta đưa nó về phương trình tự liên hợp bằng cách nhân hai vế với hàm

$$\mu(x) = \frac{1}{p_o(x)}\, e^{\int \frac{p_1(x)}{p_o(x)} dx} = \frac{1}{x^2}\, e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = \frac{1}{x}$$

Do đó phương trình Becxel dạng tự liên hợp là

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

hay $$\frac{d}{dx}\left(xy'\right) + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

3. Sự liên hệ giữa phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 và phương trình vi phân cấp một Ricati

Xét phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (4.14)$$

Hàm y (x) ≡ 0 là nghiệm tầm thường của phương trình. Giả sử $y \neq 0$. Áp dụng phép thế $y' = yz$ với z là hàm số mới phải tìm ta có

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$$

Thay vào phương trình (4. 14) suy ra

$$y\left[z^2 + z' + p(x)z + q(x)\right] = 0$$

hay

$$z' = -z^2 - p(x)z - q(x) \qquad (4.15)$$

Đây là phương trình Ricati

Đặc biệt nếu p (x) = 0 tức (4.14) có dạng

$$y'' + q(x)y = 0$$

thì phép thế $y' = yz$ đưa phương trình này về phương trình Ricati dạng $z' = -z^2 - q(x)$

Ngược lại phương trình Ricati

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (4.16)$$

có thể đưa được về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2.

Thật vậy, theo §11, chương I, phép thế $y = \frac{1}{P(x)}z$ đưa phương trình (4.16) về phương trình (4.15). Khi đó phép thế

$$z = \frac{y'}{y}$$

sẽ đưa (4.15) về phương trình (4.14) .

Vì phương trình Ricati chỉ tích phân được trong một số trường hợp đặc biệt nên phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 cũng chỉ tích phân được trong một số trường hợp đặc biệt.

§5. SỰ DAO ĐỘNG CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT CẤP HAI

1. Nghiệm dao động và không dao động. Trong tích này ta sẽ quan tâm đến không điểm của nghiệm không tầm thường của phương trình

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = 0 \tag{5.1}$$

trong đó p(x), q(x) liên tục trên khoảng (a, b). Giả sử y (x) là nghiệm không tầm thường của (5.1). Điểm $x_o \in (a, b)$ được gọi là không điểm của nghiệm y(x) nếu $y(x_o) = 0$.

Định lí 1. *Không điểm của nghiệm không tầm thường y(x) của phương trình (5.1) là điểm cô lập, nghĩa là nếu x_o là không điểm của y(x) trên (a, b) thì tồn tại lân cận điểm x_o sao cho tại lân cận đó thì y (x) không có không điểm nào khác x_o.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại không điểm x_o không là cô lập. Khi đó tồn tại dãy các không điểm $\{x_n\}$ của nghiệm y (x) sao cho $x_n \to x_o$ khi $n \to \infty$. Vì $y(x_n) = y(x_{n+1}) = 0$ nên theo định lí Lagrange, tồn tại điểm τ_n nằm giữa x_n và x_{n+1} sao cho $y'(\tau_n) = 0$. Do $x_n \to x_o$ nên $\tau_n \to x_o$ khi $n \to \infty$. Từ sự liên tục của hàm y' (x) ta suy ra

$$0 = \lim_{n\to\infty} y'(\tau_n) = y'(x_o)$$

Như vậy nghiệm y (x) thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = 0$, $y'(x_o) = 0$. Theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình (5.1) ta suy ra $y(x) \equiv 0$ trên (a, b). Điều này trái với giả thiết y (x) là nghiệm không tầm thường.

Hệ quả . Nghiệm không tầm thường của phương trình (5.1) trên đoạn hữu hạn $[\alpha , \beta] \subset (a, b)$ chỉ có một số hữu hạn các không điểm.

Định nghĩa. Nghiệm của phương trình (5.1) được gọi là dao động trên khoảng (a, b) nếu nó có ít nhất hai không điểm trên đó. Trong trường hợp ngược lại, nghiệm được gọi là không dao động trên (a, b).

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y'' - \lambda^2 y = 0$$

Nếu $\lambda \neq 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

Nếu $\lambda = 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 x + C_2$$

Do đó trên mỗi khoảng (a, b) bất kì nghiệm không tầm thường của phương trình đang xét có không quá một không điểm và vì thế không dao động trên (a, b).

Ví dụ 2 . Xét phương trình

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x = A\sin(\lambda x + \varphi)$$

Trên mỗi khoảng (a, b) có độ dài lớn hơn $\frac{2\pi}{\lambda}$, nghiệm của phương trình đang xét có ít nhất hai không điểm và do đó dao động trên mỗi khoảng như vậy.

Ở §4 ta đã biết rằng phép thế

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z \tag{5.2}$$

đưa phương trình (5.1) về dạng đơn giản hơn

$$z'' + I(x)z = 0$$

Vì phép thế (5.2) không làm thay đổi số không điểm của mỗi nghiệm phương trình (5.1), tức là không làm thay đổi tính dao động nghiệm nên ta có thể chỉ xét tính dao động nghiệm đối với phương trình dạng đơn giản hơn :

$$y'' + Q(x)y = 0 \qquad (5.3)$$

Định lí 2. *Giả sử hàm Q(x) liên tục trên khoảng* (a, b) *và thỏa mãn điều kiện*

$$Q(x) \leqslant 0 \text{ với } x \in (a, b) \qquad (5.4)$$

Khi đó nghiệm không tầm thường của phương trình (5.3) không dao động trên khoảng (a, b).

Chứng minh. Giả sử ngược lại tồn tại nghiệm không tầm thường $y_1(x)$ của phương trình (5.3) dao động trên (a,b) và giả sử $x_1 < x_2$ là hai không điểm liên tiếp của $y_1(x)$ trên (a, b). Không làm mất tổng quát ta có thể giả thiết $y_1(x) > 0$ trên khoảng (x_1, x_2).

Khi đó

$y''_1(x) = -Q(x)y_1(x) \geqslant 0$ trên (x_1, x_2) và do đó $y'_1(x)$ không giảm trên (x_1, x_2).

$$\text{Ta có } y'_1(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{y_1(x) - y_1(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{y_1(x)}{x - x_1} \geqslant 0$$

và vì $y'_1(x) \neq 0$ do $y_1(x)$ không phải là nghiệm tầm thường nên $y'_1(x_1) > 0$.

Từ đây suy ra $y'_1(x) > 0$ với mọi x thuộc khoảng (x_1, x_2). Mặt khác theo định lí Rolle tồn tại điểm $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ sao cho $y'_1(\overline{x}) = 0$. Điều này mâu thuẫn với nhận xét $y'_1(x) > 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$.

2. Định lí Stuôcm. Ta biết rằng phương trình $y'' + y = 0$ có hai nghiệm độc lập tuyến tính là $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$.

Giữa hai không điểm bất kì liên tiếp của nghiệm y_1 (x) có đúng một không điểm của nghiệm y_2 (x) và ngược lại. Ta sẽ thấy hiện tượng này vẫn đúng với phương trình tuyến tính thuần nhất tổng quát

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = 0 \qquad (5.4)$$

với p(x), q(x) liên tục trên (a, b).

Định lí 3 (còn gọi là định lí Stuôcm). *Giả sử* y_1 (x), y_2 (x) *là hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kì của phương trình (5.4). Giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm* $y_1(x)$ *có đúng một không điểm của nghiệm* $y_2(x)$ *và ngược lại.*

Chứng minh. Giả sử $x_1 < x_2$ là hai không điểm liên tiếp bất kì của nghiệm y_1 (x).

Không làm mất tổng quát ta có thể giả thiết $y_1(x) > 0$ với mọi x thuộc (x_1 , x_2).

Ta cần chứng minh y_2 (x) có đúng một không điểm nằm giữa x_1, x_2. Giả sử ngược lại y_2 (x) $\neq 0$ trên (x_1, x_2).

Không làm mất tổng quát ta giả thiết $y_2(x) > 0$ trên (x_1, x_2). Vì $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính nên định thức Vronski của chúng

$$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x) \neq 0$$

trên (a, b) và do đó trên $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

Từ đây ta suy ra $y_2(x_1) \neq 0$, $y_2(x_2) \neq 0$ và do đó $y_2(x_1) > 0$, $y_2(x_2) > 0$ tức $y_2(x) > 0$ trên đoạn $[x_1, x_2]$. Do $W(x) \neq 0$ nên ta cũng có thể giả thiết $W(x) > 0$ trên $[x_1, x_2]$.

Tích phân đồng nhất thức

$$-\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' = \frac{W(x)}{y_2^2(x)}$$

từ x_1 đến x_2 ta có

$$-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{W(x)}{y_2^2(x)}dx$$

hay

$$-\frac{y_1(x_2)}{y_2(x_2)} + \frac{y_1(x_1)}{y_2(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{W(x)}{y_2^2(x)}\, dx$$

Vế trái của đẳng thức này bằng 0 trong khi vế phải là tích phân của hàm liên tục dương nên lớn hơn 0. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng có ít nhất một điểm $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ sao cho $y_2(\bar{x}) = 0$. Điểm $\bar{x}$ này là duy nhất vì nếu giả thiết ngược lại tồn tại $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$ thuộc (x_1, x_2) mà $y_2(\bar{\bar{x}}) = 0$ thì đổi vai trò $y_1(x)$, $y_2(x)$ cho nhau ta suy ra $y_1(x)$ có ít nhất một không điểm nằm giữa $\bar{x}$ và $\bar{\bar{x}}$. Điều này vô lí vì x_1, x_2 là hai không điểm liên tiếp của $y_1(x)$. Định lí đã được chứng minh.

Hệ quả. Nếu một nghiệm không tầm thường của phương trình (5.4) có ít nhất ba không điểm trên (a, b) thì mọi nghiệm của phương trình đó đều dao động trên (a, b)

3. Định lí so sánh. Đinh lí Stuôcm cho ta so sánh tính dao động các nghiệm độc lập tuyến tính của cùng một phương trình. Sự so sánh tính dao động của các nghiệm hai phương trình khác nhau sẽ được xét dưới đây. Trước hết ta xét hai phương trình sau đây :

$$y'' + y = 0 \; ; \quad z'' + 4z = 0$$

Phương trình thứ nhất có nghiệm $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$; phương trình thứ hai có các nghiệm $z_1 = \cos 2x$, $z_2 = \sin 2x$. Dễ thấy rằng giữa hai không điểm bất kì của mỗi nghiệm phương trình thứ nhất có ít nhất một không điểm của mỗi nghiệm phương trình thứ hai. Nhận xét tương tự cũng đúng đối với các phương trình

$$y'' + a_1 y = 0 \; ; \quad z'' + a_2 z = 0$$

trong đó $a_2 > a_1$ là các hằng số.

Bây giờ ta mở rộng kết quả này cho trường hợp a_1, a_2 là các hàm số. Xét các phương trình

$$y'' + Q_1(x)y = 0 \ ; \ z'' + Q_2(x)z = 0 \qquad (5.5)$$

trong đó $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ liên tục trên (a, b).

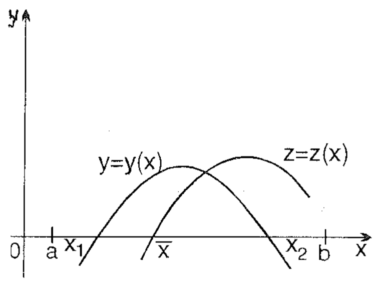
Định lí 4 (Định lí so sánh). *Giả sử trên khoảng (a, b)* $Q_1(x)$, $Q(x_2)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$Q_2(x) \geqslant Q_1(x)$$

Khi đó giữa hai không điểm liên tiếp bất kì của nghiệm không tầm thường phương trình thứ nhất có ít nhất một không điểm của nghiệm không tầm thường phương trình thứ hai nếu trong khoảng nằm giữa hai không điểm này có điểm x mà tại đó $Q_2(x) > Q_1(x)$.

Chứng minh. Giả sử y (x) là nghiệm không tầm thường bất kì của phương trình thứ nhất và $x_1, x_2 \in (a, b)$ là hai không điểm liên tiếp của nó ; z (x) là nghiệm không tầm thường bất kì của phương trình thứ hai. Ta cần chứng minh rằng tồn tại $\overline{x}$ nằm giữa x_1, x_2 sao có $z(\overline{x}) = 0$.

Giả sử ngược lại $z(x) \neq 0$ trên (x_1, x_2) chẳng hạn $z(x) > 0$ trên khoảng đó. Không làm mất tổng quát, ta có thể giả thiết $y(x) > 0$ trên (x_1, x_2). Theo giả thiết ta có



Hình 15

$$y''(x) + Q_1(x)y(x) \equiv 0 \qquad (5.6)$$

$$z''(x) + Q_2(x)z(x) \equiv 0 \qquad (5.7)$$

Nhân hai vế của (5.6) cho z (x) và hai vế của (5.7) cho y (x) rồi trừ cho nhau ta được

$$y''z(x) - z''(x)y(x) = [Q_2(x) - Q_1(x)]y(x)z(x)$$

hay

$$\frac{d}{dx}\Big[y'(x)z(x) - z'(x)y(x)\Big] = \Big[Q_2(x) - Q_1(x)\Big]y(x)z(x)$$

Tích phân hai vế từ x_1 đến x_2 và chú ý rằng $y(x_1) = y(x_2) = 0$ ta được

$$y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}\Big[Q_2(x) - Q_1(x)\Big]y(x)z(x)dx \qquad (5.8)$$

Vì $y(x) > 0$ trên (x_1, x_2) nên lí luận tương tự như trong chứng minh định lí 3 ta có

$$y'(x_2) < 0, \; y'(x_1) > 0$$

Vì $z(x) > 0$ trên (x_1, x_2) nên $z(x_1) \geqslant 0$, $z(x_2) \geqslant 0$. Nhưng khi đó vế trái của Đẳng thức (5.8) là số không dương trong khi vế phải là số dương. Điều này vô lí. Định lí đã được chứng minh.

Nếu so sánh tính dao động của nghiệm các phương trình (5.5) thì trong trường hợp này ta nói rằng nghiệm phương trình thứ hai dao động hơn nghiệm phương trình thứ nhất.

Hệ quả. Nếu trên khoảng (a, b) $Q_2(x) > Q_1(x)$ thì nghiệm phương trình thứ hai trong (5.5) dao động hơn nghiệm phương trình thứ nhất.

Nhận xét. Nếu x_o là không điểm chung của hai nghiệm không tầm thường $y(x)$, $z(x)$ nào đó của các phương trình (5.5), x_1 là không điểm tiếp theo của $y(x)$ và trong khoảng (x_o, x_1)có điểm x mà tại đó $Q_2(x) > Q_1(x)$ còn trong phần còn lại $Q_2(x) \geqslant Q_1(x)$ thì không điểm tiếp theo của $z(x)$ sẽ nằm bên trái điểm x_1. Thật vậy nếu giả thiết ngược lại $z(x) \neq 0$ trên (x_o, x_1) thì từ (5. 8) ta đi đến mâu thuẫn .

*Ví dụ 1.*Xét phương trình

$$y'' + q(x)y = 0 \qquad (5.9)$$

trong đó q (x) là hàm dương liên tục trên đoạn [a, b]. Ký hiệu $m = \min q(x)$, $M = \max q(x)$ trên [a, b] ta có $M \geqslant m > 0$.

Ta áp dụng định lí so sánh cho từng cặp các phương trình :

$$y'' + my = 0 \; ; \qquad z'' + q(x)z = 0 \; ;$$

$$y'' + q(x)y = 0 \; ; \qquad z'' + Mz = 0$$

Dễ kiểm tra rằng khoảng cách giữa 2 không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường phương trình $y'' + k^2y = 0$ là $\frac{\pi}{k}$.

Ta đi đến kết luận sau : Khoảng cách giữa 2 không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường phương trình (5.9) không lớn hơn $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ và không nhỏ hơn $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$

Ví dụ 2. Xét phương trình Becxel

$$x^2y'' + xy'(x^2 - n^2)y = 0$$

trên khoảng (0, + ∞). Như ta đã biết, phép thế $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ đưa phương trình Becxel về dạng

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0 \qquad (5.10)$$

Ở đây $$q(x) = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$$

Trên khoảng $(0, +\infty)$ $q(x) > 1$ nếu $n^2 < \frac{1}{4}$ và $q(x) < 1$ nếu $n^2 > \frac{1}{4}$.

Bởi vậy so sánh phương trình (5.10) với phương trình :

$$y'' + y = 0$$

ta đi đến kết luận : Khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của các hàm Becxel nhỏ hơn π nếu $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$, lớn hơn π nếu $n > \frac{1}{2}$ hoặc $n < -\frac{1}{2}$.

Với $n = \pm\frac{1}{2}$ khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của hàm Becxel đúng bằng π.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình thuần nhất sau đây :

1. $y^{(4)} - 2y'' = 0.$
2. $y^{(4)} + y = 0.$
3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
4. $y^{(4)} - y = 0.$
5. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

Bằng phương pháp biến thiên hằng số hoặc phương pháp hệ số bất định tìm nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của các phương trình không thuần nhất sau :

6. $y'' - 4y' + y = x^2.$
7. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$
8. $y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}.$
9. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x + 1)e^x.$
10. $y''' + y'' + y' + y = 3\sin x.$
11. $y'' + 4y = x\sin 2x.$

12. $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

13. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

14. $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$

15. $y'' - y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Bằng cách đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng, tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau :

16. $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{6}{x^2}y = \dfrac{1}{x}$.

17. $y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{n(n+1)}{x^2}y = 0$.

18. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = \dfrac{1}{x}\ln x$.

19. $x^2y'' - 2y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

20. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.

21. $(1 + x)^2y'' + (1 + x)y' + y = 4\cos(\ln(x + 1))$.

22. Chứng minh rằng nghiệm y (x) của phương trình

$$y'' + \lambda^2 y = f(x)$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0$ có dạng

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x - \tau)f(\tau)d\tau$$

23. Cho phương trình

$$y'' + ay' + by = 0$$

Tìm điều kiện mà các hằng số a, b thỏa mãn để :

a) Mọi nghiệm của phương trình đều giới nội trên $[0, +\infty)$;

b) Mọi nghiệm của phương trình đều dần tới 0 khi $x \to +\infty$.

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x\sqrt{2}} + C_4e^{-x\sqrt{2}}$.

2. $y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + e^{-x}\left(C_3\cos x + C_4\sin x\right)$.

3. $y = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)$.

4. $y = C_1x\,e^x + C_2\,e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.

5. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[(C_1 + C_2x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \left(C_3 + C_4x\right)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]$.

6. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

7. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\ln x + e^x\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8}\right)$.

8. $y = C_1e^{2x} + C_2\,e^{4x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{x}{2}\,e^{2x}$.

9. $y = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5\right)$.

11. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x$.

12. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(C_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,x\right)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]$.

13. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x\sin x$.

14. $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2\,e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$.

15. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\mathrm{arctg}\,e^x$.

16. $y = C_1x^2 + C_2x^3 - \frac{1}{2}x$.

17. $y = C_1x^n + C_2x^{-(n+1)}$.

18. $y = x\left(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x\right) - x\ln x$.

19. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^2 + \dfrac{1}{3}\left[\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln x - \dfrac{1}{3x} - \dfrac{x^2}{3}\right]$.

20. $y = x\left(C_1 + C_2\ln x\right) + C_3x^2 + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x\ln^2 x$.

21. $y = C_1\cos\ln(x+1) + [C_2 + 2\ln(x+1)]\sin\ln(x+1)$.

Chương VI

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Định nghĩa. Hệ n phương trình vi phân cấp một dạng chuẩn tắc là hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1.1}$$

Ở đây x là biến số độc lập, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ là các hàm phải tìm. Các hàm $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ xác định trong miền G của không gian n + 1 chiều $\mathbb{R}^{n+1}$.

Hệ n hàm khả vi $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ xác định trên khoảng (a, b) được gọi là nghiệm của hệ (1. 1) nếu với mọi $x \in (a, b)$ điểm $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in G$ và khi thay chúng vào hệ (1.1) thì ta được n đồng nhất thức theo x trên (a, b).

Tập hợp điểm

$$\Gamma = \left\{ \left(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right), x \in (a, b) \right\}$$

được gọi là đường cong tích phân ứng với nghiệm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$. Hiển nhiên $\Gamma \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Bây giờ ta coi $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ như tọa độ của mỗi điểm trong không gian n chiều $\mathbf{R}^n$ mà ta gọi là không gian pha. Khi đó tập hợp điểm

$$\gamma = \left\{ (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)),\ x \in (a,b) \right\}$$

được gọi là đường cong pha hay quỹ đạo pha. Hiển nhiên đường cong pha chứa trong không gian pha. Không gian $\mathbf{R}^{n+1}$ thường được gọi là không gian pha suy rộng. Đường công tích phân chứa trong không gian pha suy rộng.

Bài toán Côsi : Cho điểm $(x_o, y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o) \in G$.

Tìm nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x_o)$, ..., $y_n(x)$ của hệ (1.1) thỏa mãn điều kiên ban đầu :

$$y_1(x_o) = y_1^o, y_2(x_o) = y_2^o, ..., y_n(x_o) = y_n^o.$$

Sau này ta sẽ xét với những điều kiện nào thì bài toán Côsi có nghiệm và có nghiệm duy nhất.

2. Ý nghĩa cơ học. Ta coi t là biến độc lập ; $x_1, x_2, ..., x_n$ là tọa độ của một điểm trong không gian pha $\mathbf{R}^n$. Khi đó hệ phương trình vi phân cấp một

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \qquad (1.2)$$

là hệ phương trình chuyển động của một điểm trong không gian pha $\mathbb{R}^n$ mà

$$\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

là vectơ vận tốc của điểm đó. Tại mỗi điểm M của không gian pha vectơ vận tốc thay đổi theo thời gian nên ta nói hệ (1. 2) xác định một trường vận tốc không dừng. Nếu kí hiệu X là vectơ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, F là vectơ $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ thì hệ (1.2) viết được dưới dạng vectơ sau :

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

Ta xét trường hợp đặc biệt của hệ (1.2) khi các vế phải không phụ thuộc t :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (1.3)$$

Đối với hệ (1. 3) vectơ vận tốc tại mỗi điểm M không thay đổi theo thời gian. Ta nói rằng hệ (1.3) xác định một trường vận tốc dừng và gọi nó là hệ ô-tô-nôm hay hệ dừng.

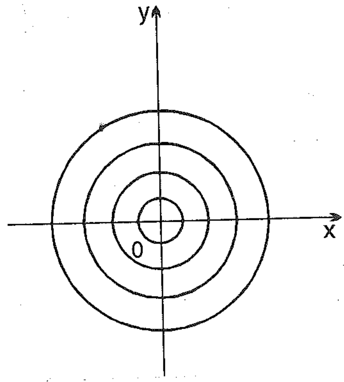
Ví dụ . Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Ở đây không gian pha là mặt phẳng (x, y).

Dễ kiểm tra hệ phương trình đang xét có nghiệm

$x = C_1\cos(t - C_2)$, $y = -C_1\sin(t - C_2)$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Vì $x^2 + y^2 = C_1^2$ nên trong không gian pha mỗi chuyển động của hệ đang xét được thực hiện theo đường tròn tâm O bán kính $|C_1|$ mà ta gọi là quỹ đạo của chuyển động. Nếu cố định C_1 và cho C_2 tùy ý thì ta có vô số chuyển động thực hiện trên cùng một quỹ đạo (h. 16).



Hình 16

Một cách tổng quát, đối với hệ (1. 3) mỗi chuyển động

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

xác định trong không gian $\mathbf{R}^n$ một quĩ đạo và dọc theo quỹ đạo đó có vô số chuyển động dạng

$$X(t + C) = (x_1(t + C), x_2(t + C), \dots, x_n(t + C))$$

§2. QUAN HỆ GIỮA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP n VÀ HỆ n PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Trong tiết này ta sẽ thấy rằng, một phương trình vi phân cấp n :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{2.1}$$

có thể đưa về hệ n phương trình vi phân cấp một dạng (1.1) và ngược lại hệ n phương trình vi phân cấp một dạng chuẩn tắc với một số điều kiện nào đó có thể đưa về một phương trình vi phân cấp n dạng (2.1).

1. Đưa phương trình vi phân cấp n về hệ n phương trình vi phân cấp một

Giả sử ta có phương trình (2.1). Đặt

$$y = y_1\ ,\ y' = y_2\ ,\ y'' = y_3\ ,\ \dots\ ,\ y_n = y^{(n-1)}.$$

Khi đó ta có hệ n phương trình vi phân cấp một sau :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases} \tag{2.2}$$

Nếu $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (2.1) thì

$$y_1 = y(x),\ y_2 = y'(x),\ \dots,\ y_n = y^{(n-1)}(x)$$

là nghiệm của hệ (2.2). Ngược lại, nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ là nghiệm của hệ (2.2) thì hàm $y(x) = y_1(x)$ cho ta nghiệm của phương trình (2.1). Bài toán tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o\ ,\dots,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$$

tương đương với bài toán tìm nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ của hệ (2.2) thỏa mãn điều kiện :

$$y_1(x_o) = y_o,\ y_2(x_o) = y'_o\ ,\ \dots,\ y_n(x_o) = y_o^{n-1}.$$

2. Đưa hệ phương trình vi phân cấp một về một phương trình vi phân cấp cao

Xét hệ phương trình vi phân cấp một :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.3}$$

Ta giả thiết các hàm f_i ($i = 1, 2, ..., n$) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n - 1$ trong miền $G \subset \mathbb{R}^n$ theo tất cả các biến. Giả sử $\{x_1(x), x_2(t), ..., x_n(t)\}$ là một nghiệm nào đấy của hệ (2. 3). Thế vào hệ (2. 3) ta được các đồng nhất thức theo t. Đặc biệt :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \equiv f_1(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \tag{2.1_1}$$

Vi phân đồng nhất thức này theo t ta có

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i \tag{2.1_{1a}}$$

Đặt $\dfrac{\partial f_1}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ suy ra

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} \equiv F_2(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \tag{2.1_2}$$

Vi phân đồng nhất thức này theo t ta được

$$\frac{d^3x_1(t)}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i \tag{2.1_{2a}}$$

Đặt $\dfrac{\partial F_2}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta có

$$\frac{d^3x_1(t)}{dt^3} \equiv F_3(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \qquad (2.1_3)$$

Tiếp tục quá trình trên đến n − 2 lần ta nhận được đồng nhất thức

$$\frac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}} \equiv F_{n-1}(t, x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \qquad (2.1_{n-1})$$

Vi phân một lần nữa theo t :

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dF_{n-1}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

$$= \frac{\partial F_{n-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i} f_i \qquad (2.1_{n-1a})$$

Đặt $\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i} f_i = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$

Khi đó $\dfrac{d^n x_1(t)}{dt^n} \equiv F_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \qquad (2.1_n)$

Từ (2.1_1), (2.1_2),..., (2.1_{n-1}) ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_1^{n-1}}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Giả sử trong một miền đang xét của các biến $(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ định thức $\dfrac{D(f_1, F_2, ..., F_{n-1})}{D(x_2, x_3, ..., x_n)} \neq 0$.

Khi đó từ hệ (2. 4) ta có thể biểu diễn $x_2, x_3, ..., x_n$ qua t, x_1, $\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, ..., \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$.

Thay các giá trị này của $x_2, x_3, ..., x_n$ vào (2.1_n) ta đi đến phương trình

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2x_1}{dt^2}, ..., \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad (2.5)$$

tức là ta thu được một phương trình vi phân cấp n đối với hàm phải tìm là x_1. Từ quá trình lí luận trên ta suy ra $x_t(t)$ là nghiệm của phương trình (2.5).

Bây giờ giả sử $x_1(t)$ là một nghiệm của phương trình (2. 5). Thế $x_t(t)$ và các đạo hàm của nó vào (2. 4) rồi xác định $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t), ..., x_n = x_n(t)$ từ hệ thu được ta có hệ hàm $x_1(t)$, $x_2(t), ..., x_n(t)$. Hệ hàm này là nghiệm của hệ phương trình (2.3). Thật vậy, thay chúng vào hệ (2. 4) ta được các đồng nhất thức. Đặc biệt

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \equiv f_1(t, x_1(t), x_2(t), ...x_n(t))$$

Vi phân đồng nhất thức này theo t :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad (2.6)$$

Trong biểu thức (2. 6) ta không thể thay $\frac{dx_i}{dt}$ bằng f_i $(i = 2,\ldots,n)$ vì đây là điều ta đang cần chứng minh. Trừ hai vế của (2.6) và (2.1_{1a}) cho nhau ta được

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) \equiv 0 \tag{2.7}$$

Tương tự như vậy, vi phận đồng nhất thức thứ hai trong hệ (2.4) rồi trừ (2.1_{2a}) ta có

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) \equiv 0$$

Tiếp tục như thế đối với các đồng nhất thức còn lại, cuối cùng ta đi đến hệ n − 1 phương trình tuyến tính thuần nhất với n − 1 ẩn $\left(\frac{dx_2}{dt} - f_2\right), \left(\frac{dx_3}{dt} - f_3\right), \ldots, \left(\frac{dx_n}{dt} - f_n\right)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i\right) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Định thức của hệ (2. 8) chính là

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0$$

Do đó hệ (2. 8) chỉ có nghiệm tầm thường, tức là

$$\frac{dx_i}{dt} - f_i \equiv 0 \ , \ i = 2, 3, \ldots, n$$

Đây là điều ta cần chứng minh.

Chú ý. Trong quá trình khử các hàm $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ta đã giả thiết

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0 \qquad (2.9)$$

Nếu điều kiện này không thỏa mãn thì ta có thể tiến hành quá trình trên với vai trò x_1 là một hàm nào đó trong số các hàm $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Nếu (2.9) không thỏa mãn với cách chọn một trong các hàm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì có thể có những trường hợp đặc biệt mà ta minh họa bằng các ví dụ sau :

Ví dụ 1 .

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2, x_3) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_2, x_3), \ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \neq 0 \end{cases}$$

Hai phương trình cuối có thể đưa về một phương trình vi phân cấp 2 bằng phương pháp trên ; phương trình đầu chỉ chứa x_1 và x_1 không tham gia vào hai phương trình sau nên có thể tích phân phương trình đầu riêng.

Ví dụ 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_3) \end{cases}$$

Hệ ba phương trình này không thể đưa về phương trình vi phân cấp ba đối với bất kì hàm nào. Do đó phải tích phân riêng từng phương trình .

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Vi phân hai vế của phương trình đầu ta có

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt} - 2(2x - y) = 3\frac{dx}{dt} - x - \frac{dx}{dt}$$

hay $$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

có nghiệm $\lambda = 1$ bội 2. Do đó

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(3C_1e^t + 3C_2te^t - C_1e^t - C_2e^t - C_2te^t\right)$$

$$= e_t\left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2t\right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2te^t \\ y(t) = \left(C_1 - \dfrac{C_2}{2}\right)e^t + C_2te^t \end{cases}$$

§3. PHƯƠNG PHÁP TỔ HỢP TÍCH PHÂN

Trong §2 ta đã chỉ ra một phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân : phương pháp đưa hệ về một phương trình vi phân cấp cao. Trong tiết này ta sẽ trình bày một phương pháp khác, nhiều khi thuận lợi hơn trong việc tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân. Đó là phương pháp tổ hợp tích phân. Ta bắt đầu bằng ví dụ sau :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Cộng hai vế tương ứng của hai phương trình với nhau ta có

$$\frac{d}{dt}(x + y) = x + y$$

Do đó $\ln|x + y| = t + \ln\overline{C}_1$ hay $x + y = \overline{C}_1e^t$.

Trừ phương trình đầu cho phương trình thứ hai :

$$\frac{d}{dt}\left(x - y\right) = -(x - y)$$

Từ đây ta được

$$x - y = -t + \ln\overline{C}_2 \text{ hay } x - y = \overline{C}_2e^{-t}$$

Ta được hai phương trình

$$\begin{cases} x + y = \overline{C}_1e^t \\ x - y = \overline{C}_2e^{-t} \end{cases}$$

Giải ra ta có

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\overline{C}_1e^t + \overline{C}_2e^{-t}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\overline{C}_1e^t - \overline{C}_2e^{-t}\right) \end{cases}$$

hay là $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} \end{cases}$

Qua ví dụ này ta thấy rằng, đối với hệ phương trình vi phân

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \ (i = 1, 2, ..., n) \qquad (3.1)$$

trong một số trường hợp ta có thể lập các tổ hợp khả tích, tức là lập nên những phương trình vi phân mới là hệ quả của hệ (3.1) sau những phép biến đổi nhưng dễ tích phân hơn để từ đó đi đến các hệ thức dạng

$$\phi(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C \qquad (3.2)$$

Hệ thức (3.2) có tính chất là : nếu thay $x_1, x_2, ..., x_n$ bằng nghiệm $x_1(t)$, $x_2(t), ..., x_n(t)$ của phương trình (3.1) thì vế trái của nó sẽ trở thành đồng nhất bằng C. Hệ thức (3.2) có tính chất như vậy được gọi là tích phân đầu của hệ (3.1).

Về phương diện hình học, tích phân đầu (3.2) với mỗi C cố định có thể xem là mặt cong n chiều trong không gian $\mathbf{R}^{n+1}$ với các tọa độ $t, x_1, x_2, ... , x_n$ và có tính chất là mọi đường cong tích phân có một điểm chung với mặt sẽ hoàn toàn nằm trên mặt đó.

Nếu tìm được k tổ hợp khả tích thì ta sẽ có k tích phân đầu :

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_1 \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) = C_k \end{cases} \qquad (3.3)$$

Nếu tất cả các tích phân đầu này là độc lập, tức là có ít nhất một định thức

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})} \neq 0 \qquad (3.4)$$

trong đó $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ là k hàm nào đấy trong số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì từ hệ (3.3) ta có thể biểu diễn k hàm chưa biết theo các hàm còn lại. Thay vào hệ (3.1) ta sẽ hạ thấp được k cấp của hệ đó, tức là đưa về hệ n − k phương trình.

Nếu k = n và các tính phân đầu là độc lập thì các hàm chưa biết đều xác định được từ hệ (3.3). Khi đó ta coi như đã tích phân xong hệ phương trình (3.1).

Ví dụ 1. Xét hệ

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dx} = (B - C)qr \\ B\dfrac{dq}{dx} = (C - A)rp \\ C\dfrac{dr}{dx} = (A - B)pq \end{cases}$$

trong đó $A \geqslant B \geqslant C > 0$ là các hằng số cho trước, p, q, r là những hàm phải tìm. Hệ này thường gặp trong lí thuyết chuyển động của vật rắn trong cơ học.

Nhân phương trình đầu với p, phương trình thứ hai với q phương trình thứ ba với r rồi cộng lại ta được

$$Ap\frac{dp}{dx} + Bq\frac{dq}{dx} + Cr\frac{dr}{dx} = 0$$

hay

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 0$$

Do đó ta được một tích phân đầu của hệ đang xét là

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = C_1$$

Bây giờ ta nhân phương trình đầu với Ap, phương trình thứ hai với Bq, phương trình thứ ba với Cr rồi cộng lại ta được

$$A^2p\frac{dp}{dx} + B^2q\frac{dq}{dx} + C^2r\frac{dr}{dx} = 0$$

hay

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2\right) = 0$$

Do đó ta được thêm một tích phân đầu nửa là

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = C_2$$

Nếu loại trừ trường hợp $A = B = C$ (vì với $A = B = C$ thì điều kiện (3.4) không thỏa mãn) thì các tích phân đầu tìm được là độc lập và từ đó nếu giải p^2, q^2 qua r^2 ta được

$$p^2 = \alpha r^2 + a\ ; \qquad q^2 = -\beta r^2 + b$$

trong đó

$$\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0,\ \beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0$$

còn a, b là những số phụ thuộc C_1, C_2. Nhưng C_1, C_2 là những hằng số tùy ý nên ta có thể xem a và b là những hằng số tùy ý. Thay các giá trị này của p và q vào phương trình thứ ba của hệ đang xét ta có

$$\frac{dr}{dx} = \frac{A-B}{C}\sqrt{(\alpha r^2 + a)(-\beta r^2 + b)}$$

Phương trình này giải được bằng phương pháp tách biến.

Ví dụ 2. Xét hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - z \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = z - x \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Cộng ba phương trình với nhau ta được

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0$$

hay

$$x + y + z = C_1$$

Từ tích phân đầu này ta biểu diễn một trong ba hàm chưa biết qua hai hàm còn lại và như vậy ta đưa về hệ hai phương trình với hai hàm phải tìm. Tuy nhiên trong trường hợp này ta có thể tìm thêm một tích phân đầu nữa. Muốn vậy, ta nhân phương trình đầu với 2x, phương trình thứ hai với 2y, phương trình thứ ba với 2z rồi cộng lại, ta có

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} = 0$$

hay

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Do đó

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Hai tích phân đầu tìm được này độc lập. Vì vậy ta có thể biểu diễn hai hàm chưa biết qua một hàm còn lại và đưa về tích phân một phương trình vi phân cấp một với một hàm phải tìm.

Chú ý. Để dễ tìm các tổ hợp khả tích người ta thường viết lại hệ (3.1) dưới dạng đối xứng sau đây :

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots =$$

$$= \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_o(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

trong đó

$$\frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\varphi_o(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Trong hệ đã cho dưới dạng đối xứng thì vai trò các biến số độc lập và phụ thuộc đều như nhau.

Chính điều này làm cho việc tìm các tổ hợp khả tích được dễ dàng.

Ví dụ. Xét hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2} \end{cases}$$

Dạng đối xứng của hệ là

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

Tích phân phương trình

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

ta được

$$\frac{y}{z} = C_1$$

Bây giờ lần lượt nhân tử số và mẫu số của hệ phương trình đối xứng với x, y và z rồi áp dụng tính chất của tỷ lệ thức ta có

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

Do đó

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln|y| + \ln C_2$$

hay

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$$

Các tích phân đầu tìm được này là độc lập. Vì thế chúng cho ta xác định các hàm phải tìm y và z qua x, C_1, C_2.

§4. ĐỊNH LÍ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Giải sử

(i) Các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ liên tục trong miền

$$G = \left\{|x - x_o| \leq a ; |y_1 - y_1^o| \leq b ; |y_2 - y_2^o| \leq b, \ldots, |y_n - y_n^o| \leq b\right\}$$

và do đó giới nội : $|f_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n)| \leq M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

(ii) Các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ trong miền G với cùng hằng số Lipsit $L > 0$.

Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

của hệ (4. 1) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y_1(x_o) = y_1^o, y_2(x_o) = y_2^o, \ldots, y_n(x) = y_n^o.$$

Nghiệm này xác định trong khoảng đóng

$$[x_o - h, x_o + h] \text{ với } h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

Chứng minh. Để dễ nhớ, ta chia phần chứng minh định lí thành mấy bước sau đây :

Bước 1. Lập dãy xấp xỉ Picar. Đặt

$$y_o(x) = \left(y_{10}(x), y_{20}(x), \ldots, y_{n0}(x)\right)$$

trong đó

$$y_{10}(x) \equiv y_1^o$$

$$y_{20}(x) \equiv y_2^o, \ldots, y_{n0}(x) \equiv y_n^o$$

Tiếp đến ta xây dựng nghiệm xấp xỉ

$$y_1(x) = \left(y_{11}(x), y_{21}(x), \ldots, y_{n1}(x)\right)$$

trong đó

$$y_{i1}(x) = y_i^o + \int_{x_o}^{x} f_i[(\tau, y_{10}(\tau), y_{20}(\tau), \ldots, y_{n0}(\tau)]d\tau$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Một cách tổng quát, ta xây dựng

$$y_k(x) = \left(y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{nk}(x)\right)$$

sau khi đã có

$$y_{k-1}(x) = \left(y_{1k-1}(x), y_{2k-1}(x), \dots, y_{nk-1}(x)\right)$$

với

$$y_{ik}(x) = y_i^o + \int_{x_o}^{x} f_i\left[\tau, y_{1k-1}(\tau), y_{2k-1}(\tau), \dots, y_{nk-1}(\tau)\right] d\tau \qquad (4.2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Tiếp tục quá trình trên ta xây dựng được dãy nghiệm xấp xỉ $\left\{y_k(x)\right\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ có các tính chất sau đây :

a) $$y_k(x_o) = y_o = \left(y_1^o, y_2^o, \dots y_n^o\right)$$

với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$.

b) Khi x biến thiên trên đoạn $I = [x_o - h, x_o + h]$ thì $y_k(x)$ không vượt ra khỏi miền G, tức là

$$\left|y_{1k}(x) - y_1^o\right| \leqslant b, \quad \left|y_{2k}(x) - y_2^o\right| \leqslant b, \quad \dots, \quad \left|y_{nk}(x) - y_n^o\right| \leqslant b$$

với mọi $x \in I$. Ta chứng minh nhận xét này bằng phương pháp qui nạp. Hiển nhiên $y_o(x)$ không vượt ra khỏi miền G. Giả sử khi x biến thiên trên I, $y_k(x)$ không vượt ra khỏi miền G, tức là ta có (4. 3). Khi đó từ (4.2) và giả thiết (i) của định lí ta suy ra

$$\left|y_{ik+1}(x) - y_i^o\right| \leqslant \left|\int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_{1k}(\tau), y_{2k}(\tau), \dots, y_{nk}(\tau)]\right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M\,|x - x_o| \leqslant Mh \leqslant b \ (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (4.3)$$

Các bất đẳng thức này chứng tỏ $y_{k+1}(x)$ không vượt ra khỏi miền G khi $x \in I$.

c) Nghiệm xấp xỉ $y_k(x)$ liên tục trên I với mọi k = 0, 1, 2, ... Điều này suy ra từ (4.2), giả thiết (i) và tính chất b) vừa chứng minh trên.

Bước 2. Ta chứng minh rằng dãy nghiệm xấp xỉ $\{y_k(x)\}$ hội tụ đều trên I, tức là các hàm $y_k(x)$ hội tụ đều trên I khi $k \to \infty$ (i = 1, 2, ..., n).

Ta xét chuỗi hàm sau đây

$$y_i^o + (y_{i1}(x) - y_i^o) + (y_{i2}(x) - y_{i1}(x)) + \dots + (y_{ik}(x) - y_{ik-1}(x)) + \dots \qquad (4.4)$$

Dễ thấy rằng tổng riêng thứ k của chuỗi (4.4) là $y_{ik}(x)$. Do đó ta chỉ cần chứng minh chuỗi (4. 4) hội tụ đều trên I. Muốn vậy, bằng phương pháp qui nạp ta chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\left|y_{ik}(x) - y_{ik-1}(x)\right| \leqslant M(nL)^{k-1}\frac{|x - x_o|^k}{k!} \qquad (4.5)$$

với mọi $x \in I$; i = 1, 2, ..., n ; k = 1, 2, ...

Thật vật, với k = 1 từ (4.2) ta có

$$\left|y_{i1}(x) - y_{io}(x)\right| = |y_{i1}(x) - y_i^o| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_o}^{x} |f_i[\tau, y_{1o}(\tau), \dots, y_{no}(\tau)]|\, d\tau\right| \leqslant M|x - x_o|$$

Giả sử (4.4) đúng với k. Từ (4.2) và điều kiện (ii) của định lí ta có

$$\left|y_{ik+1}(x) - y_{ik}(x)\right| \leqslant \left|\int_{x_o}^{x} \left|f_i[\tau, y_{1k}(\tau), y_{2k}(\tau), \dots, y_{nk}(\tau)] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_i[\tau, y_{1k-1}(\tau), y_{2k-1}(\tau), \dots, y_{nk-1}(\tau)]\right| d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_o}^{x}\left[\left|y_{1k}(\tau) - y_{1k-1}(\tau)\right| + \left|y_{2k}(\tau) - y_{2k-1}(\tau)\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots + \left|y_{nk}(\tau) - y_{nk-1}(\tau)\right|\right] d\tau\right|$$

Theo giả thiết qui nạp, từ (4.5) và từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\left|y_{ik+1}(x) - y_{ik}(x)\right| \leqslant \frac{M(nL)^k}{k!}\int_{x_o}^{x}|\tau - x_o|^k d\tau = \frac{M(nL)^k}{(k+1)!}|x - x_o|^{k+1}$$

tức là bất đẳng thức (4. 5) đúng với k + 1. Vì $|x - x_o| \leqslant h$ nên từ (4.5) ta suy ra

$$\left|y_{ik}(x) - y_{ik-1}(x)\right| \leqslant \frac{M(nL)^{k-1}}{k!} h^k \tag{4.6}$$

với mọi $x \in I$, $i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ...$

Dễ kiểm tra rằng, chuỗi số $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{M(nL)^{k-1}}{k!} h^k$ hội tụ. Do đó theo tiêu chuẩn Veiestrass và từ (4.6) ta suy ra chuỗi hàm (4.4) hội tụ đều trên I với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Đặt $y_i(x) = \lim\limits_{k \to \infty} y_{ik}(x)$, $i = 1, 2, ..., n$

và $y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)$

Vì theo c) các hàm $y_{ik}(x)$ liên tục trên I nên hàm giới hạn $y_i(x)$ của dãy hội tụ đều $\{y_{ik}(x)\}$ cũng liên tục trên I ($i = 1, 2, ..., n$).

Bước 3. Bây giờ ta chứng minh rằng

$$y(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)$$

là nghiệm của hệ phương trình (4.1) với điều kiện ban đầu

$$y_1(x) = y_1^o,\ y_2(x_o) = y_2^o,\ ...,\ y_n(x_o) = y_n^o \tag{4.7}$$

Theo tính chất a) $y_{ik}(x_o) = y_i^o$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ...$ nên chuyển qua giới hạn khi $k \to \infty$ ta suy ra $y_i(x_o) = y_i^o$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ tức là điều kiện (4.7) thỏa mãn. Vì theo b) các hàm $y_k(x)$ không vượt ra khỏi miền G nên hàm giới hạn y (x) cũng không vượt ra khỏi miền G khi x biến thiên trênI. Do đó với mọi i = 1, 2, ..., n hàm $f_i[x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$ được xác định .

Ta chứng minh rằng

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_{1k}(\tau), y_{2k}(\tau), ..., y_{nk}(\tau)]d\tau =$$

$$= \int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), ..., y_n(\tau)]d\tau$$

Thật vậy, với mọi x ∈ I ta có

$$\left|\int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_{1k}(\tau), y_{2k}(\tau), ..., y_{nk}(\tau)]d\tau - \int_{x_o}^{x} f_i[(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), ..., y_n(\tau)]d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_o}^{x} |f_i[\tau, y_{1k}(\tau), y_{2k}(\tau), ..., y_{nk}(\tau)] - f_i[\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), ..., y_n(\tau)]|\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_o}^{x}\sum_{j=1}^{n}|y_{jk}(\tau) - y_j(\tau)|\, d\tau\right| \qquad (4.8)$$

Do $y_{ik}(x)$ hội tụ đều đến $y_i(x)$ trên I nên tồn tại N > 0 sao cho với mọi k > N thì $\left|y_{ik}(x) - y_i(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{nLh}$; i = 1, 2, ..., n ; x ∈ I.

Từ (4.5) và bất đẳng thức sau cùng ta suy ra

$$\left|\int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_{1k}(\tau), ..., y_{nk}(\tau)]d\tau - \int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_1(\tau), ..., y_n(x)]d\tau\right| < \varepsilon$$

với mọi k > N, i = 1, 2, ..., n ; x ∈ I. Đây là điều ta cần chứng minh.

Chuyển qua giới hạn khi k → ∞ các đẳng thức (4. 2) ta được

$$y_i(x) = y_i^o + \int_{x_o}^{x} f_i[\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), ...y_n(\tau)]d\tau \qquad (4.9)$$

Vì hàm dưới dấu tích phân liên tục theo τ nên y_i (x) là hàm khả vi trên I. Lấy đạo hàm hai vế đồng nhất thức (4.9) ta suy ra $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ là nghiệm của hệ (4.1).

Bước 4. Ta chứng minh rằng y (x) là nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu (4.7). Giả sử ngược lại, tồn tại nghiệm $z(x) = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$ của hệ (4.1) xác định trên I thỏa mãn mãn điều kiện ban đầu (4.7). Khi đó tích phân hai vế các đồng nhất thức

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i[x, z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)] \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \text{ từ } x_o \text{ đến } x$$

ta được

$$z_i(x) = y_i^o + \int_{x_o}^{x} f_i[\tau, z_1(\tau), z_2(\tau), \ldots, z_n(\tau)]d\tau \tag{4.10}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Bằng phương pháp qui nạp ta kiểm tra được các bất đẳng thức sau :

$$|z_i(x) - y_{ik}(x)| \leqslant \frac{M(nL)^k}{(k+1)!}|x - x_o|^{k+1} \tag{4.11}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \ ; \ k = 0, 1, 2, \ldots \ ; \ x \in I$$

Thật vậy, từ (4.10) ta có

$$|z_i(x) - y_i^o| \leqslant \left| \int_{x_o}^{x} |f_i[\tau, z_1(\tau), \ldots, z_n(\tau)]| d\tau \right| \leqslant M|x - x_o|$$

tức là (4.11) đúng với k = 0. Giả sử (4.11) đúng với k > 0. Từ các đẳng thức (4.2), (4.10) ta suy ra

$$|z_i(x) - y_{ik+1}(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} f_i[\tau, z_1(\tau), \ldots, z_n(\tau)]d\tau - \int_{x_o}^{z} f_i[\tau, y_{1k}(\tau), \ldots, y_{nk}(\tau)]d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_o}^{x} |f_i[\tau, z_1(\tau), \ldots, z_n(\tau)] - f_i[\tau, y_{1k}(\tau), \ldots, y_{nk}(\tau)]| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left| \int_{x_o}^{x} \sum_{j=1}^{n} |z_j(\tau) - y_{jk}(\tau)| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(nL)^{k+1}}{(k+1)!}\Big|\int_{x_o}^{x}|\tau - x_o|^{k+1}d\tau\Big| = \frac{M(nL)^{k+1}}{(k+2)!}|x - x_o|^{k+2}$$

tức là (4.11) đúng với k + 1.

Trừ bất đẳng thức (4. 11) ta được đánh giá sau :

$$|z_i(x) - y_{ik}(x)| \leqslant \frac{M(nL)^k}{(k+1)!}h^{k+1} \qquad (4.12)$$

$$i = 1, 2, ..., n\ ;\ k = 0, 1, 2, ..., x \in I$$

Dễ dàng kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{k=o}^{\infty}\frac{M(nL)^k}{(k+1)!}h^{k+1}$ và vì thế $\lim_{k\to\infty}\frac{M(nL)^k}{(k+1)!}h^{k+1} = 0$.

Khi đó các bất đẳng thức (4.12) chứng tỏ $\lim_{k\to\infty} y_{ik}(x) = z_i(x)$; $i = 1, 2,..., n$.

Từ tính duy nhất của giới hạn ta suy ra

$$z_i(x) = y_i(x)\ ;\ i = 1, 2, ..., n$$

Định lí hoàn toàn được chứng minh.

Hệ quả 1. Giả sử các hàm $f_1, f_2, ..., f_n$ liên tục trong miền mở $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ và thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $y_1, y_2, ..., y_n$ trong G. Khi đó tồn tại duy nhất một đường cong tích phân của hệ (4.1) đi qua mỗi điểm trong $(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \in G$ cho trước.

Hệ quả 2. Giả sử hàm $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ liên tục trong miền $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ và thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $y, y', ..., y^{(n-1)}$ trong G. Khi đó với mỗi điểm trong $(x_o, y_o, y'_2, ..., y_o^{(n-1)}) \in G$ cho trước tồn tại duy nhất nghiệm y (x) của phương trình vi phân

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (4.13)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu :

$$y(x_o) = y_o\ y'(x_o) = y'_o, ..., y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$$

Đây là định lí tồn tại và duy nhất nghiệm đối với phương trình vi phân cấp n mà ta đã nêu ra ở chương III nhưng chưa chứng minh.

Để chứng minh hệ quả 2 ta chỉ việc đưa phương trình (4.13) về hệ n phương trình vi phân cấp 1 dạng (2.2) (xem §2) rồi áp dụng định lí đã chứng minh trên.

Sự kéo dài nghiệm

Giả sử trong miền G thỏa mãn các điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Khi đó qua mỗi điểm trong $(x_o, y_1^o, y_2^o, \ldots y_n^o) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $y_1(x_o) = y_1^o$, $y_2(x_o) = y_2^o$, $\ldots, y_n(x_o) = y_n^o$. Nghiệm này xác định tại lân cận $[x_o - h_o, x_o + h_o]$ của điểm x_o. Đặt $x_1 = x_o + h_o$, $y_1(x_1) = y_1^1$, $y_2(x_1) = y_2^1, \ldots, y_n(x_1) = y_n^1$. Nếu điểm $(x_1, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1)$ là điểm trọng của miền G thì áp dụng định lí tồn tại duy nhất nghiệm ta có nghiệm $z(x) = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$ của hệ (4.1) xác định trên khoảng $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ và thỏa mãn điều kiện ban đầu $z_1(x_1) = y_1^1, z_2(x_1) = y_2^1, \ldots, z_n(x_1) = y_n^1$. Theo tính duy nhất nghiệm ta suy ra $z(x) = y(x)$ ở trên giao của các khoảng $[x_o - h_o, x_o + h_o]$, $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$. Nhưng khi đó ta được nghiệm của hệ (4.1) đi qua điểm $(x_o, y_1^o, y_2^o, \ldots, y_n^o)$ xác định trên khoảng lớn hơn $[x_o - h_o, x_o + h_o + h_1]$. Đặt $x_2 = x_o + h_1 + h_2$; $z_1(x_2) = y_1^2$, $z_2(x_2) = y_2^2, \ldots, z_n(x_2) = y_n^2$. Nếu điểm $(x_2, y_1^2, y_2^2, \ldots y_n^2)$ là điểm trong của G thì tiếp tục quá trình trên ta có thể kéo dài nghiệm y (x) lên khoảng lớn hơn $[x_o - h_o, x_o + h_1 + h_2]$. Hoàn toàn tương tự ta kéo dài nghiệm y(x) về bên trái của điểm x_o. Người ta chứng minh được rằng quá trình kéo dài nghiệm như trên có thể thực hiện cho đến tận biên của miền G.

Giả sử miền G có dạng

$$G = \{a < x < b \,;\, -\infty < y_1 < \infty \,,\, \ldots,\, -\infty < y_n < \infty\}$$

và trong G các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ liên tục thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ cùng một hằng số Lipsit $L > 0$. Áp dụng quá trình kéo dài nghiệm trên ta suy ra rằng : với mỗi $x_o \in (a, b) \,;\, -\infty < y_i^o < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tồn tại duy nhất nghiệm $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x))$ của hệ (4.1) xác định trên khoảng (a, b) và thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y_1(x_o) = y_1^o, y_2(x_o) = y_2^o, \ldots, y_n(x_o) = y_n^o$$

§5. CÁC LOẠI NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Giả sử G là miền mà tại đó nghiệm của bào toán Côsi đối với hệ phương trình (4.1) tồn tại và duy nhất.

1. Nghiệm tổng quát. Hệ n hàm khả vi liên tục theo x, phụ thuộc n hằng số tùy ý $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases} \tag{5.1}$$

được gọi là nghiệm tổng quát của hệ (4.1) ở trong miền G nếu :

a) Ứng với mỗi $(x_o, y_1^o, y_2^o, \ldots, y_n^o) \in G$ từ hệ (5.1) (sau khi đã thay $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ bằng $x_o, y_1^o, y_2^o, \ldots, y_n^o$) ta có thể xác định được các hằng số

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \\ C_2 &= \psi_2(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \\ &. . . . . \\ C_n &= \psi_n(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

b) Hệ hàm (5.1) nghiệm đúng hệ phương trình (4.1) với C_1, C_2, ..., C_n xác định từ (5.2) .

2. Tích phân tổng quát. Hệ hàm

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_1 \\ \Phi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_2 \\ . . . . \\ \Phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_n \end{cases} \qquad (5.3)$$

được gọi là tích phân tổng quát của hệ (4. 1) trong miền G nếu nó xác định nghiệm tổng quát của hệ (4.1) trong G.

3. Nghiệm riêng. Nghiệm của hệ (4.1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được bảo đảm được gọi là nghiệm riêng. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với các hằng số C_1, C_2, ..., C_n xác định từ (5.2) là nghiệm riêng.

4. Nghiệm kì dị. Nghiệm của hệ (4. 1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi bị phá vỡ được gọi là nghiệm kì dị.

Ví dụ . Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + \dfrac{2}{x}y - \sqrt{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = 2\sqrt{z} \end{cases} \qquad (x \neq 0)$$

Tích phân phương trình thứ hai ta được

$$z = (x + C_1)^2, \; x > -C_1$$

Thay giá trị này của z vào phương trình thứ nhất và tích phân nó ta có : $y = C_1x + C_2x^2$

Hệ hàm

$$\begin{cases} y = C_1x + C_2x^2 \\ z = (x + C_1)^2 \end{cases}, x > - C_1$$

là nghiệm tổng quát của hệ đang xét trong miền

$$G = \{x \neq 0 ; -\infty < y < \infty ; 0 < z < \infty\}$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm kì dị $z = 0$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$y = x^2 (C + \ln |x|)$$

Do đó hệ phương trình đã cho có họ nghiệm kì dị

$$\begin{cases} y = x^2(C + \ln|x|) \\ z = 0 \end{cases}$$

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Đó là hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n \end{cases} \qquad (6.1)$$

Ta giả thiết các hàm $p_{ij}(x)$ (i, j = 1, 2, ..., n) liên tục trên khoảng (a, b). Khi đó với mỗi $x_o \in (a, b)$; $(y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \in \mathbf{R}^n$

tồn tại duy nhất nghiệm $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ của hệ (6.1) xác định trên khoảng (a, b) và thỏa mãn điều kiện ban đầu $y_1(x_o) = y_1^o$; $y_2(x_o) = y_2^o$, ..., $y_n(x_o) = y_n^o$. Thật vậy, lấy đoạn bất kì $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ sao cho $x_o \in [a_1, b_1]$ và kí hiệu $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các vế phải tương ứng của các phương trình hệ (6.1) thì

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = p_{ij}(x) \ ; \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Do các hàm $p_{ij}(x)$ liên tục trên đoạn $[a_1, b_1]$ nên

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| = |p_{ij}(x)| \leqslant M \ ; \ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Do đó các vế phải của hệ (6.1) thỏa mãn điều kiện Lipsit theo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ và vì vậy thỏa mãn điều kiện định lí tồn tại duy nhất nghiệm.

Theo nhận xét ở phần cuối §4 ta suy ra điều cần chứng minh bởi $[a_1, b_1]$ là đoạn bất kì chứa trong (a, b).

Hệ phương trình (6.1) có thể thể viết được dưới dạng vectơ sau : Đặt

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ ; \ \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} \ ; \ P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \ldots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \ldots & p_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \ldots & p_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Khi đó hệ (6.1) tương đương với phương trình

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y \qquad (6.2)$$

1. Toán tử vi phân tuyến tính của hệ (6.1). Để đơn giản cách viết và thuận lợi trong nghiên cứu ta đưa ra toán tử vi phân tuyến tính sau :

$$L[Y] = \frac{dY}{dx} - P(x)Y$$

Khi đó hệ (6.1) viết được dưới dạng

$$L[Y] = 0$$

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây của toán tử L :

a) $L[CY] = CL[Y]$ trong đó C là hằng số tùy ý.

b) $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$

c) $L\left[\sum_{i=1}^{k} C_iY_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_iL[Y_i]$

trong đó C_i là các hằng số bất kì ($i = 1, 2, ..., k$)

Ta chứng minh, chẳng hạn, tính chất b). Theo định nghĩa

$$L[Y_1 + Y_2] = \frac{d}{dx}(Y_1 + Y_2) - P(x)(Y_1 + Y_2) =$$

$$= \frac{d}{dx}Y_1 - P(x)Y_1 + \frac{d}{dx}Y_2 - P(x)Y_2 = L[Y_1] + L[Y_2]$$

Từ tính chất của toán tử L ta suy ra các tính chất sau của nghiệm hệ phương trình (6.1).

- Tích của một hằng số bất kì với nghiệm phương trình (6.2) là một nghiệm của phương trình (6.2).

- Tổng của hai nghiệm bất kì của phương trình (6.2) là nghiệm của phương trình (6.2).

Tổng quát hơn : Một tổ hợp tuyến tính các nghiệm của phương trình (6.2) là nghiệm của phương trình đó.

- Nếu phương trình (6.2) với ma trận thực P (x) có nghiệm phức $Y(x) = U(x) + iV(x)$ thì phần thực $U(x)$ và phần ảo $V(x)$ là các nghiệm thực của phương trình đó.

Thật vậy, vì $Y(x)$ là nghiệm nên ta có

$$L[Y(x)] \equiv 0$$

Từ tính chất của toán tử L suy ra

$$L[U(x)] + iL[V(x)] \equiv 0$$

Do đó

$$L[U(x)] \equiv 0 \ ; \ L[V(x)] \equiv 0.$$

2. Sự phụ thuộc và độc lập tuyến tính của hệ vectơ hàm

Giả sử hệ vectơ hàm

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

xác định trên khoảng (a, b).

Định nghĩa. Ta nói rằng hệ vectơ hàm $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x) \equiv 0 \qquad (6.3)$$

trên (a, b).

Định thức

$$W(x) = W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Vronski của hệ vectơ hàm trên.

Định lí 1. *Điều kiện cần để hệ vectơ hàm $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) là sự đồng nhất bằng không trên (a, b) của định thức Vronski W(x) của chúng.*

Thật vậy, hệ thức (6.3) tương đương với hệ n phương trình đại số tuyến tính thuần nhất mà các ẩn là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sau :

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x) + \alpha_2 y_{12}(x) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x) = 0 \\ \alpha_1 y_{21}(x) + \alpha_2 y_{22}(x) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_{n1}(x) + \alpha_2 y_{n2}(x) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x) = 0 \end{cases} \qquad (6.4)$$

Theo giả thiết, với mọi x thuộc (a, b) hệ này có nghiệm không tầm thương $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Do đó định thức Crame của hệ phải bằng không trên (a, b). Dễ thấy rằng định thức Crame của hệ (6.4) là định thức Vronski W(x).

Nhận xét . Khẳng định ngược lại của định lí 1 nói chung không đúng. Chẳng hạn xét hệ vectơ hàm

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$W[Y_1, Y_2] = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \equiv 0$$

nhưng $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ độc lập tuyến tính vì hệ thức $\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) \equiv 0$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x \equiv 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x \equiv 0 \end{cases}$$

Điều này chỉ có thể xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Tuy vậy ta có kết quả sau đây :

Định lí 2. *Giả sử* $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... , $Y_n(x)$ *là n nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (6. 2). Sự đồng nhất bằng không của định thức Vronski của n nghiệm này là điều kiện cần và đủ để chúng phụ thuộc tuyến tính trên (a, b).*

Chứng minh. Điều kiện cần suy ra từ định lí 1 như một trường hợp riêng. Để chứng minh điều kiện đủ ta lấy điểm $x_o \in (a, b)$ và xét hệ n phương trình đại số tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_o) + \alpha_2 y_{12}(x_o) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_o) = 0 \\ \alpha_1 y_{21}(x_o) + \alpha_2 y_{22}(x_o) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x_o) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_{n1}(x_o) + \alpha_2 y_{n2}(x_o) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_o) = 0 \end{cases} \qquad (6.5)$$

Vì định thức Crame của hệ (6.5) là $W(x_o) = 0$ nên hệ có nghiệm không tầm thường $\alpha_1^o, \alpha_2^o, ..., \alpha_n^o$. Xét vectơ hàm

$$Y(x) = \alpha_1^o Y_1(x) + \alpha_2^o Y_2(x) + ... + \alpha_n^o Y_n(x)$$

Theo tính chất nghiệm của hệ (6.2) ta suy ra rằng Y(x) là nghiệm của hệ này :

$$Y(x_o) = \alpha_1^o Y_1(x_o) + \alpha_2^o Y_2(x_o) + ... + \alpha_n^o Y_n(x_o)$$

Từ (6. 5) ta suy ra $Y(x_o) = 0$. Mặt khác vectơ hàm $Z(x) \equiv 0$ cũng là nghiệm của hệ (6.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu $Z(x_o) = 0$.

Theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi ta phải có

$$Y(x) \equiv Z(x) \equiv 0$$

hay là

$$\alpha_1^o Y_1(x) + \alpha_2^o Y_2(x) + ... + \alpha_n^o Y_n(x) \equiv 0$$

Đây là điều cần chứng minh.

Từ định lí 1 và quá trình chứng minh định lí 2 ta suy ra rằng định thức Vronski của n nghiệm hệ phương trình (6.2) hoặc là khác không tại mọi điểm của khoảng (a, b), hoặc là đồng nhất bằng không trên đó.

3. Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa. Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (6.2) được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Hệ phương trình (6.1) (hoặc một cách tương đương, phương trình (6.2)) có vô số hệ nghiệm cơ bản.

Thật vậy, lấy $x_o \in (a, b)$ và ma trận vuông cấp n bất kì

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sao cho det $A \neq 0$.

Kí hiệu

$$Y_j(x) = \begin{pmatrix} y_{1j}(x) \\ y_{2j}(x) \\ \vdots \\ y_{nj}(x) \end{pmatrix}$$

là nghiệm của (6.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$Y_j(x_o) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

Theo định lí tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Côsi, các nghiệm

$$Y_j(x), \ (j = 1, 2, ..., n)$$

tồn tại và duy nhất trên (a, b). Vì định thức Vronski của các nghiệm $Y_j(x)$, ($j = 1, 2, ..., n$) tại điểm x_o bằng det $A \neq 0$ nên các nghiệm này độc lập tuyến tính trên (a, b) và do đó lập nên một hệ nghiệm cơ bản của phương trình (6. 2).

Nếu đóng vai trò của A ta lấy ma trận đơn vị cấp n thì hệ nghiệm cơ bản $Y_1(x)$, $Y_2(x)$,..., $Y_n(x)$ tương ứng được gọi là hệ nghiệm cơ bản chuẩn hóa tại x_o.

Định lí 3. *Giả sử $Y_1(x)$, $Y_2(x)$,..., $Y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của (6.1). Khi đó biểu thức*

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_nY_n(x)$$

là nghiệm tổng quát của hệ phương trình đó (C_1, C_2,... , C_n là các hằng số tùy ý).

Thật vậy Y(x) là nghiệm của hệ (6.1). Mặt khác với $x_o \in$ (a, b) và $(y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \in R^n$ từ hệ

$$\begin{cases} y_1^o = C_1y_{11}(x_o) + C_2y_{12}(x_o) + \dots + C_ny_{1n}(x_o) \\ y_2^o = C_1y_{21}(x_o) + C_2y_{22}(x_o) + \dots + C_ny_{2n}(x_o) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^o = C_1y_{n1}(x_o) + C_2y_{n2}(x_o) + \dots + C_ny_{nn}(x_o) \end{cases} \qquad (6.6)$$

ta có thể giải ra duy nhất $C_j = \psi_j(x_o, y_1^o, \ , y_n^o)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Điều này có được vì định thức Crame của hệ (6.6) là $W(x_o) \neq 0$.

4. Công thức Ostrogradski – Liuvil. Giả sử $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_2(x)$ là n nghiệm bất kì của hệ phương trình (6. 1). Ứng với hệ vectơ hàm này ta có định thức Vronski :

$$W(x) = W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Lấy đạo hàm hai vế và chú ý đến qui tắc lấy đạo hàm của định thức ta được :

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx} & \dots & \frac{dy_{1n}}{dx} \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{2n}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx} & \dots & \frac{dy_{2n}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_{n1}(x)}{dx} & \frac{dy_{n2}(x)}{dx} & \dots & \frac{dy_{nn}(x)}{dx} \end{vmatrix} \qquad (6.7)$$

Thay các đạo hàm trong các định thức trên bằng vế phải tương ứng của hệ (6.1), chẳng hạn đối với định thức thứ nhất ta có

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{dy_{11}}{dx} & \dfrac{dy_{12}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{1n}}{dx} \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}(x)y_{j1}(x) & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}(x)y_{j2}(x) & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{1j}(x)y_{jn}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Theo tính chất của định thức, $\Delta_1(x)$ là tổng của n định thức, trong đó định thức thứ nhất bằng $p_{11}(x)W(x)$, còn $n - 1$ định thức còn lại đều bằng không vì có hai hàng tỷ lệ với nhau. Tương tự như vậy ta tính được định thức thứ hai $\Delta_2(x)$ bằng $p_{22}(x)W(x)$, ..., định thức thứ n $\Delta_n(x)$ bằng $p_{nn}(x)W(x)$ và (6.7) có dạng

$$\frac{dW}{dx} = p_{11}(x)W(x) + p_{22}(x)W(x) + \ldots + p_{nn}(x)W(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x)\right) W(x) \quad (6.8)$$

Tích phân phương trình (6.8) ta được

$$W(x) = Ce^{\int \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ii}(x)dx} \quad (6.9)$$

hoặc dưới dạng Côsi :

$$W(x) = W(x_o)e^{\int_{x_o}^{x} \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ii}(\tau)d\tau} \quad (6.10)$$

Công thức (6. 9), (6. 10) được gọi là công thức Ostrogradski–Liuvil. Nó cho ta biết được định thức Vronski của hệ n nghiệm phương trình (6. 2) mà không cần giải nó. Một lần nữa, qua công thức Ostrogradski – Liuvil ta thấy rằng định thức Vronski của hệ n nghiệm của hệ phương trình (6. 1) hoặc khác không tại mọi điểm của khoảng (a, b), hoặc đồng nhất bằng không trên (a, b).

Nếu viết phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) = 0$$

dưới dạng hệ phương trình vi phân thì từ công thức (6. 9) hoặc (6. 10) ta suy ra công thức Ostrogratski - Liuvil tương ứng đối với phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n (xem §2, chương 4).

§7. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (7.\ 1)$$

Nếu ta ký hiệu

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$P(x)$, $\dfrac{dY}{dx}$, Y như ở phần đầu của §6 thì hệ (7.1) có thể viết dưới dạng vectơ tương đương như sau :

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + F(x) \quad (7.2)$$

hoặc dưới dạng toán tử L

$$L[Y] = F(x) \quad (7.3)$$

Ta giả thiết các hàm $p_{ij}(x)$, $f_i(x)$; $i, j = 1, 2, ..., n$ liên tục trên khoảng (a, b). Khi đó bằng cách lí luận tương tự như ở đầu §6 mỗi $x_o \in (a, b)$; $(y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \in \mathbf{R}^n$ tồn tại duy nhất nghiệm

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$$

của hệ (7.1) xác định trên khoảng (a, b) và thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y_1(x_o) = y_1^o, \ y_2(x_o) = y_2^o, \ ..., \ y_n(x_o) = y_n^o$$

1. Các tính chất của nghiệm hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Định lí 1. *Nếu $Y^*(x)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất, $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng thì nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất có dạng :*

$$Y = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_nY_n(x) + Y^*(x)$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số bất kì.

Chứng minh. Trước hết ta thấy $Y(x)$ là nghiệm của hệ (7.1) vì

$$L[Y(x)] = L[C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_nY_n(x) + Y^*(x)]$$

$$= C_1L[Y_1(x)] + C_2[Y_2(x)] + ... + C_n[Y_n(x)] + L[Y^*(x)]$$

Vì theo giả thiết, $L[Y_j(x)] \equiv 0$, $L[Y^*(x)] \equiv F(x)$ nên cuối cùng ta có

$$L[Y(x)] \equiv F(x)$$

Lấy bất kì $x_o \in (a, b)$; $(y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \in \mathbf{R}^n$; xét hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^o = C_1y_{11}(x_o) + C_2y_{12}(x_o) + ... + C_ny_{1n}(x_o) + f_1(x_o) \\ y_2^o = C_1y_{21}(x_o) + C_2y_{22}(x_o) + ... + C_ny_{2n}(x_o) + f_2(x_o) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^o = C_1y_{n1}(x_o) + C_2y_{2n}(x_o) + ... + C_ny_{nn}(x_o) + f_n(x_o) \end{array}\right. \qquad (7.4)$$

Nếu coi $C_1, C_2, ..., C_n$ như các ẩn số thì (7.4) là hệ phương trình đại số tuyến tính không thuần nhất với định thức Crame bằng định thức Vronski tại điểm x_o của hệ nghiệm cơ bản $Y_1(x)$, $Y_2(x), ..., Y_n(x)$ và vì thế khác không. Do đó từ hệ (7.4) ta có thể giải được duy nhất

$$C_i = \varphi_i(x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o) \ , \ i = 1, 2, ..., n$$

Điều này chứng tỏ Y(x) là nghiệm tổng quát của hệ (7.1).

Tổng hai nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất không phải là nghiệm của hệ phương trình đó. Tuy vậy ta có khẳng định sau đây (thường gọi là nguyên lý chồng chất nghiệm) :

Định lí 2. *Nếu $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ là hai nghiệm tương ứng của các hệ phương trình*

$$L[Y] = F_1(x) \ ; \ L[Y] = F_2(x)$$

thì $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$L[Y] = F_1(x) + F_2(x)$$

Thật vậy, theo tính chất của toán tử L ta có

$$L[Y(x)] = L[Y_1(x) + Y_2(x)] = L[Y_1(x)] + L[Y_2(x)] \equiv F_1(x) + F_2(x)$$

Định lí 3. *Nếu hệ phương trình tuyến tính*

$$L[Y] = U(x) + iV(x)$$

trong đó $$U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}$$

với ma trận thực P(x) có nghiệm phức

$$Y(x) = X(x) + iZ(x)$$

thì phần thực X(x), phần ảo Z(x) là các nghiệm thực tương ứng của các hệ phương trình

$$L[Y] = U(x) \ ; \ L[Y] = V(x)$$

Thật vậy, theo giả thiết

$$L[Y(x)] = L[X(x) + iZ(x)] \equiv U(x) + iV(x)$$

hay

$$L[X(x)] + iL[Z(x)] \equiv U(x) + iV(x)$$

Điều này chỉ có thể xẩy ra khi

$$L[X(x)] \equiv U(x) \ ; \ L[Z(x)] \equiv V(x).$$

2. Phương pháp biến thiên hằng số. Từ định lí 1 ta suy ra rằng việc tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất đưa về việc tìm nghiệm tổng quát của hệ tuyến tính thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng $Y^*(x)$ nào đấy của hệ tuyến tính không thuần nhất. Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm tổng quát của hệ tuyến tính thuần nhất (xem §3) dễ dàng. Do đó việc tìm nghiệm riêng $Y^*(x)$ của hệ tuyến tính không thuần nhất hết sức quan trọng. Phương pháp biến thiên hằng số trình bày dưới đây sẽ cho ta cách tìm nghiệm riêng $Y^*(x)$ khi biết nghiệm tổng quát của hệ tuyến tính thuần nhất tương ứng.

Giả sử

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} ; \ Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} ; \ \dots ; \ Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

là hệ nghiệm cơ bản của phương trình $L[Y] = 0$.

Ta tìm nghiệm riêng

$$Y^*(x) = \begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \\ \vdots \\ y_n^*(x) \end{pmatrix}$$

của hệ tuyến tính không thuần nhất $L[Y] = F(x)$ dưới dạng

$$Y^*(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + ... + C_n(x)Y_n(x) \quad (7.5)$$

Ở đây các hàm $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ là các hàm ta cần xác định sao cho $Y^*(x)$ thỏa mãn hệ (7.1) tức là

$$\frac{dY^*(x)}{dx} \equiv P(x)Y^*(x) + F(x)$$

hay

$$C'_1(x)Y_1(x) + C'_2(x)Y_2(x) + ... + C'_n(x)Y_n(x) + C_1(x)\frac{dY_1(x)}{dx} +$$

$$+ C_2(x)\frac{dY_2(x)}{dx} + ... + C_n(x)\frac{dY_n(x)}{dx} \equiv$$

$$\equiv P(x)\left[C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + ... + C_n(x)Y_n(x)\right] + F(x) \quad (7.6)$$

Chú ý rằng $\frac{dY_j(x)}{dx} \equiv P(x)Y_j(x)$, $j = 1, 2, ..., n$ từ (7.6) ta suy ra

$$C'_1(x)Y_1(x) + C'_2(x)Y_2(x) + ... + C'_n(x)Y_n(x) \equiv F(x) \quad (7.7)$$

Hệ thức (7.7) tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1(x)y_{11}(x) + C'_2(x)y_{12}(x) + ... + C'_n(x)y_{1n}(x) = f_1(x) \\ C'_1(x)y_{21}(x) + C'_2(x)y_{22}(x) + ... + C'_n(x)y_{2n}(x) = f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C'_1(x)y_{n1}(x) + C'_2(x)y_{n2}(x) + ... + C'_n(x)y_{nn}(x) = f_n(x) \end{cases} \quad (7.8)$$

Dễ thấy định thức Crame của hệ (7.8) là định thức Vronski của n nghiệm độc lập tuyến tính $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_n(x)$ và do đó khác không trên (a, b). Bởi vậy từ hệ (7.8) ta xác định được các $C'_j(x) = \psi_j(x)$; $j = 1, 2, ..., n$ và do đó

$$C_j(x) = \int \psi_j(x)dx \;;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Thay giá trị này của $C_j(x)$ vào (7.5) ta được nghiệm $Y^*(x)$ phải tìm.

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Trước hết ta tìm nghiệm của hệ thuần nhất

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y \end{cases}$$

Bằng cách đưa về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất là

$$\begin{cases} y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x \\ z(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x \end{cases}$$

Ta tìm nghiệm riêng của hệ tuyến tính không thuần nhất dưới dạng

$$\begin{cases} y^*(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \\ z^*(x) = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \end{cases}$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ được xác định nhờ hệ phương trình

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Hệ sau cùng có nghiệm $C'_1(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $C'_2(x) = 1$. Do đó có thể lấy $C_2(x) = x$, $C_1(x) = \ln|\cos x|$ và nghiệm riêng phải tìm

$$\begin{cases} y^*(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x \\ z^*(x) = -\sin x \ln|\cos x| + x\cos x \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đang xét có dạng

$$\begin{cases} y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x \\ z(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\ln|\cos x| + x\cos x \end{cases}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

Trong tiết này ta xét hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{8.1}$$

Ở đây a_{ij}; i, j = 1, 2, ..., n là các hằng số, $f_i(x)$; i = 1, 2, ..., n là các hàm liên tục trên khoảng (a, b) nào đấy.

Nếu dùng kí hiệu như ở § 6 thì hệ (8.1) có thể viết dưới dạng vectơ

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x) \tag{8.2}$$

ở đây A là ma trận hằng.

Ta có thể tích phân hệ (8.1) bằng cách đưa hệ về một phương trình vi phân tuyến tính cấp n cũng với hệ số hằng. Tuy nhiên ta có thể trực tiếp tìm nghiệm tổng quát của hệ bằng phương pháp trình bày dưới đây.

Trước hết ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (8.3)$$

Ta tìm nghiệm của hệ (8. 1) dưới dạng

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

và tìm cách chọn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda$ sao cho Y(x) là nghiệm của (8.3). Thay vào hệ (8.3), sau khi rút gọn $e^{\lambda x}$ và chuyển về một vế ta được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất sau đây :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (8.4)$$

Ta cần tìm nghiệm không tầm thường của hệ (8.4), tức là tất cả $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ không đồng thời bằng không. Điều này chỉ có thể xẩy ra khi định thức Crame của hệ (8.4) bằng không, tức là

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.5)$$

Phương trình (8.5) cho ta xác định giá trị λ cần tìm và được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (8.3). Ta xét lần lượt các trường hợp sau :

1) Phương trình đặc trưng (8.5) có n nghiệm thực khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Thay mỗi λ_j vào hệ (8.4) ta giải được các α_{1j} , α_{2j} ..., α_{nj} không đồng thời bằng không và do đó ta có nghiệm không tầm thường của hệ (8. 3)

$$Y_j(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}e^{\lambda_j x} \\ \alpha_{2j}e^{\lambda_j x} \\ \vdots \\ \alpha_{nj}\ e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

Các nghiệm Y_1 (x), Y_2 (x) , ..., Y_n (x) này là độc lập tuyến tính vì nếu ta có

$$\beta_1 Y_1(x) + \beta_2 Y_2(x) + \dots + \beta_n Y_n(x) \equiv 0$$

thì

$$\begin{cases} \beta_1\alpha_{11}\, e^{\lambda_1 x} + \beta_2\alpha_{12}e^{\lambda_2 x} + \dots + \beta_n\alpha_{1n}e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \beta_1\alpha_{21}\ e^{\lambda_1 x} + \beta_2\alpha_{22}\, e^{\lambda_2 x} + \dots + \beta_n\alpha_{2n}\, e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_1\alpha_{n1}\, e^{\lambda_1 x} + \beta_2\alpha_{n2}\, e^{\lambda_2 x} + \dots + \beta_n\alpha_{nn}\ e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

Vì các hàm $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., $e^{\lambda_n x}$ độc lập tuyến tính (xem §2 chương IV) nên ta phải có $\beta_i\alpha_{ji} = 0$ với mọi i, j = 1, 2, ..., n .

Theo cách xây dựng ở trên, với mỗi i cố định có ít nhất một trong các số α_{1i} , α_{2i} , ..., α_{ni} khác không. Vì vậy ta suy ra $\beta_i = 0$

với mọi i = 1, 2, ..., n, tức là hệ $Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x)$ độc lập tuyến tính. Do đó hệ (8.3) có nghiệm tổng quát

$$Y = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_nY_n(x).$$

2) Phương trình đặc trưng (8. 5) có cặp nghiệm phức liên hợp đơn :

$$k_j = p + iq$$
$$\overline{k_j} = p - iq$$

Khi đó, chẳng hạn, ứng với k_j ta được nghiệm

$$Y_j(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}\, e^{(p+iq)x} \\ \alpha_{2j}\, e^{(p+iq)x} \\ \vdots \\ \alpha_{nj}\, e^{(p+iq)x} \end{pmatrix}$$

trong đó, nói chung α_{ij} là những số phức :

$$\alpha_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}.$$

Bởi vậy

$$Y_j(x) = \begin{pmatrix} (a_{1j} + ib_{1j})e^{px}(\cos qx + i\sin qx) \\ (a_{2j} + ib_{2j})e^{px}(\cos qx + i\sin qx) \\ \vdots \\ (a_{nj} + ib_{nj})e^{px}(\cos qx + i\sin qx) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{px}(a_{1j}\cos qx - b_{1j}\sin qx) \\ e^{px}(a_{2j}\cos qx - b_{2j}\sin qx) \\ \vdots \\ e^{px}(a_{nj}\cos qx - b_{nj}\sin qx) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{px}(b_{1j}\cos qx + a_{1j}\sin qx) \\ e^{px}(b_{2j}\cos qx + a_{2j}\sin qx) \\ \vdots \\ e^{px}(b_{nj}\cos qx + a_{nj}\sin qx) \end{pmatrix}$$

Theo tính chất của nghiệm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ta suy ra rằng các vectơ hàm

$$U_j(x) = \begin{pmatrix} e^{px}(a_{1j}\cos qx - b_{1j}\sin qx) \\ e^{px}(a_{2j}\cos qx - b_{2j}\sin qx) \\ \vdots \\ e^{px}(a_{nj}\cos qx - b_{nj}\sin qx) \end{pmatrix}; \; V_j(x) = \begin{pmatrix} e^{px}(b_{1j}\cos qx + a_{1j}\sin qx) \\ e^{px}(b_{2j}\cos qx + a_{2j}\sin qx) \\ \vdots \\ e^{px}(b_{nj}\cos qx + a_{nj}\sin qx) \end{pmatrix}$$

là hai nghiệm thực ứng với cặp nghiệm phức liên hợp k_j, $\overline{k}_j$ của hệ phương trình (8.3).

Dễ kiểm tra rằng $U_j(x)$, $V_j(x)$ độc lập tuyến tính. Tiến hành như vậy đối với mọi cặp nghiệm phức liên hợp khác ta xây dựng được n nghiệm thực độc lập tuyến tính của hệ (8.3) và do đó xây dựng được nghiệm tổng quát của nó.

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

có hai nghiệm thực khác nhau là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Ứng với $\lambda_1 = 1$ ta được hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Chọn $\alpha_2 = -1$ ta suy ra $\alpha_1 = 1$. Do đó với $\lambda_1 = 1$ ta được nghiệm của hệ phương trình vi phân đang xét là :

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}$$

Với $\lambda_2 = 3$ ta có hệ

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Cho $\alpha_2 = 1$ ta được $\alpha_2 = 1$ và do đó ta có nghiệm

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân đang xét là

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x)$$

hoặc dưới dạng khai triển

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} \\ z(x) = -C_1e^x + C_2e^{3x} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

có cặp nghiệm phức liên hợp $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Do đó α_1, α_2 được xác định từ hệ

$$\begin{cases} -i\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - i\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Cho $\alpha_1 = 1$ ta được $\alpha_2 = -i$ và nghiệm của hệ phương trình vi phân có dạng

$$y(x) = e^{(2+i)x} = e^{2x}\cos x + ie^{2x}\sin x,$$
$$z(x) = -ie^{(2+i)x} = -e^{2x}\sin x + ie^{2x}\cos x.$$

Vì vậy hai nghiệm thực độc lập tuyến tính của hệ cần giải là

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{2x}\cos x \\ z_1(x) = -e^{2x}\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(x) = 2^{2x}\ \sin x \\ z_2(x) = e^{2x}\ \cos x \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát có dạng

$$\begin{cases} y(x) = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \\ z(x) = e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x) \end{cases}$$

3) Phương trình đặc trưng có nghiệm λ bội k.

Vì nếu đưa hệ (8.3) về một phương trình vi phân cấp cao theo cách đã biết thì phương trình cấp cao này sẽ có một nghiệm đặc trưng bội k. Từ dạng nghiệm của phương trình vi phân cấp cao này ta suy ra đối với hệ (8. 3) trong trường hợp này có thể tìm nghiệm dạng

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_{11} + \alpha_{21}x + \alpha_{31}x^2 + \ldots + \alpha_{k1}x^{k-1})e^{\lambda x} \\ y_2 = (\alpha_{12} + \alpha_{22}x + \alpha_{32}x^2 + \ldots + \alpha_{k2}x^{k-1})e^{\lambda x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = (\alpha_{1n} + \alpha_{2n}x + \alpha_{3n}x^2 + \ldots + \alpha_{kn}x^{k-1})e^{\lambda x} \end{cases}$$

Thay vào hệ (8.3) ta xác định được các α_{ij}. Có thể chứng minh rằng, trong số các α_{ij} có k số được chọn bất kì.

Ví dụ. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có nghiệm $\lambda = 2$ bội hai.

Ta tìm nghiệm của hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} y = (\alpha_1 + \beta_1 x)e^{2x} \\ z = (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{2x} \end{cases}$$

Thay vào hệ phương trình và giản ước ta được

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 x \equiv \alpha_1 + \beta_1 x - \alpha_2 - \beta_2 x$$

Hằng đẳng hệ số theo x ta có

$$\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1,$$
$$\beta_2 = -\beta_1.$$

Chọn $\alpha_1 = C_1$, $\beta_1 = C_2$ suy ra nghiệm tổng quát của hệ đang xét có dạng

$$\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \\ z = -(C_1 + C_2 + C_2 x)e^{2x} \end{cases}$$

4) Phương trình đặc trưng có cặp nghiệm phức λ, $\bar{\lambda}$ bội k.

Cũng như trong trường hợp 3) ta tìm nghiệm của hệ (8.3) dưới dạng

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_{11} + \alpha_{21}x + \dots + \alpha_{k1}x^{k-1})e^{\lambda x} \\ y_2 = (\alpha_{12} + \alpha_{22}x + \dots + \alpha_{k2}x^{k-1})e^{\lambda x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = (\alpha_{1n} + \alpha_{2n}x + \dots + \alpha_{kn}x^{k-1})e^{\lambda x} \end{cases}$$

Nói chung khi xác định α_{ij} ta được các số phức. Tách phần thực và phần ảo ta được nghiệm dưới dạng (ứng với mỗi j = 1, 2, ..., k)

$$\begin{cases} y_{1j} = u_{1j}(x) + iv_{1j}(x) \\ y_{2j} = u_{2j}(x) + iv_{2j}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{nj} = u_{nj}(x) + iv_{nj}(x) \end{cases}$$

và do đó được hai nghiệm thực

$$U_j = \begin{pmatrix} u_{1j}(x) \\ u_{2j}(x) \\ \vdots \\ u_{nj}(x) \end{pmatrix} ; \; V_j = \begin{pmatrix} v_{1j}(x) \\ v_{2j}(x) \\ \vdots \\ v_{nj}(x) \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, \dots, k$$

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

Bằng cách đưa về phương trình vi phân cấp cao giải các hệ phương trình vi phân sau :

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{y} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = \left(-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1\right)y + \left(\dfrac{2}{x} - 1\right)z \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dz}{dx} = \sin x - 3y \\ \dfrac{dy}{dx} = \cos x - z \end{cases}$

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp tổ hợp :

5. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}$

6. $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} - \dfrac{dz}{ly - mx}$

7. $\dfrac{dx}{x + y} = \dfrac{dy}{x - y} = \dfrac{zdz}{y^2 - 2xy - x^2}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z + e^y}{z + e^x} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x} \end{cases}$

9. $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cos y}$

Giải các phương trình tuyến tính với hệ số hằng sau :

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y - 3z \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x + 5y + 12z \\ \dfrac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 2y + 6z \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z - x^2 + x - 2 \\ \dfrac{dz}{dx} = -2y + 4z + 2x^2 - 4x - 7 \end{cases}$ $\quad y(0) = 0\ ,\ z(0) = 2$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t\ ; \end{cases}$ $\quad x(0) = 1\ ,\ y(0) = -2$

16. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z + 2e^x \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$

17. Tìm hệ nghiệm cơ bản và định thức Vronski của hệ phương trình

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)y_j\ ,\ i = 1, 2, ..., n$$

trong đó $a_j\ (x)$ là các hàm liên tục trên (a, b).

18. Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1} a_{ij}(t)x_j\ ;\ i = 1, 2, ..., n$$

trong đó $a_{ij}(t)$ liên tục trên $[0, \infty)$ và

$$\int_0^{\infty} |a_{ij}(t)|\,dt < \infty\ ,\ i, j = 1, 2, ..., n$$

Chứng minh rằng :

a) Mọi nghiệm của hệ trên giới nội trên $[0, \infty)$;

b) Mọi nghiệm đều có giới hạn khi $t \to \infty$ và các nghiệm khác nhau dần tới những giới hạn khác nhau.

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $y = \dfrac{1}{(C_1x + C_2)^2}$; $z = -\dfrac{1}{2C_1(C_1x + C_2)}$

2. $y = C_2 e^{C_1x}$; $z = C_1C_2 e^{C_1x}$

3. $y = C_1x + C_2x^2$; $z = C_1(1 - x) + C_2(2x - x^2)$

4. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$; $z = C_1e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos x$

5. $y = C_1$; $ze^{-\frac{x}{y}} = C_2$

6. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$; $lx + my + nz = C_2$

7. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$; $x^2 - 2xy - y^2 = C_2$

8. $ze^{-x} + y = C_1$; $ze^{-y} + x = C_2$

9. $\sin x - \sin y = C_1$; $\sin x - z = C_2$

10. $x = 5C_1\cos 2t + 5C_2\sin 2t$;

    $y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t.$

11. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$; $z = e^{-x}[2C_1 + C_2(2x - 1)]$

12. $x = C_1e^{-t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t$; $y = -2C_1e^{-t} + 3C_2e^t$;

    $z = 2C_1e^{-t} + (C_2t + C_3)e^t.$

13. $x = C_1 + C_3e^{-t}$; $y = 3C_1 - 3C_2 - 2C_3 e^{-t}$;

    $z = C_2 + 2C_3e^{-t}$

14. $y = x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; $z = x + 2 + C_2e^{2x} + 2C_2e^{3x}$

15. $x = -\ t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t$,

$y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t$;

$x = (1 - t)\cos t - \sin t,\ y = (t - 2)\cos t + t\sin t$

16. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$;

$z = (x + 1)e^x + C_1e^x + 3C_2e^{-x}$

Chương VII

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP MỘT TUYẾN TÍNH

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

Phương trình đạo hàm riêng cấp k đối với hàm phải tìm $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có dạng tổng quát sau :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}, \ldots\right) = 0$$

Cấp đạo hàm cao nhất có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương trình. Chẳng hạn phương trình

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

là phương trình đạo hàm riêng cấp một.

Giả sử hàm F xác định trong miền G của không gian 2n + 1 chiều.

Hàm $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của nó trong miền D của không gian n chiều được gọi là nghiệm của phương trình (1.1) trong D nếu :

a) với mọi $(x_1, \ldots, x_2) \in D$ thì

$$\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \in G.$$

b) Khi thay $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ vào (1.1) thì ta được đồng nhất thức trên D.

Bài toán Côsi. Tìm nghiệm $u = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của phương trình (1.1) sao cho khi $x_1 = x_1^0$ thì $u = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, trong đó φ là một hàm cho trước. Ta có thể thay vai trò x_1 bằng một trong các biến còn lại.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP MỘT TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính thuần nhất có dạng

$$X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad (2.1)$$

Ở đây các hàm $X_1, X_2, \ldots, X_n$ không phụ thuộc biến u, không đồng thời triệt tiêu tại bất cứ điểm nào của miền đang xét. Ngoài ra ta giả thiết trong miền đó các hàm $X_1, X_2, \ldots, X_n$ liên tục cùng với tất cả các đạo hàm riệng cấp một của chúng.

Trước hết ta nhận thấy rằng hàm $U \equiv C$ là nghiệm của phương trình (2.1). Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường hoặc là nghiệm hiển nhiên.

1. Sự liên hệ giữa phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính thuần nhất và hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng

Cùng với phương trình (2.1) ta xét hệ phương trình vi phân thường viết dưới dạng đối xứng sau :

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)} \qquad (2.2)$$

Hệ này được gọi là hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng với phương trình (2.1).

Do các giả thiết đã đưa ra ở trên đối với các hàm $X_1, X_2, \ldots, X_n$ hệ (2.2) thỏa mãn các điều kiện định lí tồn tại và duy nhất nghiệm.

Vì vậy ta có thể tìm được n – 1 tích phân đầu độc lập của hệ (2.2) :

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1$$

$$\psi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_2) = C_{n-1}$$

Trong không gian $(x_1, \ldots, x_n)$ hệ tích phân đầu này xác định một họ đường cong phụ thuộc n – 1 tham số gọi là đường đặc trưng của phương trình (2.1). Các kết quả sau đây xác định mối liên hệ giữa phương trình (2.1) và hệ (2.2).

Định lí. *Vế trái của tích phân đầu bất kì $\psi(x_1, \ldots, x_n) = C$ là nghiệm không tầm thường của phương trình* (2.1).

Chứng minh. Theo định nghĩa tích phân đầu $\psi \equiv C$ dọc theo đường cong tích phân của hệ (2.2) và do đó

$$d\psi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_j \equiv 0 \qquad (2.3)$$

Vì dọc theo mỗi đường cong tích phân của (2.2) ta có

$$dx_j = X_j \frac{dx_1}{X_1}, \; j = 2, \ldots, n$$

nên thay các biểu thức này vào (2. 3) ta được

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{X_n}{X_1} dx_1 \equiv 0$$

hay
$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0 \qquad (2.4)$$

Đồng nhất thức (2.4) đúng dọc theo mỗi đường cong tích phân của hệ (2.2). Vì tại mỗi điểm $(x_1, ..., x_n)$ của miền đang xét đều có một đường cong tích phân của hệ (2.2) đi qua nên đồng nhất thức (2.4) thỏa mãn với mọi $(x_1, ..., x_n)$ thuộc miền đang xét. Điều này chứng tỏ hàm $u = \psi(x_1, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ (2.2). Đây là điều ta cần chứng minh.

Định lí 2. *Giải thiết* $u = \psi(x_1, ..., x_n)$ *là nghiệm không tầm thường của phương trình (2.1). Khi đó hệ thức*

$$\psi(x_1, ..., x_n) = C$$

là một tích phân đầu của hệ (2.2).

Thật vậy theo giả thiết ta có

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0 \tag{2.5}$$

Ta lấy vi phân toàn phần hàm ψ dọc theo nghiệm của hệ (2.2) :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n =$$

$$= \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + ... + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right] dx_n =$$

$$= \left[X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right] \frac{dx_n}{X_n} \tag{2.6}$$

Do giả thiết đã nêu ở trên, ta có thể coi $X_n \neq 0$. Khi đó từ (2. 5), (2.6) ta suy ra $d\psi \equiv 0$ dọc theo nghiệm của hệ (2.2). Điều này chứng tỏ $\psi(x_1, ..., x_n) = C$ là tích phân đầu của hệ (2.2)

Ví dụ. Xét phương trình

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng là

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}$$

Dễ thấy hệ có hai tích phân đầu độc lập $xz = C_1$, $x\sqrt{y} = C_2$.

Do đó $u_1 = xz$, $u_2 = x\sqrt{y}$ là các nghiệm không tầm thường của phương trình đạo hàm riêng đang xét.

2. Lập nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất

Định lí 3. *Giả thiết* $\psi_1(x_1, ..., x_n) = C_1$, $\psi_2(x_1, ..., x_n) = C_2$, ..., $\psi_{n-1}(x_1, ..., x_n) = C_{n-1}$ *là các tích phân đầu độc lập của hệ* (2. 2). *Khi đó*

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}) \qquad (2.7)$$

với ϕ *là hàm bất kì có các đạo hàm riêng theo* $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ *liên tục, sẽ cho ta nghiệm tổng quát của phương trình* (2.1).

Chứng minh. Trước hết ta chứng tỏ rằng vế phải của (2.7) là nghiệm của (2.1).

Thật vậy, thay (2.7) vào (2.1) ta có

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + ... + X_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} \left[X_1 \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} \right] \equiv 0$$

vì theo định lí 1, ψ_j là nghiệm của (2.1).

Bây giờ ta chứng minh rằng biểu thức (2.7) chứa mọi nghiệm của (2.1), tức là nghiệm tổng quát của phương trình đó .

Thật vậy, giả sử $u = \psi(x_1, ..., x_n)$ là một nghiệm của phương trình (2.1). Ta chứng minh rằng có một hàm ϕ có các đạo hàm riêng liên tục sao cho $\psi = \Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1})$. Vì theo chứng minh trên Φ, $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ đều là nghiệm của phương trình (2.1) nên

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} \equiv 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

Ta xem (2.8) như là hệ n phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với $X_1, .., X_n$ và chú ý rằng hệ phương trình đó tại mỗi điểm $(x_1, ..., x_n)$ của miền đang xét có nghiệm không tầm thường (vì theo giả thiết $X_1, ..., X_n$ không đồng thời triệu tiêu) nên buộc định thức Crame của hệ phải bằng không, tức là

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Điều này chứng tỏ rằng các hàm $\psi, \psi_1, \dots \psi_{n-1}$ là phụ thuộc nhau, tức là tồn tại hệ thức

$$F(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = 0 \qquad (2.9)$$

Vì các tích phân đầu $\psi_1(x_1, ..., x_n) = C_1, ..., \psi_{n-1}(x_1, ..., x_n) = C_{n-1}$ độc lập nên có ít nhất một định thức cấp n − 1 dạng

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{n-1}})} \neq 0$$

Do đó từ (2.9) ta suy ra được

$$\psi = \Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1})$$

Đây là điều cần chứng minh.

Như vậy việc tìm nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) tương đương với việc tìm n − 1 tích phân đầu độc lập của hệ (2.2).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + ...+ x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

Hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng là

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ...= \frac{dx_n}{x_n}$$

Tích phân hệ này ta được n − 1 tích phân đầu độc lập :

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \frac{x_3}{x_1} = C_2, ... , \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}$$

Vậy $$u = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình trong đó Φ là hàm khả vi liên tục tùy ý của các tỉ số $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}$.

Như vậy u là hàm thuần nhất bậc không tùy ý, khả vi liên tục theo các biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Chẳng hạn $u = \frac{x_2}{x_1}, ...,$

$$u = \frac{x_n}{x_1} ; u = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + ...+ \frac{x_n}{x_1} ; u = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 ; u = \sin\frac{x_n}{x_1} , ...$$

Ví vụ 2. Xét phương trình

$$(z - y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Hệ phương trình vi phân đối xứng tương ứng có dạng

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

Tích phân hệ này ta được các tích phân đầu độc lập

$$\psi_1 = x + y + z, \quad \psi_2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Do đó biểu thức

$$u = \Phi(x + y + z\, ,\, x^2 + y^2 + z^2\,)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình đang xét. Ở đây Φ là hàm hai biến khả vi liên tục bất kì.

3. Bài toán Côsi. Tìm nghiệm $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu :

$$u = \varphi(x_1\, , x_2\, , \ldots, x_{n-1}) \text{ khi } x_n = x_n^o$$

Ở đây φ là hàm khả vi liên tục cho trước của các biến x_1, x_2, ..., x_{n-1} (tức là với một giá trị cố định của một trong các đối số thì nghiệm u trở thành hàm đã cho của các đối số còn lại).

Ý nghĩ hình học. Ta xét trường hợp hàm hai biến. Nếu kí hiệu hàm phải tìm là z, các biến là x,y thì phương trình (2.1) có dạng

$$X(x\, , y)\frac{\partial z}{\partial x} + Y(x\, , y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

và bài toán Côsi đang xét là : Tìm mặt cong $z = f(x\;, \;y)$ thỏa mãn phương trình trên và đi qua một đường cong cho trước $z = \varphi(y)$ ở trong mặt phẳng $x = x_o$. Ta gọi mặt cong $z = f(x, y)$ là mặt cong tích phân của phương trình đã cho.

Cách giải bài toán Côsi. Ở trên ta đã biết rằng nếu

$$\psi_1(x_1\, , \ldots, x_n)\, , \psi_2(x_1\, , \ldots, x_n)\, , \ldots, \psi_{n-1}\,(x_1\, , \ldots, x_n)$$

là các tích phân đầu độc lập của hệ phương trình vi phân thường (2.2) thì nghiệm tổng quát của (2.1) có dạng

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$$

Do đó bài toán tìm nghiệm $u = u\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của phương trình (2.1) thỏa mãn điều kiện

$$u\Big|_{x_n = x_n^o} = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{2.9}$$

đưa về việc xác định hàm Φ sao cho

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_n^o} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{2.10}$$

Ta kí hiệu

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{2.11}$$

Đẳng thức (2.10) bây giờ viết được dưới dạng

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{2.12}$$

Hệ (2.11) giải được đối với $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ít nhất trong một lân cận nào đó của điểm $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ mà ta giả thiết $X_n(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o) \neq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}$$

Nếu vai trò hàm Φ ta lấy hàm dạng

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = \varphi[\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})]$$

thì điều kiện (2.12) được thỏa mãn.

Thật vậy

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi[\omega_1(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_{n-1}) \ , \ ..., \ \omega_n(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_{n-1})]$$

$$= \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

Do đó hàm

$$u = \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, ..,\psi_{n-1})]$$

là nghiệm của bài toán Côsi phải giải

Ví dụ. Tìm nghiệm $z = z(x, y)$ của phương trình

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$z(0, y) = \varphi(y)$$

trong đó $\varphi(y)$ là hàm khả vi liên tục cho trước.

Trước hết ta lập hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

Tích phân đầu của hệ là $x^2 + y^2 = C$. Vậy

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\overline{\psi} = \psi(0, y) = y^2$$

Do đó

$$y = \sqrt{\overline{\psi}}$$

Nghiệm $z(x, y)$ phải tìm là

$$z = \varphi(\sqrt{\psi}) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP MỘT TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT

Đó là phương trình dạng

$$X_1(x_1, ...x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ X_n(x_1, ...,x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, ..., x_n, u) \qquad (3.1)$$

Khác với phương trình tuyến tính thuần nhất, ở đây các hệ số X_j có thể chứa u và vế phải có hàm R. Khi $R \equiv 0$ nhưng có một hàm X_j chứa u thì phương trình vẫn được gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Dưới đây ta luôn giả thiết rằng các hàm X_j, R khả vi liên tục và các hàm X_j không đồng thời triệt tiêu trong miền biến thiên đang xét của các biến $x_1, \dots, x_n, u$.

1. Lập nghiệm tổng quát. Ta tìm nghiệm của phương trình (3.1) dưới dạng ẩn :

$$V(x_1, \dots, x_n, u) = 0 \tag{3.2}$$

trong đó V có đạo hàm riêng liên tục theo tất cả các biến.

Ta giả thiết rằng $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ ít nhất trong một miền nào đấy của $x_1, \dots, x_n$, u và do đó trong miền ấy từ phương trình (3.2) có thể giải được $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Thay $u = u(x_1, \dots, x_n)$ vào (3.2) ta được đồng nhất thức theo $x_1, \dots, x_n$:

$$V(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$$

Đạo hàm đồng nhất thức này theo x_k ta có

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

Vì vậy

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}} \quad (k = 1, \dots, n)$$

Thay giá trị vừa tìm được của $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ vào phương trình (3. 1) và nhân với $\dfrac{\partial V}{\partial u}$ ta được

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{3.3}$$

Đây là phương trình tuyến tính thuần nhất đối với hàm phải tìm V. Lập hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng với (3.3) :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R} \tag{3.4}$$

Giả sử

$$\psi_o(x_1, \dots, x_n, u) = C_o$$

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n, u) = C_1$$

$$\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n, u) = C_{n-1}$$

là n tích phân đầu độc lập của hệ (3. 4). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.3) có dạng

$$V = \Phi\left[\psi_o(x_1, \dots, x_n, u), \psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u)\right] \tag{3.5}$$

Đặt vế phải của (3.5) bằng không ta được nghiệm $u(x_1, \dots, x_n)$ của phương trình (3.1) dưới dạng ẩn :

$$\Phi\left[\psi_o(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n, u)\right] = 0 \tag{3.6}$$

Ở đây Φ là hàm khả vi liên tục. Ta chứng minh rằng với các giả thiết đã nêu ở trên trong miền biến thiên D của các biến $x_1, \dots, x_n$, u mỗi nghiệm bất kì

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_n) \tag{3.7}$$

của phương trình (3.1) đều suy ra từ (3.6) với một hàm Φ xác định nào đó.

Thật vậy, giả sử điểm $(x_1^o, \dots, x_n^o, u_o)$ thỏa mãn (3.7) và thuộc miền D. Không làm mất tổng quát ta giả sử $X_n(x_1^o, \dots, x_n^o, u_o) \neq 0$. Khi đó tại lân cận điểm $(x_1^o, \dots, x_n^o, u_o)$ hệ phương trình (3.4) có n tích phân đầu độc lập :

$$\begin{aligned} &\psi_o(x_1, \dots, x_n, u) = C_o \\ &\psi_1(x_1, \dots, x_n, u) = C_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n, u) = C_{n-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ở đây các hàm ψ_j khả vi liên tục theo $x_1, \dots, x_n$, u trong lân cận đang xét. Thay biểu thức (3.7) vào các vế trái của (3.8) ta có

$$\psi_k(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv \psi_k(x_1, \dots, x_n)$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Lấy đạo hàm hệ thức sau cùng trong lân cận điểm $(x_1^o, \dots, x_n^o, u_o)$ ta được

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \qquad (*)$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1 \,;\, j = 1, \dots, n)$$

Nhưng vì $\psi_o, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ thỏa mãn phương trình (3.3) nên ta có (sau khi thay u bằng $\varphi(x_1, \dots, x_n)$) :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} +$$
$$+ R(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \psi_k}{\partial u} \equiv 0 \qquad (3.9)$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Mặt khác vì $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ là nghiệm của phương trình (3.1) nên

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\Big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\Big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - R\Big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\Big) \equiv 0$$

Nhân đồng nhất thức này với $\dfrac{\partial \psi_k}{\partial u}$ rồi cộng với (3.9) và chú ý đến (*) ta được

$$X_1\Big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\Big) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} + X_2\Big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\Big) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_2} +$$
$$+ \dots + X_n\Big(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)\Big) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \equiv 0 \qquad (3.10)$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Kí hiệu $P_i(x_1, ..., x_n) = X_i(x_1, ..., x_n, \varphi(x_1, ..., x_n))$, $i = 1, ..., n$. Đồng nhất thức (3.10) chứng tỏ các hàm $\psi_k(x_1, ..., x_n)$ là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng cấp một tuyến tính thuần nhất :

$$P_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + P_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

Theo định lí ở §2, các hàm $\psi_k(x_1, ..., x_n)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ là n tích phân đầu của hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{P_n(x_1, ..., x_n)}$$

Điều này chứng tỏ giữa $\psi_1(x_1, ..., x_n)$, $\psi_2(x_1, ..., x_n)$, ..., $\psi_n(x_1, ..., x_n)$ có sự phụ thuộc : tồn tại hàm Φ sao cho

$$\Phi(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n) = 0 \text{ hay}$$

$$\Phi\left[\psi_o(x_1, ..., x_n, \varphi), ..., \psi_{n-1}(x_1, ..., x_n, \varphi)\right] = 0$$

Đây là điều ta cần chứng minh.

Vì những lẽ trên, biểu thức (3. 6) được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) dưới dạng ẩn, nghĩa là nó xác định nghiệm tổng quát của phương trình (3.1).

Tóm lại, ta có qui tắc sau tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3.1). Lập phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất

$$X_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + ...+$$

$$+ X_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

Tìm n tích phân đầu độc lập của hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng với phương trình đạo hàm riêng vừa lập :

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u) &= C_1\\ \psi_2(x_1, \ldots, x_n, u) &= C_2\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u) &= C_n\end{aligned}$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) dưới dạng ẩn là

$$\Phi\left[\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \psi_2(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\right] = 0$$

trong đó Φ là hàm bất kì có các đạo hàm riêng theo $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ liên tục.

Ví dụ . Xét phương trình

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \qquad (m \neq 0)$$

Phương trình tuyến tính thuần nhất

$$x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + mu\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

có hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng tương ứng

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

Hệ này có n tích phân đầu độc lập là

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{x_2}{x_1} = C_1\\ \psi_2 &= \frac{x_3}{x_1} = C_2\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \psi_{n-1} &= \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}\\ \psi_n &= \frac{u}{x_1^m} = C_n\end{aligned}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng đang xét có dạng

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}\right) = 0$$

2. Nghiệm đặc biệt. Ta để ý rằng, khi đi đến phương trình (3.3) với giả thiết $u = u(x_1, ..., x_n)$ thì $V(x_1, ..., x_n, u)$ thỏa mãn phương trình (3.3) không cần phải đối với mọi $x_1, \dots, x_n$, u biến thiên độc lập mà chỉ cần $x_1, ..., x_n$ biến thiên độc lập còn $u = u(x_1, ..., x_n)$ xác định từ hệ thức $V(x_1, ..., x_n, u) = 0$. Tuy nhiên khi giải phương trình (3.3) thì ta lại xem V thỏa mãn phương trình đó với $x_1, ..., x_n$, u biến thiên độc lập. Vậy ta bỏ mất nghiệm của phương trình (3. 1) $u = u(x_1, ..., x_n)$ mà hàm $V(x_1, .., x_n, u)$ thỏa mãn phương trình (3.3) khi $x_1, \dots, x_n$ biến thiên độc lập còn $u = u(x_1, \dots, x_n)$ xác định từ hệ thức $V(x_1, ..., x_n, u) = 0$. Nghiệm này được gọi là nghiệm đặc biệt của phương trình (3.1). Người ta chứng minh được rằng nghiệm đặc biệt không nhiều lắm. Chúng không thể lập thành một họ phụ thuộc dù chỉ một tham số bất kì. Nếu $X_1, ..., X_n$ không đồng thời triệt tiêu trong miền đang xét và cùng với R có đạo hàm riêng liên tục trong một miền kín giới hạn nội D thì trong D không có nghiệm đặc biệt.

Ví dụ. Xét phương trình

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \qquad (3.11)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + 2\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad (3.12)$$

Dễ thấy hệ phương trình vi phân thường đối xứng tương ứng

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

có các tích phân đầu độc lập

$$z - 2y = C_1$$
$$y + 2\sqrt{z - x - y} = C_2$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng đang xét có dạng

$$\Phi\left(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}\right) = 0$$

Ngoài ra phương trình còn có nghiệm $z = x + y$ xác định được từ hệ thức $z - x - y = 0$. Hàm $V = z - x - y$ không thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất (3.12) khi x, y, z biến thiên độc lập nhưng thỏa mãn phương trình này khi x, y biến thiên độc lập còn $z = x + y$, tức là $z - x - y = 0$. Bởi vậy hàm $z = x + y$ là nghiệm đặc biệt của phương trình (3.11). Ta chú ý rằng hàm $X_1 = 1 + \sqrt{z - x - y}$ không có đạo hàm riêng liên tục theo z trong miền có phần chung với mặt phẳng $z = x + y$. Đấy là lý do tại sao lại có thể có nghiệm đặc biệt trong trường hợp này.

3. Bài toán Côsi. Ta xét bài toán Côsi sau đây đối với phương trình (3.1). Tìm nghiệm $u = u(x_1, ..., x_n)$ của phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u\Big|_{x_n = x_n^o} = \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) \tag{3.13}$$

với φ là hàm khả vi liên tục cho trước.

Cách giải. Giả sử ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (3.1) dưới dạng

$$\Phi\left[\psi_1(x_1, ..., x_n, u), \psi_2(x_1, ..., x_n, u), ..., \psi_n(x_1, ..., x_n, u)\right] = 0 \tag{3.14}$$

trong đó $\psi_1(x_1, ..., x_n, u), \psi_2(x_1, ..., x_n, u), ..., \psi_n(x_1, ..., x_n, u)$ là các tích phân đầu độc lập của hệ (3.4).

Cũng như đối với phương trình đạo riêng tuyến tính thuần nhất, ta tìm cách xác định hàm Φ sao cho hệ thức (3.14) cho ta nghiệm của bài toán Côsi. Ta viết (3.13) dưới dạng

$$u - \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) = 0 \text{ với } x_n = x_n^o \tag{3.15}$$

Kí hiệu $\overline{\psi}_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o, u)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Khi đó từ (3.14), (3.15) suy ra ta phải chọn hàm Φ sao cho

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \qquad (3.16)$$

Giải hệ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_n \end{cases}$$

đối với $x_1, \ldots, x_n$, u (điều này thực hiện được vì

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)} \neq 0$$

trong lân cận điểm $(x_1^o, \ldots, x_{n-1}^o, x_n^o, u_o)$ mà tại đó ta giả thiết $X_n \neq 0$):

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) \\ u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) \end{cases}$$

Bây giờ ta chọn hàm Φ ở (3.14) như sau :

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \omega(\psi_1, \ldots, \psi_n) - \varphi[\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_n)]$$

Khi đó hệ thức

$$\omega(\psi_1, \ldots, \psi_n) - \varphi\left[\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_n)\right] = 0$$

xác định nghiệm bài toán Côsi phải tìm. Thật vậy, cho $x_n = x_n^o$ và chú ý rằng khi đó ψ_i trở thành $\overline{\psi}_i$ ta được

$$\omega(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_n) - \varphi\left[\omega_1(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_n), ..., \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, ..., \overline{\psi}_n)\right] = 0$$

hay $\quad u - \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$ khi $x_n = x_n^o$

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu : $z = 2x$ khi $y = 0$.

Hệ phương trình vi phân đối xứng tương ứng

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

có hai tích phân đầu độc lập

$$\psi_1 = z - 2y,$$

$$\psi_2 = y + 2\sqrt{z - x - y}$$

Cho $y = 0$ suy ra

$$\overline{\psi}_1 = z$$

$$\overline{\psi}_2 = 2\sqrt{z - x}$$

Giải ra x, z ta được

$$x = \overline{\psi}_1 - \frac{\overline{\psi}_2^2}{4}$$

$$z = \overline{\psi}_1$$

Do đó nghiệm bài toán trên được xác định từ hệ thức

$$\psi_1 - 2\left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0 \text{ hay } 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$$

Thay biểu thức của ψ_1, ψ_2 vào ta có

$$2z - 4y - y^2 - 4y\sqrt{z - x - y} - 4z + 4x + 4y = 0$$

Giải ra đối với z ta được nghiệm phải tìm

$$z = 2x + \frac{3}{2}y^2 - 2y\sqrt{x - y + \frac{y^2}{2}}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG VII

Tích phân các phương trình sau đây và tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho nếu có :

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + yz\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$; $u = x^y$ khi $z = 1$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

3. $(mz - my)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (nx - lz)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (ly - mx)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

4. $(1 + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z^2 = y^2$ khi $x = 0$.

5. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = \ln z - \dfrac{1}{y}$ khi $x = 1$.

6. $(x^3 + 3xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Tích phân các phương trình không thuần nhất :

7. $(y + z + u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (z + u + x)\dfrac{\partial u}{\partial y} +$

$+ (u + x + y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$

8. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + c\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyz$ (b, c là hằng số).

9. $(y^2x - 2x^4)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$

10. Giải bài toán Côsi $z = \sqrt{y}$ khi $x = 1$ đối với phương trình

$$(zx + z^2)\frac{\partial z}{\partial x} - (y^2 + yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $u = F\left(y, \dfrac{x^y}{z}\right)$, $u = \dfrac{x^y}{z}$.

2. $u = F[e^{-2x}(y + z), (3y + 2z)e^{-x}]$.

3. $u = F(lx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2)$.

4. $z = F\left(\dfrac{y^2}{1 + x^2}\right)$; $z = \dfrac{y^2}{1 + x^2}$.

5. $u = F\left(y, \ln z - \dfrac{x}{y}\right)$; $u = \ln z - \dfrac{x}{y}$.

6. $u = F\left(\dfrac{z}{y}, y + \dfrac{y^3}{x^2}\right)$.

7. $\Phi[(x - u)\sqrt[3]{S}, (y - u)\sqrt[3]{S}; (z - u)\sqrt[3]{S}] = 0$

với $S = z + y + z + u$.

8. $u = \dfrac{1}{2}x^2yz - \dfrac{1}{6}x^3(bz + cy)$

$$= \frac{1}{12}bcx^4 + \varphi(y - bx, z - cx).$$

9. $z = \dfrac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}\right)$.

10. $z = \sqrt{xy}$.

Phần hai

SƠ LƯỢC VỀ LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH

Lý thuyết ổn định là một bộ phận quan trong của lí thuyết định tính phương trình vi phân. Nó được ứng dụng ngày càng nhiều ở nhiều lĩnh vực khác nhau, nhất là trong kinh tế và khoa học kĩ thuật, trong sinh thái học và môi trường học. Với lí do đó nó đang được phát triển mạnh theo cả hai hướng ứng dụng và lí thuyết, nhất là lí thuyết ổn định trong không gian Banach. Những kết quả và thành tựu đạt được trong lĩnh vực này là rất nhiều và sâu sắc, song trong khuôn khổ của một phần của một giáo trình chúng tôi chỉ trình bày những nét cơ bản mang tính chất nhập môn và cũng chỉ giới hạn ở khái niệm ổn định theo nghĩa Liapunốp. Khác với phần một của giáo trình (chủ yếu nghiên cứu các phương pháp giải các loại phương trình hoặc các hệ phương trình vi phân) ở phần hai này chủ yếu xét đặc tính của các nghiệm đối với các hệ phương trình vi phân ở vô tận thông qua các dạng của vế phải mà không giải cụ thể các hệ đó. Trong phần hai chúng tôi trình bày những nguyên lí cơ bản của hai phương pháp : Phương pháp thứ nhất Liapunốp (Chương II) và phương pháp thứ hai Liapunốp (Chương III), còn chương I nêu lên những khái niệm cơ bản và những kết quả chủ yếu đối với các loại ổn định nghiệm của các hệ vi phân tuyến tính. Trừ một vài định lí do tính cồng kềnh và phức tạp nên chỉ nêu định lí để áp dụng, còn lại đều được chứng minh đầy đủ và chặt chẽ. Sau mỗi chương cũng như phần một, chúng tôi có đưa ra các bài tập kèm theo hướng dẫn và đáp số nhằm củng cố phần lí thuyết đã trình bày.

Chương I

SỰ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH

Xét hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{1.1}$$

trong đó t là biến độc lập (thời gian) ; $y_1, ..., y_n$ là các hàm cần tìm, f_j là các hàm xác định trong một bán trụ

$$T = I_t^+ \times D_y, \quad I_t^+ = \{t_o < t < +\infty\}$$

và D_y là một miền mở thuộc $\mathbf{R}^n$. Ở đây t_o là một số hoặc ký hiệu $-\infty$, sau này để tiện thường viết ∞ thay cho $+\infty$ (nếu không có gì nhầm lẫn).

Để ngắn gọn ta gọi hệ (1.1) là hệ *vi phân*.

Dưới dạng ma trận – vectơ ta có

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{1.2}$$

trong đó $$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \equiv \text{colon}(y_1, ..., y_n),$$

$$F(t, Y) = \text{colon}[f_1(t, Y), ..., f_n(t, Y)]$$

$$\frac{dY}{dt} = \text{colon}\left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, ..., \frac{dy_n}{dt}\right)$$

Để thỏa mãn định lí về tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như có thể kéo dài nghiệm về bên phải từ nay ta giả thiết rằng hàm vectơ $F(t, Y)$ trong miền T liên tục theo t và có các đạo hàm riêng cấp một theo các biến $y_1, \ldots, y_n$ liên tục.

Định nghĩa 1. Nghiệm $Z = Z(t)$ $(a < t < \infty)$ của hệ (1.2) được gọi là *ổn định theo Liapunốp* khi $t \to +\infty$ (hay ngắn gọn là *ổn định*), nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và $t_o \in (a, \infty)$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ sao cho :

1) Tất cả các nghiệm $Y = Y(t)$ của hệ (1.2) (bao gồm cả nghiệm $Z(t)$) thỏa mãn điều kiện

$$\|Y(t_o) - Z(t_o)\| < \delta \tag{1.3}$$

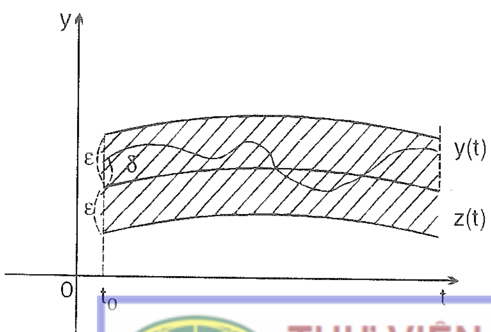
xác định trong khoảng $t_o < t < \infty$, tức là

$$Y(t) \in D_Y \text{ khi } t \in [t_o, \infty) ;$$

2) Đối với các nghiệm này bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\|Y(t) - Z(t)\| < \varepsilon \text{ khi } t_o \leqslant t < \infty \tag{1.4}$$

Nói cách khác, nghiệm $Z(t)$ ổn định, nếu các nghiệm $Y(t)$ khá gần với nó ở thời điểm ban đầu t_o bất kì sẽ hoàn toàn nằm trong ống ε nhỏ tùy ý được dựng quanh nghiệm $Z(t)$ (h. 17).



Hình 17

Từ các bất đẳng thức (1.3) và (1.4) về ý nghĩa ta luôn luôn có thể chọn $\delta \leqslant \varepsilon$.

Trường hợp đặc biệt, khi F $(t, 0) \equiv 0$ nghiệm tầm thường (còn gọi là *trạng thái cân bằng*) $Z(t) \equiv 0$ $(a < t < \infty)$ ổn định nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và $t_o \in (a, \infty)$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_o)$ sao cho bất đẳng thức

$$\|Y(t_o)\| < \delta$$

kéo theo bất đẳng thức

$$\|Y(t)\| < \varepsilon \text{ khi } t_o < t < \infty$$

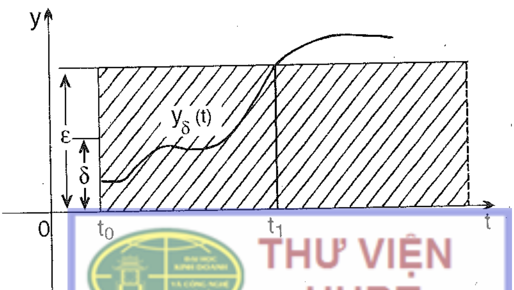
Định nghĩa 2. Nếu số $\delta > 0$ có thể chọn không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $t_o \in G$, tức là $\delta = \delta(\varepsilon)$ thì ổn định được gọi là *ổn định đều* trong miền G.

Định nghĩa 3. Nghiệm $Z = Z(t)$ $(a < t < \infty)$ được gọi là *không ổn định* theo Liapunốp, nếu với $\varepsilon > 0$, $t_o \in (a, \infty)$ nào đó và với mọi $\delta > 0$ tồn tại nghiệm $Y_\delta(t)$ (ít nhất là một) và thời điểm $t_1 = t_1(\delta) > t_o$ sao cho

$$\|Y_\delta(t_o) - Z(t_o)\| < \delta \text{ và } \|Y_\delta(t_1) - Z(t_o)\| \geqslant \varepsilon$$

Tương tự, nghiệm tầm thường $Z \equiv 0$ không ổn định (h. 18) nếu với $\varepsilon > 0$, $t_o \in (a, \infty)$ nào đó và mọi $\delta > 0$ tồn tại nghiệm $Y_\delta(t)$ và thời điểm $t_1 > t_o$ sao cho

$$\|Y_\delta(t_o)\| < \delta, \ \|Y_\delta(t)\| \geqslant \varepsilon$$



Hình 18

Định nghĩa 4. Nghiệm $Z = Z(t)$ $(a < t < \infty)$ được gọi là *ổn định tiệm cận khi* $t \to +\infty$, nếu :

1) Nó ổn định theo Liapunốp và

2) Với mọi $t_o \in (a, \infty)$ tồn tại $\Delta = \Delta(t_o) > 0$ sao cho mọi nghiệm $Y(t)$ $(t_o \leqslant t < \infty)$ thỏa mãn điều kiện $\|Y(t_o) - Z(t_o)\| < \Delta$ sẽ có tính chất

$$\lim_{t \to \infty} \|Y(t) - Z(t)\| = 0 \qquad (1.5)$$

Như vậy ổn định tiệm cận là "*ổn định có tải*", tức là ổn định kèm thêm điều kiện. Đặc biệt nghiệm tầm thường $Z(t) \equiv 0$ ổn định tiệm cận, nếu nó ổn định và

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = 0 \text{ khi } \|Y(t_o)\| < \Delta$$

Hình cầu $\|Y\| < \Delta(t_o)$ với t_o cố định là *miền hút* của trạng thái cân bằng 0.

Định nghĩa 5. Giả sử hệ (1.2) xác định trong nửa không gian $\Omega = \{t_o < t < \infty\} \times \{\|Y\| < \infty\}$. Nếu nghiệm $Z = Z(t)$ $(a < t < \infty)$ ổn định tiệm cận khi $t \to \infty$ và tất cả các nghiệm $Y = Y(t)$ $(t_o \leqslant t < \infty,\ t_o > a)$ đều có tính chất (1.5), tức là $\Delta = \infty$, thì $Z(t)$ được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục.

Nói cách khác, ở đây miền hút tại thời điểm ban đầu t_o bất kì là toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$ $(\Delta = \infty)$.

Cùng với hệ (1.2) ta xét hệ có nhiễu

$$\frac{d\widetilde{Y}}{dt} = F(t, \widetilde{Y}) + \Phi(t, \widetilde{Y}) \qquad (1.6)$$

trong đó $\Phi(t, \widetilde{Y})$ là một hàm vectơ trong miền T, liên tục theo t và có các đạo hàm riêng cấp một theo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ liên tục. Ta có

Định nghĩa 6. Nghiệm $Z = Z(t)$ $(a < t < \infty)$ của hệ (1.2) được gọi là *ổn định dưới tác động của nhiễu* $\Phi(t, \widetilde{Y})$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và $t_o \in (a, \infty)$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$ sao cho khi $\| \Phi(t, \tilde{Y}) \| < \delta$ tất cả các nghiệm $\tilde{Y}(t)$ của hệ (1.6) thỏa mãn điều kiện $\| \tilde{Y}(t_o) \| < \delta$ sẽ xác định trong khoảng $[t_o, \infty)$ và

$$\| \tilde{Y}(t) - Z(t) \| < \varepsilon \text{ với } t_o \leqslant t < \infty.$$

§2. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH

1. Các khái niệm cơ bản

Xét hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)y_k + f_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.1)$$

trong đó các hệ số $a_{jk}(t)$ và các số hạng tự do $f_j(t)$ liên tục trong khoảng (a, ∞), ở đây a có thể là một số hoặc $-\infty$.

Dưới dạng ma trận – vectơ hệ (2.1) có thể viết

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), \qquad (2.2)$$

trong đó ma trận $A(t)$ và vectơ $F(t)$ liên tục trong khoảng (a, ∞).

Giả sử $\quad X(t) = [x_{jk}(t)] \; (\mathrm{del}\, X(t) \neq 0) \qquad (2.3)$

là *ma trận nghiệm cơ bản* (tức là hệ nghiệm cơ bản được viết dưới dạng $(n \times n)$ – ma trận) của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\frac{d\tilde{Y}}{dt} = A(t)\tilde{Y} \qquad (2.4)$$

tức là ma trận gồm n nghiệm độc lập tuyến tính của (2.4) :

$$X^{(1)}(t) = \mathrm{colon}[x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)] \;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^{(n)}(t) = \mathrm{colon}[x_{1n}(t), \ldots, x_{nn}(t)].$$

Trong cách ghi $[x_{jk}(t)]$ chỉ số thứ nhất j là số thứ tự của tọa độ, còn chỉ số thứ hai k là số thứ tự của nghiệm, do đó trong ma trận nghiệm cơ bản các nghiệm được xếp thứ tự theo cột. Dễ dàng kiểm tra rằng ma trận X (t) thỏa mãn phương trình ma trận

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \tag{2.5}$$

trong đó ma trận $\dot{X}(t) = \left[\dfrac{dx_{jk}(t)}{dt}\right].$

Như đã biết ở chương V phần một, nếu X (t) là ma trận nghiệm cơ bản của hệ (2.4) thì mỗi nghiệm của nó có thể viết dưới dạng

$$\tilde{Y}(t) = X(t)C \tag{2.6}$$

trong đó $C = \text{colon}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ là ma trận cột hằng số nào đó. Giả sử nghiệm $\tilde{Y} = \tilde{Y}(t)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $\tilde{Y}(t_o) = \tilde{Y}_o$. Thay $t = t_o$ vào (2. 6) ta có

$$\tilde{Y}(t_o) = X(t_o)C\ ;$$

từ đó suy ra : $C = X^{-1}(t_o)\tilde{Y}(t_o)$. Như vậy

$$\tilde{Y}(t) = X(t)X^{-1}(t_o)\,\tilde{Y}(t_o)$$

Nếu đặt ma trận Côsi

$$K(t, t_o) = X(t)X^{-1}(t_o) \text{ thì ta có}$$

$$\tilde{Y}(t) = K(t, t_o)\tilde{Y}(t_o) \tag{2.7}$$

Đặc biệt, nếu ma trận nghiệm cơ bản X (t) là *chuẩn hóa khi* $t = t_o$, tức là $X(t_o) = E$, trong đó E là ma trận đơn vị, thì (2.7) có dạng

$$\tilde{Y}(t) = X(t_o)\,\tilde{Y}(t_o) \tag{2.8}$$

2. Các định nghĩa chính. Xét hệ vi phân tuyến tính (2.2) và hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4).

Định nghĩa 1. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là *ổn định* (hoặc *không ổn định*) nếu tất cả các nghiệm $Y = Y(t)$ của nó tương ứng ổn định (hoặc không ổn định) theo Liapunốp khi $t \to +\infty$.

Ta sẽ thấy rằng các nghiệm của hệ vi phân tuyến tính hoặc đồng thời cùng ổn định hoặc đồng thời cùng không ổn định. Đối với các hệ vi phân phi tuyến thì khác, một số nghiệm có thể ổn định còn một số nghiệm khác có thể lại không ổn định.

Định nghĩa 2. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là *ổn định đều* nếu tất cả các nghiệm $Y(t)$ của nó ổn định đều khi $t \to +\infty$ đối với thời điểm ban đầu $t_o \in (a, \infty)$.

Định nghĩa 3. Hệ vi phân tuyến tính (2.2) được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu tất cả các nghiệm của nó ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$.

3. Các định lí tổng quát về sự ổn định của các hệ vi phân tuyến tính

Định lí. *Điều cần và đủ để hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định với số hạng tự do bất kì* F(t) *là nghiệm tầm thường*

$$\tilde{Y}_o \equiv 0 \ (t_o < t < \infty,\ t_o \in (a, \infty))$$

của hệ thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định.

Chứng minh. 1) Điều kiện *cần*. Giả sử $Z = Z(t)$ $(t_o < t < \infty)$ là một nghiệm ổn định nào đó của hệ vi phân tuyến tính không thuần nhất (2.2). Điều đó có nghĩa là với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với nghiệm bất kì $Y = Y(t)$ của (2.2) khi $t_o < t < \infty$ ta có bất đẳng thức

$$\|Y(t) - Z(t)\| < \varepsilon \tag{2.9}$$

khi

$$\|Y(t_o) - Z(t_o)\| < \delta \tag{2.10}$$

Nhưng như đã biết

$$\tilde{Y}(t) = Y(t) - Z(t) \tag{2.11}$$

là một nghiệm của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (2.4) và ngược lại một nghiệm bất kì $\widetilde{Y}(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng (2.11). Như vậy các bất đẳng thức (2.9) và (2.10) tương đương với bất đẳng thức sau :

$$\|\widetilde{Y}(t)\| < \varepsilon \text{ khi } t_o \leqslant t < \infty, \text{ nếu } \|\widetilde{Y}(t)\| < \delta$$

Từ đó suy ra rằng nghiệm tầm thường $\widetilde{Y}_o \equiv 0$ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định theo Liapunốp khi $t \to \infty$.

2) Điều kiện *đủ*. Giả sử nghiệm tầm thường $\widetilde{Y}_o \equiv 0$ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (2.4) ổn định theo Liapunốp khi $t \to \infty$. Khi đó, nếu $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}(t)$ $(t_o \leqslant t < \infty)$ là một nghiệm bất kì của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất sao cho

$$\|\widetilde{Y}(t_o)\| < \delta(\varepsilon, t_o)$$

thì $\|\widetilde{Y}(t)\| < \varepsilon$ khi $t_o \leqslant t < \infty$. Như vậy, nếu $Z(t)$ là một nghiệm nào đó của hệ vi phân tuyến tính không thuần nhất (2.2) và $Y(t)$ là nghiệm bất kì của hệ đó thì từ bất đẳng thức $\|Y(t_o) - Z(t_o)\| < \delta$ suy ra bất đẳng thức

$$\|Y(t) - Z(t)\| < \varepsilon \text{ khi } t_o \leqslant t < \infty.$$

Điều đó có nghĩa là nghiệm $Z(t)$ ổn định khi $t \to \infty$.

Định lí được chứng minh xong.

Định lí 2. *Hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định đều khi và chỉ khi nghiệm tầm thường* $\widetilde{Y}_o \equiv 0$ *của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định đều khi* $t \to \infty$.

Chứng minh định lí này hoàn toàn tương tự như chứng minh định lí 1 trên đây.

Định lí 3. *Hệ vi phân tuyến tính (2.2) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi nghiệm tầm thường* $\widetilde{Y}_o \equiv 0$ *của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định tiệm cận khi* $t \to +\infty$.

Việc chứng minh định lí này được trực tiếp suy ra từ khẳng định rằng hiệu giữa hai nghiệm của hệ vi phân tuyến tính không thuần nhất là một nghiệm của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (đẳng thức (2.11)).

4. Các hệ quả. Trước hết, từ việc chứng minh điều kiện cần của định lí 1 ta có thể suy ra rằng tính ổn định của nghiệm tầm thường $\widetilde{Y}_o \equiv 0$ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (2.4) được suy ra từ tính ổn định của ít nhất một nghiệm của hệ (2.2) với số hạng tự do F(t) nào đó (có thể F (t) $\equiv$ 0 !).

Hệ quả 1. Hệ vi phân tuyến tính ổn định khi ít ra một nghiệm của nó ổn định và không ổn định nếu một nghiệm nào đó của nó không ổn định.

Hệ quả 2. Hệ vi phân tuyến tính ổn định khi và chỉ khi hệ vi phân thuần nhất tương ứng ổn định.

Hệ quả 3. Điều kiện cần và đủ để hệ vi phân tuyến tính (2.2) với số hạng tự do F(t) bất kì ổn định tiệm cận là hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (2.4) ổn định.

§3. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Xét hệ vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \tag{3.1}$$

trong đó A(t) liên tục trong khoảng (a, ∞). Định lí sau sẽ cho ta thấy rằng tính ổn định của hệ (3.1) tương đương với tính giới nội của tất cả các nghiệm của nó.

Định lí 1. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (3.1) *ổn định theo Liapunốp khi và chỉ khi mỗi nghiệm* $Y = Y(t)$ $(t_o \leqslant t < \infty)$ *của hệ đó bị chặn trên nửa trục* $t_o \leqslant t < \infty$.

Chứng minh. 1) Điều kiện *đủ*. Giả sử nghiệm bất kì của (3.1) là giới nội trên $[t_o, \infty) \subset (a, \infty)$. Xét ma trận nghiệm cơ bản chuẩn hóa

$$X(t) = [x_{jk}(t)]$$

trong đó $X(t_o) = E$. Vì ma trận $X(t)$ bao gồm các hàm giới nội $x_{jk}(t)$, nên nó giới nội, tức là

$$\|X(t)\| \leqslant M \text{ với } t_o \leqslant t < \infty,$$

trong đó M là một hằng số dương, nói chung phụ thuộc vào t_o.

Như đã biết (xem (2.8)) mỗi nghiệm $Y = Y(t)$ của hệ (3.1) đều có thể biểu diễn dưới dạng tích

$$Y(t) = X(t)Y(t_o)$$

Từ đó ta có

$$\|Y(t)\| \leqslant \|X(t)\| \; \|Y(t_o)\| \leqslant M\|Y(t_o)\| < \varepsilon$$

khi $$\|Y(t_o)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} = \delta$$

Như vậy nghiệm tầm thường $Y_o \equiv 0$ và do đó (theo định lí 1, §2) nghiệm bất kì của hệ (3.1) ổn định theo Liapunốp khi $t \to +\infty$. Như vậy hệ (3.1) là ổn định.

2) Điều kiện *cần* : Giả sử hệ (3.1) có một nghiệm không giới nội trên $[t_o, \infty)$ $Z(t)$, dĩ nhiên ở đây $Z(t_o) \neq 0$. Cố định hai số dương $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ và xét nghiệm

$$Y(t) = \frac{Z(t)}{\|Z(t_o)\|} \cdot \frac{\delta}{2}$$

Rõ ràng $\|Y(t_o)\| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$

và do tính không giới nội của $Z(t)$ đối với một thời điểm $t_1 > t_o$ nào đó ta có

$$\|Y(t_1)\| = \frac{\|Z(t_1)\|}{\|Z(t_o)\|} \cdot \frac{\delta}{2} > \varepsilon$$

Như vậy, nghiệm tầm thường $Y_o \equiv 0$ của hệ (3.1) không ổn định theo Liapunốp khi $t \to +\infty$ và do đó theo định lí 1, §2 hệ (3.1) cũng không ổn định.

Hệ quả. Nếu hệ vi phân tuyến tính không thuần nhất ổn định thì tất cả các nghiệm của nó hoặc giới nội hoặc không giới nội khi $t \to +\infty$.

Ví dụ. Phương trình

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t - y$$

có một nghiệm không giới nội $y_o = t$. Vì

$$y(t) = t + y(0)e^{-t}$$

nên nghiệm y_o hiển nhiên là ổn định, thậm chí còn ổn định tiệm cận.

Chú ý. Đối với hệ vi phân phi tuyến từ tính giới nội của các nghiệm của nó nói chung không suy ra tính ổn định của chúng.

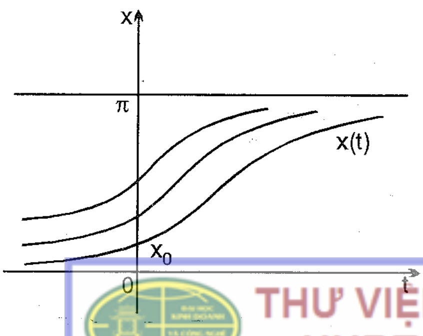
Ví dụ. Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x$$

Tích phân phương trình đó, ta có (h. 19)

$$x = \begin{cases} \text{arccotg}(\text{cotg}x_o - t) + k\pi, & \text{khi } x_o = x(0) \neq k\pi \\ k\pi, & \text{khi } x_o = k\pi \end{cases} \tag{3.2}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$



Hình 19

Rõ ràng tất cả các nghiệm (3.2) đều giới nội khi $t \to +\infty$. Nhưng nghiệm $x_o \equiv 0$ không ổn định khi $t \to +\infty$ bởi vì với $x_o \in (0, \pi)$ bất kì ta có

$$\lim_{x \to +\infty} x = \pi.$$

Định lí 2. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (3.1) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm $Y = Y(t)$ của nó dần tới không khi $t \to +\infty$, tức là*

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \qquad (3.3)$$

Chứng minh. 1) Giả sử hệ (3.1) ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$. Khi đó tất cả các nghiệm của nó, kể cả nghiệm tầm thường $Y_o \equiv 0$, ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$. Do đó đối với nghiệm $Z(t)$ bất kì của hệ (3.1) ta có

$$\lim_{t \to +\infty} Z(t) = 0 \qquad (3.4)$$

khi $\|Z(t_o)\| < \Delta$ trong đó $t_o \in (a, \infty)$ tùy ý.

Ta hãy xét một nghiệm $Y(t)$ tùy ý, xác định với điều kiện ban đầu $Y(t_o) = Y_o \neq 0$. Ta hãy giả sử rằng

$$Y(t) = Z(t) \cdot \frac{\|Y(t_o)\|}{\frac{1}{2}\Delta}$$

trong đó $$Z(t) = \frac{Y(t)}{\|Y(t_o)\|} \cdot \frac{\Delta}{2}$$

Vì nghiệm $Z(t)$ rõ ràng thỏa mãn điều kiện

$$\|Z(t_o)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta$$

cho nên đối với nghiệm đó thỏa mãn (3.4). Do đó

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$$

Như vậy điều kiện cần đã được chứng minh.

2) Giả sử điều kiện (3.3) thỏa mãn. Khi đó với nghiệm $Y(t)$ bất kì ($t_o \leqslant t < \infty$) ta có

$$\|Y(t)\| < 1 \text{ khi } T < t < +\infty.$$

Vì trên đoạn hữu hạn $[t_o, T]$ hàm vectơ liên tục $Y(t)$ bị chặn, nên nghiệm $Y(t)$ bất kì giới nội trên $[t_o, \infty)$ và do đó theo định lí 1 hệ (3.1) ổn định, ngoài ra nghiệm tầm thường của nó ổn định tiệm cận. Từ đó, do định lí 3, §2, suy ra tính ổn định tiệm cận của hệ (3.1).

Hệ quả. Hệ vi phân tuyến tính ổn định tiệm cận sẽ ổn định toàn cục.

Chú ý. Đối với hệ vi phân phi tuyến điều kiện tất cả các nghiệm dần tới không nói chung không phải là điều kiện đủ để cho nghiệm tầm thường của nó ổn định tiệm cận.

Ví dụ.

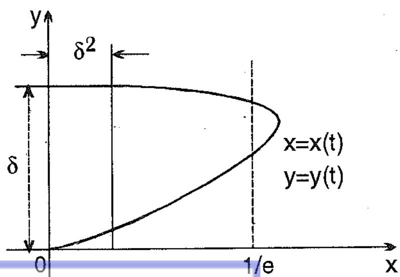
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - t^2xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{t} \end{cases}$$

có nghiệm tầm thường $x = 0$, $y = 0$. Tích phân hệ phương trình này ta được

$$\begin{cases} x = C_1te^{-C_2^2t} \\ y = \dfrac{C_2}{t} \end{cases}$$

hoặc nếu đặt $t_o = 1$ ta có

$$\begin{cases} x(t) = x(1)te^{-y^2(1)(t-1)} \\ y(t) = \dfrac{y(1)}{t} \end{cases}$$



Rõ ràng $x(t) \to 0$ và $y(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$. Nhưng với mọi $\delta > 0$ khi $x(1) = \delta^2$ và $y(1) = \delta$ ta có

$$x\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) > e^{-1}$$

Hình 20

Như vậy nghiệm $x = 0$, $y = 0$ không ổn định cho nên lại càng không ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$ (h. 20).

§4. ỔN ĐỊNH CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH VỚI MA TRẬN HẰNG

Xét hệ

$$\frac{dY}{dt} = AY \tag{4.1}$$

trong đó $A = [a_{jk}]$ là ma trận hằng $(n \times n)$.

Định lí 1. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (4.1) với ma trận hằng A ổn định khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng $\lambda_j = \lambda_j(A)$ của A đều có phần thực không dương*

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

và các nghiệm đặc trưng có các phần thực bằng không đều có ước cơ bản đơn.

Chứng minh. Vì để chứng minh điều kiện cần phải có một số kiến thức phụ về lí thuyết ma trận cho nên ta chỉ chứng minh điều kiện đủ của định lí. Giả sử $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, p$; $i = \sqrt{-1})$ là tất cả các nghiệm đặc trưng của ma trận A với các phần thực α_j âm và $\lambda_k = i\gamma_k$ $(k = 1, \ldots, q)$ là tất cả các nghiệm đặc trưng của A với phần thực bằng không. Khi đó (theo kết quả của chương V phần Một) nghiệm bất kì của hệ (4. 1) có dạng :

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j t}\left(\cos\beta_j t + i\sin\beta_j t\right).P_j(t) + \sum_{k=1}^{q}\left(\cos\gamma_k t + i\sin\gamma_k t\right)C_k, \tag{4.2}$$

trong đó $P_j(t)$ là hàm – vectơ đa thức nào đó có bậc nhỏ hơn số bội của λ_j và C_k là các vectơ – cột hằng số. Vì $\alpha_j < 0$, nên

$$e^{\alpha_j t}P_j(t) \to 0 \text{ khi } t \to +\infty$$

Ngoài ra

$$|\cos\gamma_k t + i\sin\gamma_k t| = 1$$

Vì vậy từ công thức (4.2) suy ra rằng mỗi nghiệm Y(t) bị chặn trên nửa trục $t_o \leqslant t < \infty$.

Như vậy, theo định lí 1, § 3 hệ (4.1) là ổn định.

Chú ý. Hệ thuần nhất tuyến tính với ma trận hằng A ổn định thì sẽ ổn định đều đối với thời điểm ban đầu $t_o \in (-\infty, +\infty)$.

Định lí 2. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (4.1) *với ma trận hằng A ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng* $\lambda_j = \lambda_j$ (A) *của A đều có các phần thực âm, tức là*

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Chứng minh. 1) Chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \leqslant n)$ là tất cả các nghiệm đặc trưng của A và $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Cũng theo kết quả của chương V phần Một ta có thể suy ra rằng mỗi nghiệm của hệ (4.1) có dạng

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} P_j(t),$$

trong đó $P_j(t)$ là ma trận đa thức. Từ đó do $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ ta có

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$$

và do đó theo định lí 2, §3 hệ (4.1) ổn định tiệm cận.

2) Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử hệ (4. 1) ổn định tiệm cận. Khi đó hệ này sẽ ổn định theo Liapunốp khi $t \to \infty$ và do đó theo định lí 1 ta có

$$\mathrm{Re}\lambda_j \leqslant 0 \; (j = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

Giả sử tồn tại ít nhất một nghiệm đặc trưng $\lambda_s = i\mu_s$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$ sao cho

$$\mathrm{Re}\lambda_s = 0$$

Khi đó hệ (4.1) có nghiệm dạng

$$Z = e^{\lambda_s t}\,.\,C \equiv (\cos\mu_s t + i\sin\mu_s)\,.\,C,$$

trong đó C là vectơ –cột khác không. Vì vậy

$$\|Z\| = \|C\| \neq 0$$

có nghĩa là $Z \not\to 0$ khi $t \to \infty$, điều đó mâu thuẫn với tính ổn định tiệm cận của hệ (4.1). Do đó

$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ (j = 1, ..., m).$$

Định lí hoàn toàn được chứng minh .

§5. TIÊU CHUẨN HÚCVÍT

Theo định lí 2, §4, muốn chứng minh tính ổn định tiệm cận của hệ tuyến tính thuần nhất (4.1) ta chỉ cần khẳng định rằng tất cả các nghiệm λ_1 , λ_2, ..., λ_n của phương trình đặc trưng

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

có các phần thực âm. Sau đây ta sẽ chỉ ta các điều kiện cần và đủ để cho phương trình đại số với các hệ số thực có các nghiệm với các phần thực chỉ mang dấu âm.

1. Một số khái niệm cần thiết

Xét đa thức

$$f(z) = a_o + a_1 z + ... + a_n z^n \qquad (n \geq 1) \tag{5.1}$$

trong đó $z = x + iy$ là số phức và a_o , a_1 ... , a_n có thể là các hệ số thực hoặc phức.

Định nghĩa. Đa thức f(z) bậc $n \geq 1$ được gọi là *đa thức Húcvít* nếu tất cả các nghiệm (không điểm) z_1, z_2 ,..., z_n của nó đều có các phần thực âm

$$\mathrm{Re}\, z_j < 0 \ (j = 1, ..., n) \tag{5.2}$$

tức là tất cả các nghiệm z_j đều nằm ở nửa mặt phẳng phức bên trái. Sau đây chúng ta giả thiết rằng các hệ số $a_o, a_1, \ldots, a_n$ của đa thức (5.1) f(z) là thực và

$$a_o > 0,\ a_n \neq 0. \qquad (5.3)$$

Một đa thức như vậy rõ ràng không có nghiệm không và để ngắn gọn ta gọi đa thức đó là *đa thức chuẩn* bậc n ($n \geqslant 1$).

Bằng cách cân bằng các hệ số ở các lũy thừa cùng bậc của đối số z đối với hai đa thức bằng nhau khi phân tích (5.1) ra thừa số ta có thể dễ dàng chứng minh điều kiện cần sau đây đối với đa thức Húc - vít.

Định lí. *Nếu đa thức chuẩn là đa thức Húcvít thì tất cả các hệ số của nó đều dương.*

Chú ý. Dễ dàng chứng minh rằng đối với đa thức chuẩn bậc hai

$$f(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 \qquad (5.4)$$

điều kiện trong định lí cũng là điều kiện đủ, tức là nếu

$$a_o > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,$$

thì đa thức (5.4) sẽ là đa thức Húcvít.

Đối với đa thức chuẩn bậc lớn hơn hai từ tính dương của các hệ số của nó nói chung không thể suy ra đa thức đó là đa thức Húc - vít.

Ví dụ. Đa thức

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

có các hệ số là dương (30, 4, 1,1) song không phải là đa thức Húc - vít bởi vì các nghiệm của nó là $z_1 = -3$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = 1 - 3i$.

2. Tiêu chuẩn Húcvít

Ta xét đa thức chuẩn

$$f(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (5.5)$$

trong đó $a_o > 0,\ a_n \neq 0\ (n \geqslant 1).$

Lập $(n \times n)$ – ma trận Húc –vít

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{bmatrix} \qquad (5.6)$$

trong đó quy ước $a_s = 0$ với $s < 0$ và $s > n$.

Định lí Húcvít. *Điều kiện cần và đủ để đa thức chuẩn (5.5) là đa thức Húc vít là : tất cả các định thức chéo chính của ma trận Húc–vít của nó đều dương, tức là*

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0 \end{cases} \qquad (5.7)$$

Ta không chứng minh định lí này mà chỉ ứng dụng nó để nghiên cứu tính ổn định tiệm cận của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất với ma trận hằng hoặc phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Các điều kiện (5.7) còn gọi là điều kiện Húcvít.

3. Ứng dụng đối với hệ vi phân

Giả sử

$$\frac{dY}{dt} = AY \qquad (5.8)$$

là hệ tuyến tính thuần nhất với ma trận hằng thực $A = [a_{jk}]$ và

$$\det(\lambda E - A) = 0 \qquad (5.9)$$

là phương trình đặc trưng của ma trận A. Ở dạng khai triển ta có

$$\lambda^n - A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n A_n = 0,$$

trong đó

$$A_1 = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha} = \mathrm{Sp}A,$$

$$A_2 = \sum_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \det A$$

Điều kiện cần để hệ (5.8) ổn định tiệm cận là

$$-A_1 > 0, A_2 > 0, \ldots, (-1)^n A_n > 0$$

Đặc biệt :

$$\mathrm{Sp}A < 0, (-1)^n \det A > 0 \tag{5.10}$$

Nếu hệ (5.8) là bậc 2 ($n = 2$) thì điều kiện (5.10) cũng là điều kiện đủ để hệ đó ổn định tiệm cận.

Trong trường hợp tổng quát, điều cận cần và đủ để hệ (5.8) ổn định tiệm cận là thỏa mãn các điều kiện Húcvít :

$$\tilde{\Delta}_1 = -A_1 > 0,$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} -A_1 & 1 \\ -A_3 & A_2 \end{vmatrix} = -A_1A_2 + A_3 > 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{\Delta}_n = (-1)^n A_n \tilde{\Delta}_{n-1} > 0$$

Ở đây ta sử dụng một điều hiển nhiên như sau :

Nếu $f(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

là đa thức Húcvít chuẩn thì đa thức

$$g(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

cũng là đa thức Húcvít chuẩn và ngược lại. Vì vậy điều kiện Húc – vít đối với đa thức còn có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_o = a_n > 0 \\ \tilde{\Delta}_1 = a_{n-1} > 0 \\ \tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\Delta}_n = a_o \tilde{\Delta}_{n-1} > 0 \end{cases}$$

Ví dụ. Xác định miền ổn định tiệm cận của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + \alpha y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - y + \alpha z \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta y - z \end{cases} \qquad (5.11)$$

trong đó α và β các tham số thực.

Phương trình đặc trưng của hệ (5.11) có dạng

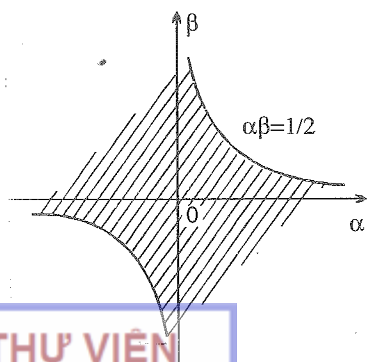
$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -\alpha & 0 \\ -\beta & \lambda+1 & -\alpha \\ 0 & -\beta & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

hoặc $(\lambda+1)\,[\lambda^2+2\lambda+(1-2\alpha\beta)]=0$

Từ đó hệ (5.11) ổn định tiệm cận nếu

$$1-2\alpha\beta > 0\,,\ \text{hoặc}\ \alpha\beta < \frac{1}{2}$$

(h. 21)



Hình 21

4. Ứng dụng đối với phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Dễ dàng thấy rằng nghiệm tầm thường của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hế số hằng

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (a_o, \dots, a_n \text{ là các hằng}) \tag{5.12}$$

ổn định tiệm cận khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$f(\lambda) = a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{5.13}$$

có các phần thực âm. Không mất tổng quát ta có thể coi $a_o > 0$. Theo trình bầy ở phần trên ta có điều kiện cần và đủ để các nghiệm của (5.13) có các phần thực âm là tất cả các định thức chéo chính của ma trận Húcvít

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

của nó đều dương.

Ma trận Húcvít của (5.13) được thiết lập như sau. Trên đường chéo chính là các hệ số của nó bắt đầu từ a_1 đến a_n. Các cột lần lượt chỉ gồm các hệ số với các chỉ số lẻ hoặc các chỉ số chẵn, trong các cột với các chỉ số chẵn có a_o. Tất cả các phần tử còn thiếu, tức là các hệ số với các chỉ số lớn hơn n hoặc nhỏ hơn 0 đều được thay bằng các số 0.

Như vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (5.12) ổn định tiệm cận là các định thức chéo chính của ma trận Húc vít của (5.13) tương ứng đều dương, tức là đối với (5.14)

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_b = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Lưu ý vì $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, cho nên có thể thay điều kiện $\Delta_n > 0$ bằng điều kiện $a_n > 0$.

Xét tính ổn định của nghiệm tầm thường đối với phương trình

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$$

Giải. Lập phương trình đặc trưng

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0$$

Ở đây $a_o = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$. Tính các định thức chéo chính của ma trận Húcvít :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot \Delta_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0 \ , \ \Delta_1 = 1 > 0$$

Như vậy $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Do đó nghiệm tầm thường $y \equiv 0$ và phương trình là ổn định tiệm cận.

§6. CÁC ĐIỂM KÌ DỊ ĐƠN GIẢN

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{6.1}$$

Điểm (x_o, y_o) mà tại đó $P(x_o, y_o) = 0$, $Q(x_o\ y_o) = 0$ được gọi là *điểm cân bằng của hệ (6.1)* hoặc *điểm kì dị*. Bây giờ ta hãy xét hệ vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng bắt đầu từ hệ 2 phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{6.2}$$

trong đó a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ là các hằng số và $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

Điểm (0, 0) là điểm cân bằng của hệ (6.2). Ta hãy nghiên cứu đặc tính của các quỹ đạo đối với hệ (6.2) ở lân cận điểm đó. Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$x = a_1e^{kt}\ ,\ y = a_2e^{kt} \tag{6.3}$$

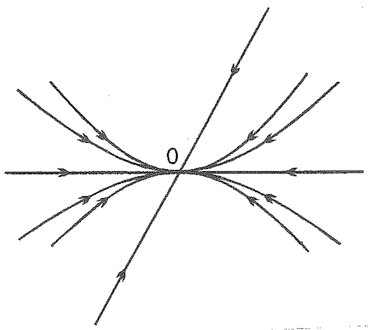
Để xác định k ta có phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{6.4}$$

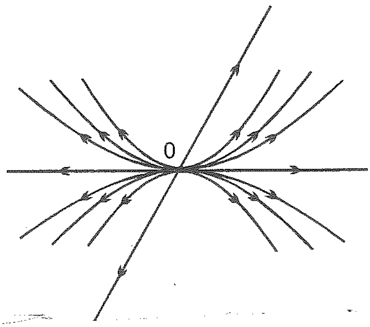
Ta sẽ xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra .

I. Các nghiệm của (6.4) là thực và khác nhau. Trong trường hợp này có thể xảy ra 3 trường hợp sau :

1) $k_1 < 0$; $k_2 < 0$. Điểm kì dị sẽ ổn định tiệm cận (*điểm nút ổn định*, hình 22).



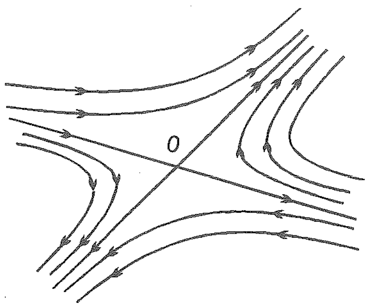
Hình 22



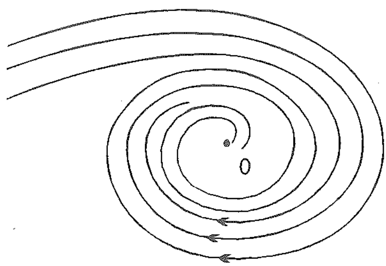
Hình 23

2) $k_1 > 0$; $k_2 > 0$. Điểm cân bằng sẽ không ổn định (*điểm nút không ổn định*, hình 23).

3) $k_1 > 0$; $k_2 < 0$. Điểm cân bằng không ổn định (*điểm yên ngựa*, hình 24).



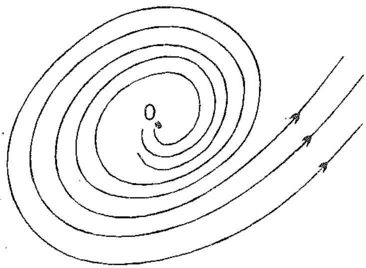
Hình 24



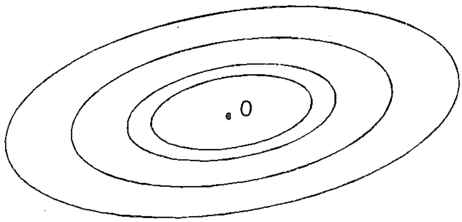
Hình 25

II. Các nghiệm của (6.4) là phức : $k_1 = p + qi$; $k_2 = p - qi$. Ở đây có 3 trường hợp sau :

1) $p < 0$, $q \neq 0$. Điểm cân bằng ổn định tiệm cận (*tiêu điểm ổn định*, hình 25).



Hình 26



Hình 27

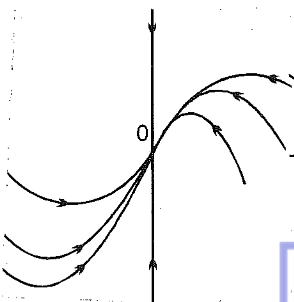
2) $p > 0$, $q \neq 0$. Điểm cân bằng không ổn định (*tiêu điểm không ổn định*, hình 26).

3) $p = 0$, $q \neq 0$. Điểm cân bằng là ổn định, nhưng không ổn định tiệm cận (*tâm điểm*, hình 27).

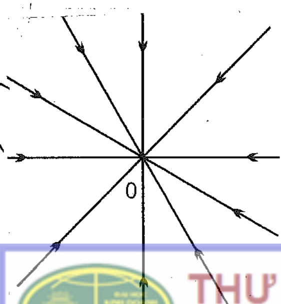
III. Phương trình (6.4) có nghiệm kép ($k_1 = k_2$). Ở đây có 2 trường hợp :

1) $k_1 = k_2 < 0$. Điểm cân bằng ổn định tiệm cận (*điểm nút (suy biến) ổn định*, hình 28 và 29).

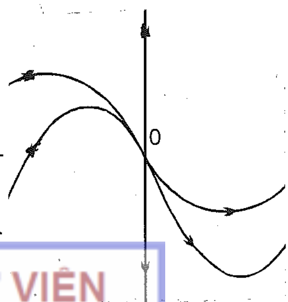
2) $k_1 = k_2 > 0$. Điểm cân bằng không ổn định (*điểm nút (suy biến) không ổn định*, hình 30).



Hình 28



Hình 29



Hình 30

Chú ý 1. Nếu cả hai nghiệm của phương trình đặc trưng (6.4) đều có phần thực âm thì điểm cân bằng ổn định tiệm cận. Còn nếu chỉ cần một nghiệm của (6.4) có phần thực dương thì điểm cân bằng sẽ không ổn định.

Chú ý 2. Những kết luận tương tự cũng đúng đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các hệ số hằng

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{6.5}$$

Ví dụ. Xác định đặc tính của điểm cân bằng (0, 0, 0) trong hệ sau :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 5y - 3z \end{cases}$$

Giải. Lập phương trình đặc trưng

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & +1 & +1 \\ -1 & \lambda - 1 & +3 \\ -1 & +5 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - 18\lambda + 12 = 0$$

$f(0) = 12 > 0$, $f(1) = -5 < 0$. Hàm $f(\lambda)$ liên tục trên [0, 1], nên có ít nhất một nghiệm thuộc (0,1). Như vậy phương trình đặc trưng có ít nhất một nghiệm với phần thực dương. Từ đó suy ra điểm cân bằng (hoặc nghiệm tầm thường) của hệ đã cho không ổn định.

Chú ý 3. Để ngắn gọn đôi khi ta có thể viết $\dot{x}$ $(\dot{y}, \dot{z}, ...)$ thay cho $\dfrac{dx}{dt}$ $\left(\dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, ...\right)$.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Viết điều kiện Húcvít đối với phương trình

$$z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0$$

2. Tìm miền ổn định tiệm cận đối với hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y + \beta z \\ \dot{y} = -\alpha x - y + \alpha z \\ \dot{z} = -\beta x - \alpha y - z \end{cases}$$

(α, β là những hằng số thực).

3. Chứng minh rằng hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y$$

ổn định đều trong miền $T < t_o < \infty$ khi và chỉ ma trận Côsi của nó

$K(t, t_o) = X(t)X^{-1}(t_o)$ bị chặn trong miền Z $\{t_o \leqslant t < \infty,$ $T < t_o < \infty\}$.

4. Nghiên cứu tính ổn định của nghiệm tầm thường đối với các phương trình sau :

1) $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

2) $y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

3) $y^{V} + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

5. Với những giá trị nào của α thì nghiệm tầm thường của các phương trình sau đây sẽ ổn định :

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0$.

2) $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$.

6. Với những giá trị nào của α và β thì nghiệm tầm thường của các phương trình sau sẽ ổn định :

1) $y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0$.

2) $y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0.$

3) $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0.$

7. Xét tính ổn định của điểm cân bằng (0,0) trong các hệ sau :

1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x + 3y \text{ ;} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2y - 3x \text{ ;} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x + y \text{ ;} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x - y \text{ ;} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = x - \dfrac{1}{2}y \\ \dot{y} = \dfrac{53}{2}x - y \end{cases}$

8. Xét tính ổn định của các điểm kì dị (0, 0, 0) trong các hệ sau :

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z \\ \dot{z} = -x - 2z \text{ ;} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 4z \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z \end{cases}$

9. Với những giá trị nào của α thì điểm kì dị (0, 0, 0) của hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y \\ \dot{y} = \alpha y - z \\ \dot{z} = \alpha z - x \end{cases}$$

sẽ ổn định ?

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

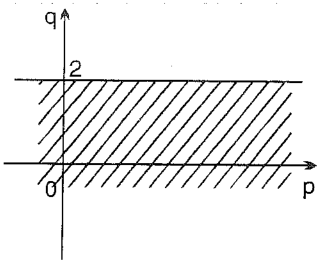
1. Lập ma trận Húc - vít

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ p & q & p & 1 \\ 0 & 1 & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó $\Delta_1 = p > 0$; $\Delta_2 = p(q - 1) > 0$,

$\Delta_3 = p^2(q - 2) > 0$, $a_4 = 1 > 0$.

Vì vậy điều kiện Húcvít sẽ là : $p > 0$, $q > 2$ (h.31).



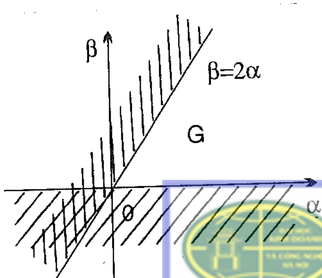
Hình 31

2. Với mọi α và β hệ đó đều ổn định tiệm cận.

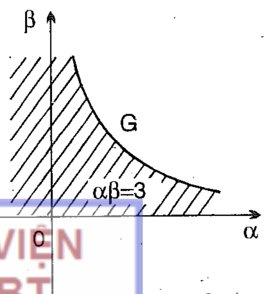
1) Ổn định ; 2) ổn định ; 3) không ổn định.

5. 1) Nghiệm không ổn định với mọi α ; 2) ổn định khi $\alpha > \dfrac{13}{6}$.

6. 1) Với mọi (α, β) trong miền $G\{(\alpha, \beta) : \alpha > 0 , 2\alpha > \beta\}$ (h. 32);



Hình 32



Hình 33

2) Với mọi (α, β) trong miền G : $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (h. 33) ;

3) Nghiệm không ổn định với mọi (α, β).

7. 1) Tiêu điểm không ổn định ; 2) Điểm yên ngựa ; 3) Điểm nút không ổn định ; 4) Điểm yên ngựa ; 5) Tâm điểm.

8. 1) Điểm (0, 0, 0) ổn định ; 2) Điểm (0, 0, 0) không ổn định.

9. $\alpha < -\dfrac{1}{2}$.

Chương II
PHƯƠNG PHÁP THỨ NHẤT LIAPUNỐP

Một trong những phương pháp quan trọng để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân là phương pháp số mũ đặc trưng Liapunốp (hay còn gọi là phương pháp thứ nhất Liapunốp). Phương pháp này hiện nay đang được nghiên cứu mạnh mẽ và có nhiều kết quả đáng kể, nhất là trong lí thuyết phương trình vi phân trong không gian Banach. Cơ sở của phương pháp này là khái niệm về số mũ đặc trưng. Trong chương này ta xét khái niệm cơ bản về số mũ đặc trưng và nêu lên một số kết quả chính, nhưng không đi sâu vào các chứng minh. Cuối chương ta nêu lên định lí và ứng dụng của nó về xấp xỉ thứ nhất.

§1. SỐ MŨ ĐẶC TRƯNG

1. Số mũ đặc trưng của hàm số. Giả sử $\varphi(t)$ là một hàm số thực xác định trong khoảng $t_0 < t < \infty$. Nếu với một dãy $t_k \to \infty$ nào đó $(k = 1, 2, \ldots)$ tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn) với dấu xác định

$$a = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k)$$

thì số a (hoặc $-\infty$, hoặc $+\infty$) được gọi là *giới hạn riêng* của hàm số $\varphi(t)$ khi $t \to \infty$.

Định nghĩa 1. Số α lớn nhất trong số các giới hạn riêng của hàm φ (t) khi $t \to \infty$ được gọi là *giới hạn trên* của hàm đó :

$$\alpha = \overline{\lim_{t \to \infty}} \varphi(t)$$

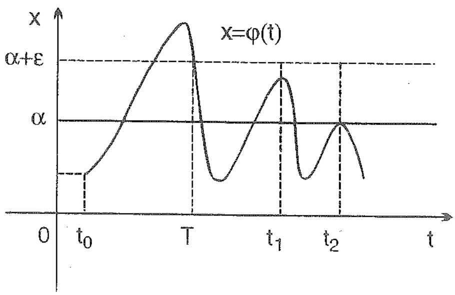
Một cách chính xác hơn :

a) Nếu với mọi số âm $-E$ có bất đẳng thức

$$\varphi(t) < -E \text{ khi } t > T(E)$$

thì chấp nhận

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \varphi(t) = -\infty \text{ ;}$$



Hình 34

b) Nếu (h. 34) với số α nào đó với mọi $\varepsilon > 0$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\varphi(t) < \alpha + \varepsilon \text{ khi } t > T(\varepsilon),$$

và tồn tại dãy $t_k \to \infty$ sao cho

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(t_k) = \alpha$$

thì chấp nhận

$$\varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) = \alpha \ ;$$

c) Cuối cùng, nếu hàm φ (t) không bị chặn trên trong khoảng (T, ∞) bất kì thì chấp nhận

$$\varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$$

Tương tự định nghĩa *giới hạn dưới* của hàm số $\varphi(t)$ khi $t \to +\infty$ là giá trị nhỏ nhất β trong số các giới hạn riêng khi $t \to \infty$ và kí hiệu

$$\beta = \varliminf_{t \to \infty} \varphi(t)$$

Cũng có thể đặt

$$\varliminf_{t \to \infty} \varphi(t) \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} [-\varphi(t)]$$

Hiển nhiên là

$$\varliminf_{t \to \infty} \varphi(t) \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t),$$

và dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t)$ (hữu hạn, hoặc vô hạn). Trong trường hợp này

$$\varliminf_{t \to \infty} \varphi(t) = \varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) = \lim_{t \to \infty} \varphi(t)$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh các kết luận sau :

1) Giới hạn trên có tính đồng biến, tức là nếu

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) \text{ thì}$$

$$\varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \psi(t) \ ;$$

2) Luôn có bất đẳng thức

$$\varlimsup_{t \to \infty} [\varphi(t) + \psi(t)] \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \varphi(t) + \varlimsup_{t \to \infty} \psi(t),$$

và dấu đẳng thức xẩy ra nếu tồn tại giới hạn hữu hạn khi $t \to \infty$ đối với ít nhất một trong hai hàm $\varphi(t)$ hoặc $\psi(t)$;

3) Nếu $\varphi(t) \geqslant 0$ và $\psi(t) \geqslant 0$ thì

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,[\varphi(t)\,.\,\psi(t)] \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\varphi(t)\,.\,\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\psi(t)$$

với giả thiết vế phải của bất đẳng thức *có nghĩa* ; ngoài ra nếu tồn tại $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)$ hoặc $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Ví dụ. Ta thấy ngay rằng

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\sin^2 t = \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\cos^2 t = 1$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\,\sin^2 t = \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\cos^2 t = 0$$

Ở đây ta thấy

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 1 < \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\cos^2 t + \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\sin^2 t = 2$$

Bây giờ ta hãy xét hàm số mũ $e^{\alpha t}$ trong đó α là một số thực. Thừa số α đặc trưng cho độ tăng của hàm $e^{\alpha t}$: Nếu $\alpha > 0$ thì rõ ràng $e^{\alpha t} \to \infty$ khi $t \to \infty$, còn nếu $\alpha < 0$ thì $e^{\alpha t} \to 0$ khi $t \to +\infty$. Số α được gọi là *số mũ đặc trưng* của hàm $e^{\alpha t}$.

Trong trường hợp tổng quát ta xét hàm số giá trị phức

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

đối với biến số thực t xác định trong khoảng (t_0, ∞). Môđun của hàm số này có thể biểu diễn dưới dạng mũ sau :

$$|f(t)| = e^{\alpha(t)\,.\,t},\ \text{trong đó}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{t}\ln|f(t)|$$

đóng vai trò thừa số của t. Khi nghiên cứu tính tăng giảm của $|f(t)|$ hiển nhiên phải xét các giá trị lớn nhất của hàm $\alpha(t)$.

Định nghĩa 2. Số (hoặc kí hiệu $-\infty$ hoặc $+\infty$) xác định bởi công thức

$$\chi[f] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|f(t)| \tag{1.1}$$

được gọi là *số mũ đặc trưng Liapunốp* (hoặc ngắn gọn hơn : *số mũ đặc trưng*).

Đó là phiếm hàm được xác định trên tập các hàm $\{f(t)\}$ được cho trên nửa trục (t_o, ∞). Đối với hàm số mũ $e^{\alpha t}$, hiển nhiên ta có $\chi[e^{\alpha t}] = \alpha$. Dễ dàng thấy rằng

a) $\chi[f(t)] = \chi[|f(t)|]$;

b) $\chi[c\,.\,f(t)] = \chi[f(t)]$ (trong đó hằng số $c \neq 0$).

Ví dụ. Áp dụng công thức (1.1) ta được

$\chi[t^m] = 0$ (m là hằng số bất kì) ;

$\chi[e^{t\,.\,\sin t}] = 1$;

$\chi[e^{t^2}] = +\infty$; v.v...

Từ công thức (1.1) có thể suy ra rằng số mũ đặc trưng có tính đơn điệu, tức là nếu $|f(t)| \leqslant |F(t)|$ với $t > T$ thì

$$\chi[f] \leqslant \chi[F]. \tag{1.2}$$

Cần lưu ý rằng đối với dãy bất kì $t_k \to \infty$ ta luôn luôn có

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t_k} \ln|f(t_k)| \leqslant \chi[f(t)].$$

Sau đây ta sẽ đưa ra (không chứng minh, coi như một bài tập dành cho bạn đọc) một bổ đề.

Bổ đề 1. Nếu $\chi[f] = \alpha \neq \pm\infty$ thì (1.3)

1) Với mọi $\varepsilon > 0$ có công thức

$$f(t) = o[e^{(\alpha+\varepsilon)t}], \text{ tức là}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0 \; ; \qquad (1.4)$$

2) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t}} = +\infty$, tức là tồn tại dãy $t_k \to \infty$ sao cho

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_k}} = +\infty \qquad (1.5)$$

Ngược lại, nếu đối với một số α nào đó mà với mọi $\varepsilon > 0$ đẳng thức (1.4) được thỏa mãn thì

$$\chi[f] \leqslant \alpha \; ;$$

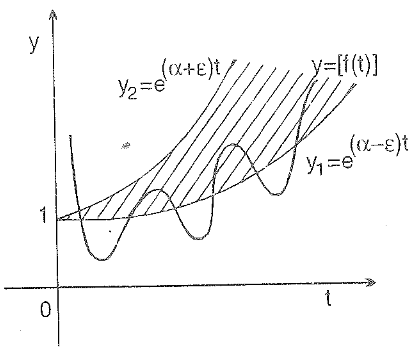
Còn nếu (1.5) thỏa mãn thì

$$\chi[f] \geqslant \alpha \; ;$$

Cuối cùng, nếu cả (1.4) và (1.5) được thỏa mãn thì

$$\chi[f] = \alpha.$$

Chú ý. Từ bổ đề trên, nếu $\chi[f] = \alpha$ thì khi $t \to \infty$ môđun của hàm số $y = |f(t)|$ sẽ tăng chậm hơn bất kì hàm mũ $y_2 = e^{(\alpha+\varepsilon)t}$ nào với $\varepsilon > 0$, và theo một dãy $t_k \to \infty$ nào đó sẽ tăng nhanh hơn hàm $y_1 = e^{(\alpha-\varepsilon)t}$ (h. 35).



Hình 35

Định lí 1. *Số mũ đặc trưng của một tổng hữu hạn các hàm $f_k(t)$ $(k = 1, ..., m)$ không vượt quá số lớn nhất trong số các số mũ đặc trưng của các hàm đó và trùng với số đó nếu chỉ có một số hạng có số mũ đặc trưng lớn nhất đó, tức là*

$$\chi\left[\sum_{k=1}^{m} f_k(t)\right] \leqslant \max_k \chi[f_k(t)] \tag{1.6}$$

và dấu bằng xảy ra nếu chỉ có một hàm trong số các $f_k(t)$ có số mũ đặc trưng lớn nhất.

Chứng minh. 1) Giả sử

$$\max_k \chi[f_k] = \alpha \neq \pm\infty$$

Từ bổ đề trên, với mọi $\varepsilon > 0$ ta đều có

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0 \ (k = 1, 2, ..., m).$$

Từ đó $$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{m} f_k(t)\right|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{|f_k(t)|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} = o(1) \text{ khi } t \to \infty$$

Do đó theo phần đảo của bổ đề 1 ta có

$$\chi\left[\sum_{k}^{m} f_k(t)\right] \leqslant \alpha = \max_k \chi[f_k(t)] \tag{1.7}$$

2) Giả sử

$$\max_k \chi[f_k(t)] = \chi[f_p(t)] = \alpha \text{ và}$$

$\chi[f_k(t)] = \alpha_k < \alpha$ với $k \neq p$. Giả sử dãy $t_q \to \infty$ thỏa mãn

$$\lim_{q\to\infty} \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} = +\infty$$

Với $\alpha_k \neq -\infty$ ta có

$$\frac{\left|\sum\limits_{k} f_k(t_q)\right|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} \geqslant \frac{|f_p(t_q)|}{e^{(\alpha-\varepsilon)t_q}} - \sum_{k\neq p} \frac{|f_k(t_q)|}{e^{(\alpha_k+\varepsilon)t_q}} \frac{1}{e^{(\alpha-\alpha_k-2\varepsilon)t_q}}$$

21-CSPTVP B

Từ đó, với $0 < \varepsilon < \min\limits_{k \neq p} \dfrac{\alpha - \alpha_k}{2}$, ta có

$$\lim_{q \to \infty} \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(t_q) \right|}{e^{(\alpha - \varepsilon)t_q}} = +\infty$$

Do đó $\chi\left[\sum\limits_{k} f_k(t)\right] \geqslant \alpha$.

Kết hợp với bất đẳng thức (1.7) ta có

$$\chi\left[\sum_{k} f_k(t)\right] = \alpha = \max \chi[[f_k(t)].$$

Chú ý. Bất đẳng thức (1.6) về hình thức vẫn đúng nếu tất cả hoặc một số $\alpha_k = +\infty$ hoặc $-\infty$.

Định lí 2. *Số mũ đặc trưng của một tích hữu hạn các hàm* $f_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., m)$ *không vượt quá tổng các số mũ đặc trưng của các hàm đó, tức là*

$$\chi\left[\prod_{k=1}^{m} f_k(t)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{m} \chi\left[f_k(t)\right] \tag{1.8}$$

Các bạn đọc hãy tự chứng minh định lí này. Lưu ý rằng công thức (1.8) trở thành vô định, nếu trong số các hàm f_k (t) có các hàm $f_p(t)$ và $f_q(t)$ sao cho $\chi[f_p(t)] = -\infty$ và $\chi[f_q(t)] = +\infty$.

Hệ quả. Theo định lí 1 và 2 ta có thể khẳng định rằng : số mũ đặc trưng của tổ hợp tuyến tính hữu hạn các hàm $f_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., m)$ với các hệ số bị chặn C_k (t) không vượt quá số lớn nhất trong số các số mũ đặc trưng của các hàm thành phần, tức là

$$\chi\left[\sum_{k=1}^{m} C_k(t) \cdot f_k(t)\right] \leqslant \max_{k} \chi[f_k(t)]$$

Định nghĩa 3. Số mũ đặc trưng của hàm f(t) ($t > t_o$) được gọi là *chặt*, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\chi[f] = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln|f(t)| \tag{1.9}$$

Trong trường hợp này hiển nhiên $f(t) \neq 0$ với $t > T$.

Ngoài ra ta thấy rằng, nếu f(t) có số mũ đặc trưng chặt thì

$$\chi\left[\frac{1}{f}\right] = -\chi[f] \text{ tức là}$$

$$\chi[f] + \chi\left[\frac{1}{f}\right] = 0 \tag{1.10}$$

Định lí 3. *Nếu hàm f(t) có số mũ đặc trưng chặt thì số mũ đặc trưng của tích hai hàm f(t) và g(t) đúng bằng tổng các số mũ đặc trưng của hai hàm đó, tức là*

$$\chi[f(t) \,.\, g(t)] = \chi[f(t)] + \chi[g(t)] \tag{1.11}$$

Chứng minh. Từ định lí 2 ta có

$$\chi[f \,.\, g] \leqslant \chi[f] + \chi[g] \tag{1.12}$$

Mặt khác, do (1.10) ta có

$$\chi[g] = \chi\left[fg \,.\, \frac{1}{f}\right] \leqslant \chi[fg] - \chi[f], \text{ tức là}$$

$$\chi[fg] \geqslant \chi[g] + \chi[f] \tag{1.13}$$

Từ (1.12) và (1.13) suy ra điều cần chứng minh (1.11).

Hệ quả. $\chi[e^{\alpha t} \,.\, y] = \alpha + \chi[y]$

Định nghĩa 4. Theo Liapunốp, *tích phân* của hàm f(t) ($t_o \leqslant t < \infty$) ta hiểu là

$$F(t) = \int_{t_o}^{t} f(t_1)dt_1, \text{ nếu } \chi[f] \geqslant 0, \text{ và} \tag{1.14}$$

$$F(t) = \int_t^{\infty} f(t_1)dt_1 \text{, nếu } \chi[f] < 0 \qquad (1.15)$$

Định lí 4 . *Số mũ đặc trưng của tích phân không vượt quá số mũ đặc trưng của hàm dưới dấu tích phân.*

Hệ quả. Nếu $\chi[\varphi] \leqslant \alpha, \chi[\psi] \leqslant \beta$ $(\alpha + \beta \geqslant 0)$, thì

$$\chi\left[\int_{t_o}^{t} \varphi(t_1)\,\psi(t_1)dt_1\right] \leqslant \alpha + \beta \qquad (1.16)$$

2. Số mũ đặc trưng của ma trận hàm

Định nghĩa 5. *Số mũ đặc trưng* của ma trận $F(t) = [f_{jk}(t)]$ xác định trên $[t_o, \infty)$ là số (hoặc kí hiệu $-\infty$ $(+\infty)$)

$$\chi[F(t)] = \max_{j,k} \chi[f_{jk}(t)] \qquad (1.17)$$

Bổ đề 2. Số mũ đặc trưng của ma trận F(t) trùng với số mũ đặc trưng của chuẩn của nó, tức là

$$\chi[F(t)] = \chi[\,\|F(t)\|\,].$$

Ở đây, chuẩn của ma trận A ta có thể hiểu một trong 3 chuẩn sau :

$$\|A\|_{I} = \max_{j} \sum_{k} |a_{jk}| \;;$$

$$\|A\|_{II} = \max_{k} \sum_{j} |a_{jk}| \;; \quad \|A\|_{III} = \left\{\sum_{j,k}^{m} |a_{jk}|^2\right\}^{1/2}$$

(chuẩn Ơclit).

Tương tự như đối với hàm số áp dụng bổ đề trên, ta dễ dàng chứng minh 2 định lí sau đây cùng với hệ quả của chúng.

Định lí 5. *Số mũ đặc trưng của một tổng hữu hạn các ma trận không vượt quá số lớn nhất trong số các số mũ đặc trưng của các ma trận thành phần, tức là*

$$\chi\left[\sum_{s=1}^{N} F_s(t)\right] \leqslant \max_{s} \chi[F_s(t)] \qquad (1.8)$$

Định lí 6. *Số mũ đặc của một tích hữu hạn các ma trận không vượt quá tổng các số mũ đặc trưng của các ma trận thành phần, tức là*

$$\chi\Big[\prod_{s=1}^{N} F_s(t)\Big] \leqslant \sum_{s}^{N} [F_s(t)].$$

Hệ quả. Số mũ đặc trưng của tổ hợp tuyến tính một số ma trận

$$\sum_s C_s F_s(t) \qquad (C_s \neq 0)$$

không vượt quá số mũ đặc trưng lớn nhất trong số các số mũ của các ma trận đó và trùng với số đó nếu chỉ có một ma trận có số mũ đặc trưng lớn nhất đó.

§2. PHỔ CỦA HỆ VI PHÂN TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

1. Bổ đề Grâunulơ – Benman. Để sử dụng sau này, ta đưa ra đây (không chứng minh, có thể coi như bài tập dành cho các bạn đọc) một bổ đề được gọi là bổ đề Grâunulơ – Benman tổng quát.

Bổ đề. Giả sử hàm liên tục dương u(t) với mọi giá trị t, $\tau \in (a, b)$ thỏa mãn bất đẳng thức tích phân

$$u(t) \leqslant u(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(t_1)u(t_1)|dt_1| \qquad (2.1)$$

trong đó $f(t) \in C(a, b)$ và $f(t) \geqslant 0$ với $a < t < b$. Khi đó với $a < t_o \leqslant t < b$ đánh giá hai chiều sau đây được thỏa mãn :

$$u(t_o)e^{-\int_{t_o}^{t} f(t_1)\,dt_1} \leqslant u(t) \leqslant u(t_o)e^{\int_{t_o}^{t} f(t_1)\,dt_1} \qquad (2.2)$$

2. Định lí Liapunốp. Giả sử

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \qquad (2.3)$$

là hệ vi phân tuyến tính, trong đó $A(t) \in C(a, \infty)$.

Sau đây ta sẽ chứng minh định lí Liapunốp về các số mũ đặc trưng của các nghiệm của một hệ vi phân tuyến tính.

Định lí 1. *Nếu ma trận của hệ tuyến tính (2.3) bị chặn, tức là*

$$\|A(t)\| \leqslant C < \infty \tag{2.4}$$

thì nghiệm không tầm thường bất kì $Y = Y(t)$ $(a < t_o \leqslant t < \infty)$ *của nó đều có số mũ đặc trưng hữu hạn.*

Chứng minh. Giả sử t_o, $t \in (a, \infty)$. Từ (2.3) ta có

$$Y(t) = Y(t_o) + \int_{t_o}^{t} A(t_1)Y(t_1)dt_1,$$

từ đó $$\|Y(t)\| \leqslant \|Y(t_o)\| + \int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\|\,\|Y(t_1)\|\,|dt_1|$$

Áp dụng bổ đề trên, với $t \geqslant t_o$ ta có

$$\|Y(t_o)\| e^{-\int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1} \leqslant \|Y(t)\| \leqslant \|Y(t_o)\| e^{\int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1}$$

Bởi vì

$$\chi\left[\frac{\|Y(t)\|}{\|Y(t_o)\|}\right] = \chi[Y(t)],$$

nên ta có

$$\chi\left[e^{-\int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1}\right] \leqslant \chi[Y(t)] = \chi\left[e^{\int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1}\right], \text{ tức là}$$

$$-\underline{A} \leqslant \chi[Y(t)] \leqslant \overline{A}, \tag{2.4}$$

trong đó $$\underline{A} = \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1 \text{ và}$$

$$\overline{A} = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t} \|A(t_1)\| dt_1$$

Như vậy tất cả các nghiệm không tầm thường $Y(t)$ của hệ tuyến tính (2.3) có các số mũ đặc trưng bị chứa trong một đoạn hữu hạn $[-\underline{A}, \overline{A}] \subset [-C, C]$.

Định lí hoàn toàn được chứng minh.

Định nghĩa 1. Tập hợp tất cả các số mũ đặc trưng riêng (tức là khác $-\infty$ và $+\infty$) của các nghiệm của một hệ vi phân được gọi là *phổ* của hệ đó.

Định lí 2. *Phổ của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất với ma trận liên tục và bị chặn bao gồm một số hữu hạn các phần tử*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \ (m \leqslant n).$$

Chứng minh định lí này có thể suy ra từ hai kết luật hiển nhiên sau đây :

1) Các hàm- vectơ $Y^{(k)}(t)$ $(k = 1, \dots, m)$ xác định trên $[t_o, \infty)$ và có các số mũ đặc trưng khác nhau sẽ độc lập tuyến tính với nhau và

2) Hệ vi phân tuyến tính bậc n có nhiều nhất là n nghiệm độc lập tuyến tính.

Chú ý 1. Các số mũ đặc trưng α_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ của các nghiệm không tầm thường của một hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

với ma trận hằng là các phần thực của các nghiệm đặc trưng của ma trận A, tức là $\alpha_j = \mathrm{Re}\lambda_j(A)$ $(j = 1, \dots, m)$ trong đó $\lambda_j = \lambda_j(A)$ là các nghiệm của phương trình $\det(A - \lambda E) = 0$ với các phần thực khác nhau.

Chú ý 2. Hệ vi phân phi tuyến có thể có phổ với tính chất rất tùy ý, chẳng hạn như có thể chứa vô số phần tử.

Ví dụ. Phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}\ln x \quad (t > 0,\ x < 0)$$

có nghiệm tổng quát $x = e^{ct}$ và do đó phương trình đó có phổ đặc kín $-\infty < \alpha < \infty$.

3. Hệ cơ bản chuẩn tắc. Giả sử trong không gian n chiều $\mathbf{R}^n$ cho hệ thuần nhất (2.3), trong đó $A(t) \in C(t_o, \infty)$ $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ và $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < +\infty$ $(m \leqslant n)$ là phổ của nó được xếp theo thứ tự tăng dần. Như đã biết, tập hợp tất cả các nghiệm của hệ đó lập thành một không gian tuyến tính n chiều (*không gian nghiệm*). Giả sử hệ cơ bản

$$\hat{X}(t) = \left\{Y^{(1)}(t), Y^{(2)}(t), \ldots, Y^{(n)}(t)\right\}$$

gồm $\hat{n}_s$ nghiệm với số mũ đặc trưng α_s $(s = 1, \ldots, m)$, một số số $\hat{n}_s$ có thể bằng không. Số

$$\sigma_{\hat{X}} = \sum_{s=1}^{m} \hat{n}_s \alpha_s \qquad (2.5)$$

trong đó $\sum_{s=1}^{m} \hat{n}_s = n$, được gọi là *tổng* các số mũ đặc trưng của hệ $\hat{X}(t)$.

Vì số các số mũ đặc trưng của hệ vi phân tuyến tính là hữu hạn nên tồn tại những hệ cơ bản X (t) với tổng (2.5) là nhỏ nhất, tức là

$$\sigma_{\hat{X}} = \min_{\hat{X}} \sigma_{\hat{X}} \qquad (2.6)$$

Định nghĩa 2. Hệ cơ bản được gọi là *chuẩn tắc* nếu tổng các số mũ đặc trưng của nó là nhỏ nhất so với các hệ cơ bản khác.

Người ta đã chứng minh được hai kết quả sau :

1) Trong tất cả các hệ cơ bản chuẩn tắc X(t) số $\hat{n}_s$ các nghiệm với số mũ đặc trưng α_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ đều như nhau ;

2) Mọi hệ cơ bản chuẩn tắc có toàn bộ phổ của hệ vi phân tuyến tính.

Liapunốp đã có một định lí về xây dựng hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc đối với hệ (2.3) với A (t) giới nội, thông qua một hệ cơ bản của nó.

4. Điều kiện đủ để ổn định tiệm cận đối với hệ vi phân tuyến tính. Giả sử ta có hệ (2.3), trong đó $A(t) \in C(a, \infty)$, $\sup_t \| A(t) \| < \infty$ và $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ là phổ của nó ($m \leq n$). Ta có

Định lí 3. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (2.3) ổn định tiệm cận khi số mũ đặc trưng lớn nhất của nó là âm, tức là khi*

$$\alpha = \max_k \alpha_k < 0 \tag{2.7}$$

Chứng minh. Giả sử $Y(t) \neq 0$ là một nghiệm bất kì của (2.3). Chọn $\varepsilon > 0$ khá bé sao cho ta có bất đẳng thức

$$\alpha + \varepsilon < 0.$$

Vì $\chi[Y(t)] < \alpha + \varepsilon$ nên ta có $\dfrac{\| Y(t) \|}{e^{(\alpha+\varepsilon)t}} \to 0$ khi $t \to \infty$, tức là

$$Y(t) = o\left(e^{(\alpha+\varepsilon)t}\right) \text{ khi } t \to \infty.$$

và do đó $Y(t) \to 0$ khi $t \to \infty$. Từ đó suy ra rằng hệ (2.3) (tức là tất cả các nghiệm của nó) ổn định tiệm cận khi $t \to \infty$.

§3. CÁC HỆ KHẢ QUY VÀ CHÍNH QUY

1. Bổ túc về hàm ma trận. Giả sử X là một ma trận vuông. Khi đó áp dụng các phép tính về ma trận ta có các đa thức ma trận

$P(X) = A_o + A_1 X + ... + A_p X^p$ (*đa thức phải*) và

$Q(X) = B_o + B_1 X + ..., + B_q X^q$ (*đa thức trái*),

trong đó A_o, A_1, ..., A_p và B_o, B_1, ..., B_q là các ma trận hằng sao cho các phép tính trên thực hiện được.

Nếu Q (X) là ma trận không suy biến thì có thể định nghĩa các *hàm ma trận hữu tỉ*

$$R_1(X) = P(X)[Q(X)]^{-1} \text{ (thương phải) và}$$

$$R_2(X) = [Q(X)]^{-1}P(X) \text{ (thương trái)}$$

Ta cũng có khái niệm *giới hạn* của một dãy các ma trận là ma trận

$$C = \lim_{p\to\infty} C_p \equiv \lim_{p\to\infty} (C^p_{jk})$$

Từ đó ta cũng có khái niệm : *Chuỗi ma trận*, tính hội tụ, hội tụ đều, hội tụ tuyệt đối (chuỗi các chuẩn tương ứng của các ma trận hội tụ), ... Ta xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p \tag{3.1}$$

trong đó X là $(n \times n)$ ma trận và để đơn giản ta coi a_p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ là các số (có thể là phức). Bên cạnh đó ta xét chuỗi lũy thừa một biến x tương ứng :

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p \tag{3.2}$$

có bán kính hội tụ là R

Định lí 1. *Chuỗi ma trận* (3.1) *hội tụ tuyệt đối đối với mỗi ma trận X thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\|X\| < R \tag{3.3}$$

Từ định lí này ta có kết luận rằng, nếu chuỗi (3.2) hội tụ với mọi x (tức là $R = \infty$) thì chuỗi ma trận tương ứng sẽ hội tụ với mọi ma trận vuông X.

Ma trận mà các thành phần là các hàm số ta gọi là ma trận hàm. Đối với nó ta cũng có các khái niệm về đạo hàm và tích phân. Giả sử có ma trận $F(t) = [f_{jk}(t)]$, cấp $m \times n$ và thuộc lớp $C^1(a, b)$, tức là các hàm f_{jk} khả vi liên tục trên (a, b). Đạo hàm của F (t) là ma trận

$$\frac{dF}{dt} = F'(t) = [f'_{jk}(t)]$$

Người ta còn dùng kí hiệu $\frac{dF}{dt} = \dot{F}(t)$

Nếu các ma trận tương ứng có các phép tính thực hiện được thì :

1) $\frac{dC}{dt} = 0$ (ma trận không), trong đó C là ma trận hằng ;

2) $\frac{d}{dt}(F(t) + G(t)) = F'(t) + G'(t)$;

3) $\frac{d}{dt}[CF(t)] = CF'(t)$; $\frac{d}{dt}[F(t) \,.\, C] = F'(t) \,.\, C$ (C– ma trận hằng) ;

4) $\frac{d}{dt}[F(t).G(t)] = F'(t)G(t) + F(t).G'(t)$;

5) $[F^{-1}(t)] = -F^{-1}(t)F'(t).F^{-1}(t)$ (ở đây F(t) là không suy biến).

Nếu $F(t) \in C[a, b]$ thì với $t_o \in [a, b]$ và $t \in [a, b]$ ta định nghĩa

$$\int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau = \left[\int_{t_o}^{t} f_{jk}(\tau)d\tau\right]$$

Ta cũng có các tính chất :

1) Nếu $F(t) = \Phi'(t)$ thì $\int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau = \Phi(t) - \Phi(t_o)$;

2) Nếu C là ma trận hằng thì

$$\int_{t_o}^{t} CF(\tau)d\tau = C\int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau, \quad \int_{t_o}^{t} F(\tau).Cd\tau = \int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau.C$$

3) Nếu $F(\tau)$ và $G(\tau) \in C[t_o, t]$ thì

$$\int_{t_o}^{t} [F(\tau) + G(\tau)]d\tau = \int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau + \int_{t_o}^{t} G(\tau)d\tau \text{ ;}$$

4) Nếu $F(\tau)$ và $G(\tau) \in C^1[t_o, t]$ thì

$$\int_{t_o}^{t} F(\tau)G'(\tau)d\tau = F(t) \,.\, G(t) - F(t_o) \,.\, G(t_o) - \int_{t_o}^{t} F'(\tau)G(\tau)d\tau$$

(công thức tính tích phân từng phần) ;

5) $\left\| \int_{t_o}^{t} F(\tau)d\tau \right\| \leqslant \int_{t_o}^{t} \| F(\tau) \| d\tau$ (3.5)

Ta định nghĩa *hàm e mũ của ma trận X* là hàm

$$e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \quad , \tag{3.6}$$

với $X = [x_{jk}]$ là ma trận vuông cấp n.

Đương nhiên chuỗi (3.6) hội tụ (và thậm chí hội tụ tuyệt đối) đối với mọi ma trận vuông.

Người ta đã chứng minh được các tính chất sau của hàm e mũ :

1) $e^X . e^Y = e^{X+Y}$, nếu $XY = YX$; (3.7)

2) Nếu $\alpha = \max\limits_{q} Re\lambda_q(A)$ thì

$\| e^{At} \| \leqslant Ce^{(\alpha+\varepsilon)t}$ trong đó $C = C(\varepsilon)$ – hằng số dương ; (3.8)

3) $\det e^{At} = e^{tSpA}$ trong đó

$SpA = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{jj}$ là *vết* của ma trận A ;

4) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} . A$ (3.9)

Như vậy ma trận $X(t) = e^{At}$ thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dX}{dt} = AX \text{ và } X(0) = E$$

2. Hệ khả quy

Định nghĩa 2. Ma trận $L(t) \in C^1[t_o, \infty)$ được gọi là *ma trận Liapunốp* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn.

1) $L(t)$ và $\dot{L}(x)$ giới nội trên khoảng $[t_o, \infty)$, tức là

$$\sup_t \| L(t) \| < \infty,$$

$$\sup_t \| \dot{L}(t) \| < \infty \text{ với } t_o \leqslant t < \infty ;$$

2) $|\det L(t)| \geqslant m > 0$, trong đó m là hằng số dương nào đó.

Qua định nghĩa ta thấy rõ ràng rằng $|\det L(t)| \leqslant M < \infty$. Ngoài ra, ma trận nghịch đảo $L^{-1}(t)$ của ma trận Liapunốp $L(t)$ cũng là một ma trận Liapunốp .

Định nghĩa 3. Phép biến đổi tuyến tính

$$Z = L(t)Y \tag{3.10}$$

với $L(t)$ là một ma trận Liapunốp (trong đó Z và Y là các vectơ cột) được gọi là *phép biến đổi Liapunốp*.

Bổ đề. Với phép biến đổi Liapunốp (3.10) được thực hiện trên hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \tag{3.11}$$

các số mũ đặc trưng của các nghiệm của nó vẫn giữ nguyên.

Chứng minh. Từ (3.10) ta có : $Y = L^{-1}(t)Z$

Như vậy

$$\|Z\| \leqslant \|L(t)\| \ \|Y\|$$

$$\|Y\| \leqslant \|L^{-1}(t)\| \ \|Z\|$$

Từ đó, do $\|L(t)\|$ và $\|L^{-1}(t)\|$ bị chặn, ta có

$\chi[Z] = \chi[\,\|Z\|\,] \leqslant \chi[\,\|L(t)\|\,] + \chi[\,\|Y\|\,] = \chi[Y]$ và $\chi[Y] \leqslant \chi[Z]$.

Từ hai bất đẳng thức cuối ta có

$$\chi[Y] = \chi[Z].$$

Định nghĩa 4. Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (3.11) được gọi là *khả quy* nếu với một phép biến đổi Liapunốp nào đó có thể đưa về hệ vi phân tuyến tính với ma trận hằng B :

$$\frac{dZ}{dt} = BZ \tag{3.12}$$

Erughin đã đưa ra điều kiện cần và đủ để một hệ vi phân tuyến tính là khả quy. Cụ thể, ta sẽ chứng minh định lí sau đây :

Định lí 2. *Hệ vi phân tuyến tính (3.11) khả quy khi và chỉ khi một ma trận cơ bản Y(t) nào đó của nó có thể biểu diễn dưới dạng*

$$Y(t) = L(t)e^{tB} \tag{3.13}$$

trong đó L(t) là một ma trận Liapunốp, B là ma trận hằng và t là biến độc lập.

Chứng minh. 1) Trước hết ta chứng minh điều kiện cần của định lí. Giả sử hệ (3.11) là khả quy. Khi đó nhờ phép biến đổi Liapunốp

$$Y = L(t)Z \tag{3.14}$$

có thể biến đổi nó thành hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dZ}{dt} = BZ \tag{3.15}$$

với ma trận hằng B nào đó. Ma trận cơ bản Z = Z(t) của hệ (3.15) thỏa mãn phương trình ma trận

$$\dot{Z} = BZ \tag{3.16}$$

Từ đó ta có

$$Z(t) = e^{tB}.C \tag{3.17}$$

trong đó C là một ma trận hằng không suy biến. Từ (3.14) ma trận cơ bản của hệ (3.11) sẽ có dạng

$$Y(t) = L(t)Z(t) = L(t)e^{tB}.C$$

Lấy C = E ta có công thức (3.13).

2) Bây giờ ta hãy chứng minh điều kiện đủ của định lí. Giả sử ta có (3.13). Từ đó

$$L(t) = Y(t)e^{-tB}$$

Trong hệ (3.11) ta tiến hành phép biến đổi Liapunốp

$$Y = Y(t)e^{-tB}Z$$

Khi đó ta có

$$\frac{dY}{dt} = Y(t)e^{-tB}\frac{dZ}{dt} + \dot{Y}(t)e^{-tB}Z - Y(t)e^{-tB}BZ = A(t)Y(t)e^{-tB}Z \qquad (3.18)$$

Vì

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$$

nên trong công thức (3.18) hai số hạng có thể đơn giản được và ta có

$$Y(t)e^{-tB}\frac{dZ}{dt} = Y(t)e^{-tB}BZ,$$

tức là

$$\frac{dZ}{dt} = BZ$$

Như vậy hệ (3.11) là khả quy.

Từ bổ đề và định lí 2 ta có thể đưa ra điều kiện ổn định và ổn định tiệm cận đối với hệ khả quy như sau :

Định lí 3. 1) *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất khả quy ổn định khi và chỉ khi tất cả các số mũ đặc trưng của nó không âm và các số mũ bằng không là đơn, nếu coi các số mũ đặc trưng đó như là các phần thực của các giá trị riêng của ma trận hằng tương ứng.*

2) *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất khả quy ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các số mũ đặc trưng của nó âm.*

3. Hệ chính quy. Ta vẫn xét hệ vi phân tuyến tính (3.11) với A(t) thực, bị chặn và liên tục trên $[t_o, \infty)$. Giả sử

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} n_k \alpha_k \qquad (3.19)$$

là tổng các số mũ đặc trưng (kể cả số bội) của các nghiệm của hệ (3.11) thuộc một hệ cơ bản chuẩn hóa nào đó của nó.

Định nghĩa 5. Hệ vi phân tuyến tính được gọi là *chính quy theo Liapunốp* nếu tổng các số mũ đặc trưng của nó trùng với giới hạn dưới của giá trị trung bình của phần thực của vết của ma trận của hệ, tức là nếu có đẳng thức

$$\sigma = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t} \operatorname{ReSpA}(t_1)dt_1 \qquad (3.20)$$

Chú ý. Nếu ma trận A(t) là thực thì (3.20) có dạng

$$\sigma = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t} \operatorname{SpA}(t_1)dt_1$$

Liapunốp đã chứng minh định lí sau đây nói lên mối quan hệ giữa tính chính quy và tính khả quy của hệ vi phân tuyến tính.

Định lí 3. *Mọi hệ vi phân tuyến tính khả quy đều là chính quy.*

Chú ý. Điều ngược lại trong định lí 3 thì chưa chắn đã đúng. Sau đây sẽ lấy một ví dụ đơn giản để minh họa.

Ví dụ. Phương trình

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (t > 0)$$

là chính quy vì nghiệm tổng quát của nó là

$$x = Ce^{\sqrt{t}} \qquad (3.21)$$

và khi $C \neq 0$ ta có

$$\chi[x] = 0 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t} \frac{dt}{2\sqrt{t_1}} \quad (t_o > 0)$$

Nhưng phương trình đó không khả quy vì nghiệm tổng quát của nó (3.21) không viết được dưới dạng nêu trong định lí 2, tức là dạng (3.13).

§4. LÍ THUYẾT FLÔKÊ

Ta xét hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \tag{4.1}$$

với ma trận tuần hoàn và liên tục (hoặc liên tục từng khúc) trên $(-\infty, +\infty)$ $A(t)$:

$$A(t + \omega) \equiv A(t) \ (\omega > 0) \tag{4.2}$$

Trong thực tế nhiều phương trình cấp cao với các hệ số tuần hoàn có thể đưa về hệ (4.1). Ta xét hai ví dụ sau đối với phương trình vi phân cấp hai.

Ví dụ 1. Xét phương trình Machia

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta\cos t)x = 0 \tag{4.3}$$

$$(\alpha > 0, |\beta| \leqslant \alpha)$$

ở đây $p(t) = \alpha + \beta$ cost là tuần hoàn với chu kì $\omega = 2\pi$.

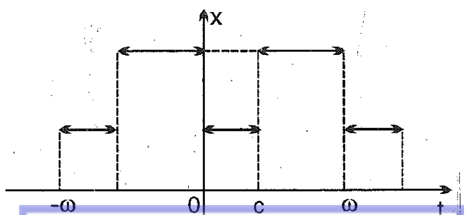
Ví dụ 2. Xét phương trình

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \tag{4.4}$$

trong đó

$$p(t) = \begin{cases} \alpha^2, \text{với } 0 < t < c \\ \beta^2, \text{với } c < t < \omega \\ (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases} \tag{4.5}$$

và $p(t + \omega) = p(t)$ (h. 36).



Hình 36

Nghiệm x = x(t) của (4.4) là các hàm thực lớp $C^1(-\infty, +\infty)$ thỏa mãn (4.4) mọi nơi trừ (có thể) các điểm gián đoạn $k\omega$, $k\omega + c$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) của hệ số p(t).

Cuối cùng ta lưu ý rằng các phương trình (4.3) và (4.4) đều có thể viết thành hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -p(t)x \end{cases}$$

trong đó p(t) là hàm tuần hoàn đã cho, tức là

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}, \text{ như vậy } SpA(t) = 0$$

Ta trở lại hệ (4.1). Đối với hệ đó ta sẽ chứng minh định lí quan trọng sau đây, được gọi là định lí (hoặc lí thuyết) Flôkê.

Định lí. *Đối với hệ (4.1) với ma trận tuần hoàn chu kì ω, ma trận nghiệm cơ bản chuẩn hóa khi t = 0 luôn có dạng*

$$X(t) = \Phi(t)e^{\wedge t} \qquad (4.6)$$

trong đó Φ(t) là ma trận ω− tuần hoàn không suy biến thuộc lớp C^1 *(hoặc trơn từng khúc),* $\Phi(0) = E$ *và* $\wedge$ *là một ma trận hằng.*

Chứng minh. Trước khi chứng minh ta nêu ra đây khái niệm lôgarít của một ma trận : Giả sử X là một ma trận vuông, ma trận Y thỏa mãn điều kiện $e^Y = X$ được gọi là *lôgarít của ma trận X* và kí hiệu như sau :

$$Y = LnX.$$

Ta có thể chứng minh rằng : Mọi ma trận không suy biến đều có lôgarít. Chuyển sang phần chứng minh định lí trên. Giả sử X(t) là ma trận nghiệm cơ bản chuẩn hóa của hệ (4.1), trong đó

$$X(0) = E \qquad (4.7)$$

Khi đó $X(t + \omega)$ cũng là một ma trận cơ bản. Thật vậy theo đồng nhất thức

$$\dot{X}(t) \equiv A(t)X(t)$$

ta có $\frac{1}{dt}\left[X(t+\omega)\right] = \dot{X}(t+\omega).\frac{d}{dt}(t+\omega) = A(t+\omega).X(t+\omega) =$

$$= A(t)X(t+\omega)$$

Như vậy, $X(t+\omega)$ là một ma trận nghiệm cơ bản của (4.1).

Từ đó ta có $\quad X(t+\omega) \equiv X(t).C \qquad (4.8)$

trong đó C là một ma trận hằng không suy biến. Cho $t = 0$ trong (4.8) và lưu ý đến điều kiện (4.7) ta tìm được

$$C = X(\omega)$$

Như vậy : $\quad X(t+\omega) = X(t)X(\omega) \qquad (4.9)$

Ma trận $X(\omega)$ được gọi là *ma trận mônôđrômi*. Hiển nhiên là

$$\det X(\omega) \neq 0.$$

Ta đặt $\quad \frac{1}{\omega}\operatorname{Ln}X(\omega) = \wedge \;; \qquad (4.10)$

từ đó $\quad X(\omega) = e^{\wedge\omega} \qquad (4.11)$

Ta có thể viết đồng nhất thức sau :

$$X(t) \equiv X(t)e^{-\wedge t}.e^{\wedge t} = \Phi(t)\,e^{\wedge t} \qquad (4.12)$$

trong đó $\Phi(t) = X(t)e^{-\wedge t}$. Ta có

$$\Phi(t+\omega) = X(t+\omega)\,e^{-\wedge(t+\omega)} = X(t+\omega)e^{-\wedge t}\,.\,e^{-\wedge\omega}$$

Từ đó và do (4.9) và (4.11) ta được

$$\Phi(t+\omega) = X(t)e^{\wedge\omega}e^{-\wedge\omega}\,.\,e^{-\wedge t} = X(t)e^{-\wedge t} = \Phi(t)$$

tức là ma trận $\Phi(t)$ là tuần hoàn với chu kì ω. Ngoài ra, nếu $A(t) \in C\,(-\infty, \infty)$ thì từ (4.12) ta rút ra

$$\Phi(t) = X(t)e^{-\wedge t} \in C^1\,(-\infty, +\infty) \text{ và}$$

$$\Phi(0) = E \text{ và } \det\Phi(t) = \det X(t)\det e^{-\wedge t} \neq 0.$$

Định lí được chứng minh hoàn toàn.

Sau đây ta đưa ra một số khái niệm sẽ sử dụng trong các định lí mà ta sẽ không đi sâu vào việc chứng minh.

Định nghĩa 1. Các giá trị riêng λ_j của ma trận $\wedge$, tức là nghiệm của phương trình

$$\det(\wedge - \lambda E) = 0,$$

được gọi là *các số mũ đặc trưng của hệ (4.1).*

Ta cần lưu ý hai điều sau :

1) Ma trận $\wedge$ không được xác định một cách chặt chẽ bởi vì $\mathrm{Ln}X(\omega)$ là đa trị ;

2) Số mũ đặc trưng của hệ vi phân tuyến tính tuần hoàn không đồng nhất với số mũ đặc trưng Liapunốp của các nghiệm không tầm thường của hệ đó.

Định nghĩa 2. Các giá trị riêng ρ_j ($j = 1, 2, ..., n$) của ma trận $C = X(\omega)$, tức là các nghiệm của phương trình

$$\det[X(\omega) - \rho E] = 0 \tag{4.13}$$

được gọi là *các nhân tử.*

Từ (4.13) ta có thể rút ra

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j = \mathrm{Sp}X(\omega) \text{ và } \prod_{j=1}^{n} \rho_j = \det X(\omega)$$

Ngoài ra ta có

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega}\mathrm{Ln}\rho_j = \frac{1}{\omega}\Big[\ln|\rho_j| + i(\arg\rho_j + 2k\pi)\Big] \tag{4.14}$$
$$(j = 1, 2, ..., n ; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

trong đó số nguyên k được chọn một cách hợp lí. Vì vậy cả số mũ đặc trưng được xác định chính xác đến các số hạng ảo $\dfrac{2k\pi i}{\omega}$.

Định lí 2. *Với mọi nhân tử ρ tồn tại một nghiệm không tầm thường $\xi(t)$ của hệ tuần hoàn (4.1), thỏa mãn điều kiện*

$$\xi(t + \omega) = \rho\xi(t) \tag{4.15}$$

Ngược lại, nếu đối với một nghiệm $\xi(t)$ không tầm thường nào đó điều kiện (4.15) được thỏa mãn thì số ρ sẽ là nhân tử của hệ đã cho.

Chứng minh. 1) Ta chọn vectơ ban đầu $\xi(0)$ là vectơ riêng của ma trận mônôđrômi $X(\omega)$ ứng với giá trị riêng ρ. Ta có

$$X(\omega)\xi(0) = \rho\xi(0) \text{ và}$$

$$\xi(t) = X(t)\xi(0)$$

Từ đó $\xi(t + \omega) = X(t + \omega)\xi(0) = X(t)X(\omega)\xi(0)$

$$= X(t).\rho\xi(0) = \rho\xi(t),$$

như vậy (4.15) được thỏa mãn.

2) Ngược lại, giả sử đối với một nghiệm không tầm thường $\xi(t) = X(t)\xi(0)$ nào đó ta có đẳng thức (4.15). Khi đó từ (4.15) và cho $t = 0$ ta được

$$\xi(\omega) = \rho\xi(0)$$

tức là $$X(\omega)\xi(0) = \xi(\omega) = \rho\xi(0)$$

Như vậy $\xi(0)$ là một vectơ riêng của ma trận mônôđrômi $X(\omega)$, còn số ρ là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det[X(\omega) - \rho E] = 0$$

cũng có nghĩa là ρ là một nhân tử.

Hệ quả. Hệ vi phân tuyến tính tuần hoàn (4.1) có nghiệm tuần hoàn chu kì ω khi và chỉ khi có ít nhất một nhân tử ρ của nó bằng 1.

Định lí 3. *Hệ vi phân tuyến tính với ma trận liên tục và tuần hoàn sẽ khả quy.*

Chứng minh. Theo công thức (4.6) ma trận nghiệm chuẩn hóa của hệ tuần hoàn (4.1) có dạng

$$X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$$

trong đó $\Phi(t) \in C^1(-\infty, \infty)$ và $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)$

Do tính tuần hoàn, nên $\Phi(t)$ và $\Phi(t)$ bị chặn trên $(-\infty, \infty)$. Ngoài ra, vì

$$\Phi(t) = X(t)e^{-\wedge t}$$

và $X(t)$ là không suy biến nên $\Phi(t)$ cũng không suy biến. Vì $\Phi(t)$ tuần hoàn nên

$$\inf_{t} |\det\Phi(t)| > 0 \text{ với } -\infty < t < +\infty$$

Như vậy $\Phi(t)$ là một ma trận Liapunốp. Theo định lí 2, §3 (định lí Êrughin), hệ (4.1) là khả quy. Định lí được chứng minh.

Nếu trong (4.1) tiến hành phép đổi biến

$$X = \Phi(t)Y \equiv X(t)e^{-\wedge t}Y$$

thì ta có
$$\frac{dY}{dt} = \wedge Y \tag{4.16}$$

Như vậy, các số mũ đặc trưng λ_j là các nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận của hệ (4.16). Từ đó ta có các điều kiện sau về tính ổn định của hệ tuần hoàn.

Định lí 4. 1) *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tuần hoàn với ma trận liên tục sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các nhân tử ρ_j của nó nằm trong hình tròn đơn vị đóng $|\rho| \leqslant 1$ và các nhân tử nằm trên đường tròn $|\rho| = 1$ đều có ước cơ bản đơn.*

2) *Hệ tuần hoàn ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nhân tử của nó đều nằm trong hình tròn $|\rho| < 1$.*

Dĩ nhiên ở đây ta coi các nhân tử là các giá trị riêng của ma trận mônôđrômi tương ứng.

Đối với hệ tuần hoàn không thuần nhất

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t) \tag{4.17}$$

trong đó $A(t)$ và $F(t)$ là các $(n \times n)$ và $(n \times 1)$ ma trận với chu kì $\omega (\omega > 0)$ ta có các định lí sau (không chứng minh) :

Định lí 5. *Nếu hệ tuần hoàn thuần nhất tương ứng của* (4.17)

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

không có nghiệm tầm thường ω − tuần hoàn, tức là tất cả các nhân tử của nó khác 1 ($\rho_j \neq 1$), thì hệ (4.17) có nghiệm tuần hoàn duy nhất với chu kì ω.

Định lí 6. *Nếu hệ (4.17) có một nghiệm giới nội $\tilde{Y}(t)$ $(t \geqslant 0)$, thì nó có nghiệm ω – tuần hoàn.*

§5. ỔN ĐỊNH THEO XẤP XỈ THỨ NHẤT

Trong §5 cuối cùng này của chương ta nghiên cứu tính ổn định của một số hệ phương trình vi phân phi tuyến. Ta sẽ đưa ra hai định lí (không chứng minh) nhằm nghiên cứu tính ổn định của một số hệ dạng đặc biệt.

Giả sử ta có hệ phương trình vi phân

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (5.1)$$

trong đó f_i là các hàm khả vi trong lân cận gốc tọa độ, $f_i(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0$.

Ta nghiên cứu tính ổn định của điểm cân bằng $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ của hệ (5.1). Ta biểu diễn hệ (5.1) trong lân cận gốc tọa độ dưới dạng

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, ..., n), \quad (5.2)$$

trong đó R_i có bậc cao hơn 1 so với $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, tức là về thực chất ta khai triển các vế phải của (5.1) theo công thức Taylo theo $x = (x_1, ..., x_n)$ tại lân cận gốc tọa độ. Thay vì điểm cân bằng của hệ (5.1) ta nghiên cứu tính ổn định cũng của điểm cân bằng đó đối với hệ tuyến tính

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (5.3)$$

mà ta gọi là *hệ phương trình xấp xỉ thứ nhất* đối với hệ (5.1). Để đơn giản ta chỉ giới hạn trường hợp khi các hệ số $a_{ij}(t)$ trong

(5.3) là các hằng số. Trong trường hợp này ta nói hệ (5.2) ả dừng theo xấp xỉ thứ nhất.

Định lí 1. *Nếu*

1) *Hệ (5.2) ả dừng theo xấp xỉ thứ nhất ;*

2) *Tất cả các số hạng R_i bị chặn theo t và khai triển được thành chuỗi lũy thừa đối với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong một miền $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$ và tất cả các khai triển đều bắt đầu từ các số hạng không thấp hơn bậc hai ;*

3) *Tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

đều có các phần thực âm ;

thì nghiệm tầm thường $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) của hệ (5.2) và hệ (5.3) là ổn định tiệm cận, tức là trong trường hợp này có thể nghiên cứu tính ổn định theo xấp xỉ thứ nhất.

Định lí 2. *Nếu*

1) *Hệ phương trình (5.2) ả dừng theo xấp xỉ thứ nhất ;*

2) *Tất cả các hàm R_i thỏa mãn các điều kiện của định lí 1 ;*

3) *Có ít nhất một nghiệm của phương trình đặc trưng (5.4) có phần thực dương ;*

thì điểm cân bằng $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) của hệ (5.2) và (5.3) là không ổn định, tức là trong trường hợp này cũng có thể nghiên cứu tính ổn định theo xấp xỉ thứ nhất.

Qua hai định lí trên ta cần lưu ý rằng, nếu các phần thực của tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng (5.4) không dương và phần thực của ít nhất một nghiệm bằng không thì việc nghiên cứu tính ổn định theo xấp xỉ thứ nhất nói chung là không thể được (vì trong trường hợp này còn có tác động của các số hạng phi tuyến R_i).

Ví dụ 1. Xét tính ổn định của điểm cân bằng $x = 0$, $y = 0$ đối với hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 5x^3 - y^4 \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^6 \end{cases}$$

Giải. Ta thấy các số hạng phi tuyến ($5x^3 - y^4$ và $11y^6$) thỏa mãn các điều kiện của định lí 1 và 2. Ta hãy nghiên cứu tính ổn định của điểm cân bằng của hệ xấp xỉ thứ nhất

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

có các nghiệm $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ đều âm. Do đó theo định lí 1, điểm cân bằng của hệ đã cho và hệ xấp xỉ thứ nhất là ổn định tiệm cận.

Ví dụ 2. Xét tính ổn định theo xấp xỉ thứ nhất của điểm cân bằng $x = 0$, $y = 0$ đối với hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3 \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2 \end{cases} \qquad (5.5)$$

Giải. Trước hết ta tìm hệ phương trình xấp xỉ thứ nhất đối với (5.5). Theo công thức Macloranh ta có

$\sin x = x - \dfrac{\sin\theta_1}{2} x^2$, trong đó θ_1 là số nằm giữa 0 và x ;

$\sin y = y - \dfrac{\sin\theta_2}{2} y^2$, trong đó θ_2 là số nằm giữa 0 và y.

Thay hai biểu thức cuối cùng vào (5.5) ta được hệ :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 29y - 5\sin\theta_1 x^2 + 3y^3 \\ \dot{y} = 5x - 14y + (7\sin\theta_2 + 1)y^2 \end{cases} \qquad (5.6)$$

Lưu ý rằng (5.5) và (5.6) là một hệ với cách viết khác nhau.

Các số hạng phi tuyến của (5.6) thỏa mãn các điều kiện của định lí 1 và 2. Ta có hệ xấp xỉ thứ nhất đối với (5.5) là

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 29y \\ \dot{y} = 5x - 14y \end{cases} \tag{5.7}$$

Phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -29 \\ 5 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ hoặc}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i$$

Như vậy, theo định lí 1, điểm (0, 0) của (5.5) và (5.7) ổn định tiệm cận.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Chứng minh rằng

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\varphi(t) - \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\psi(t) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}[\varphi(t) - \psi(t)] \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\varphi(t) - \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\psi(t),$$

với giả thiết rằng $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ xác định và bị chặn trên khoảng (t_o, ∞)

2. Chứng minh rằng nếu hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y,$$

trong đó $A(t) \in C(t_o, \infty)$, ổn định và khả quy thì nó ổn định đều.

3. Chứng minh rằng hệ vi phân tuyến tính

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (t \geqslant 1)$$

với ma trận $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix}$ là không khả quy.

4. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

trong đó $f(t) \in C(-\infty, +\infty)$ và $f(t + \omega) \equiv f(t)$, có nghiệm tổng quát tuần hoàn chu kì ω khi và chỉ khi

$$\int_0^{\omega} f(t)dt = 0$$

5. Nghiên cứu tính ổn định theo xấp xỉ thứ nhất đối với các điểm cân bằng $x = 0$, $y = 0$ trong các hệ vi phân sau :

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2 \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5 \\ \dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4 \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2 \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin t \\ \dot{y} = x + y - y^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \dfrac{7}{2}\sin y - 3x^2 \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

5. 1) Không ổn định, nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ xấp xỉ thứ nhất là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ (có 1 nghiệm dương).

2) Ổn định tiệm cận. Có hệ xấp xỉ thứ nhất là

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y \end{cases}$$

với $\lambda_1 = -\dfrac{5}{2}$; $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.

3) Không ổn định ($\lambda_1 = 1 + \sqrt{6}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{6}$).

4) Ổn định tiệm cận ($\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$).

5) Không ổn định ($\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$).

6) Ổn định tiệm cận. Hệ xấp xỉ thứ nhất là

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$$

có $$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2} .$$

7) Ổn định tiệm cận $\left(\lambda_{1,2} = -\dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8) Không thể nghiên cứu theo xấp xỉ thứ nhất vì hệ xấp xỉ thứ nhất có các nghiệm đặc trưng là $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Nhờ hàm Liapunốp (chương III) $v = 3x^2 + 4y^2$ sẽ thấy điểm (0, 0) là ổn định tiệm cận.

Chương III

PHƯƠNG PHÁP THỨ 2 LIAPUNỐP

Trong chương này đối với các hệ trong không gian thực chúng ta sẽ nghiên cứu tính ổn định của chúng bằng phương pháp thứ 2 Liapunốp (hay còn gọi là phương pháp hàm Liapunốp), một phương pháp cũng được áp dụng nhiều trong việc nghiên cứu định tính các hệ vi phân, nhất là các hệ phi tuyến mà ở đó khó có thể áp dụng phương pháp số mũ đặc trưng.

§1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

1. Hệ quy đổi. Giả sử cho một hệ vi phân phi tuyến thực

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{1.1}$$

trong đó
$$\frac{dY}{dt} = \mathrm{colon}\left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \ldots, \frac{dy_n}{dt}\right) ;$$

$F(t, Y) = \mathrm{colon}(f_1(t, y_1, \ldots, y_n), f_2(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n))$ thỏa mãn điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ của (1.1) với điều kiện ban đầu thuộc $\Omega = \{a < t < \infty, (y_1, \ldots, y_n) \in K\}$ (a là một số hoặc $-\infty$, K là tập mở của không gian $\mathbf{R}^n$) . Ta sẽ chỉ giới hạn xét các nghiệm thực của (1.1).

Giả sử $Z = Z(t)$ $(t_o \leqslant t < \infty,\ t_o > a)$ là một nghiệm của hệ (1.1) (chuyển động không có nhiễu) mà ta phải xét tính ổn định của nó và H là lân cận của nghiệm này sao cho $U_H(Z(t)) \subset K$

với $t \in [t_o, +\infty)$, trong đó

$$U_H(Z(t)) = \{t_o \leqslant t < +\infty \ , \ \|Y - Z(t)\| < H < \infty\}$$

Giả sử ta đặt

$$X = Y - Z(t) \qquad (1.2)$$

Bởi vì $\dot{Z}(t) \equiv F(t, Z(t))$ nên đối với X ta có hệ phương trình vi phân

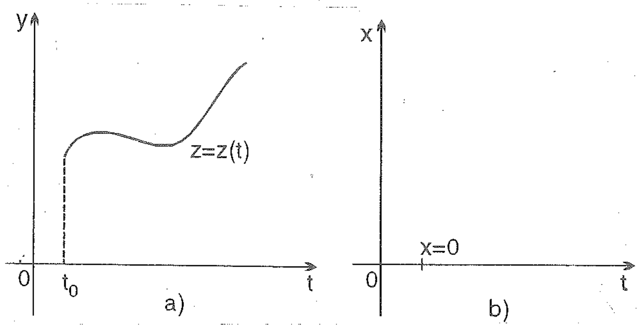
$$\frac{dX}{dt} = G(t, X), \qquad (1.3)$$

trong đó $\qquad G(t, X) = F(t, X + Z(t)) - F(t, Z(t)),$

ngoài ra, rõ ràng $\qquad G(t, 0) \equiv 0.$

Như vậy, hệ (1.3) có nghiệm tầm thường $X \equiv 0$. Nghiệm này trong không gian R^n_y tương ứng với nghiệm $Z = Z(t)$ đã cho (h. 37, a, b)).

Hệ (1.3) được gọi là hệ *quy đổi* (Liapunốp gọi hệ đó là hệ phương trình chuyển động có nhiễu).



Hình 37

Như vậy việc nghiên cứu tính ổn định của một nghiệm $Z = Z(t)$ trong không gian R^n_Y (không gian n chiều của biến Y) có thể đưa về việc nghiên cứu tính ổn định của nghiệm tầm thường (*vị trí cân bằng*) $X = 0$ trong không gian R^n_X (không gian n chiều của biến X).

2. Các hàm có dấu xác định

Xét hàm số

$$v = v(t, X)$$

liên tục theo t và theo $x_1, \ldots, x_n$ trong miền Z_o, trong đó $Z_o = \{a < t < \infty \ , \ \|X\| < h\}$.

Ta sẽ đưa ra các định nghĩa cơ bản về các hàm có dấu xác định và có dấu không đổi.

Định nghĩa 1. Hàm thực hiện liên tục v(t, X) được gọi là *có dấu không đổi (dấu dương* hoặc *dấu âm)* trong Z_o nếu

$$v(t, X) \geqslant 0 \text{ (hoặc } v(t, X) \leqslant 0)$$

với $(t, X) \in Z_o$.

Định nghĩa 2. Hàm v(t, X) được gọi là *xác định dương* trong Z_o nếu tồn tại hàm $\omega(X) \in C\ (\|X\| < h\ )$ sao cho

$$v(t, X) \geqslant \omega(X) > 0 \text{ với } \|X\| \neq 0 \qquad (1.4)$$

Tương tự, hàm v(t, X) được gọi là xác định âm trong Z_o nếu tồn tại hàm $\omega(X) \in C(\|X\| < h)$ sao cho

$$v(t, X) \leqslant \omega(X) < 0 \text{ với } \|X\| \neq 0$$

và $$v(t, X) = \omega(0) = 0 \qquad (1.4)$$

Hàm xác định dương hoặc xác định âm được gọi là hàm *có dấu xác định*. Đôi khi $\omega(X)$ có thể lấy

$$\omega(X) = \inf_t |v(t, X)|$$

Đặc biệt, v = v(X) là hàm có dấu xác định nếu $(-1)^\alpha v(X) > 0$ với $\|X\| \neq 0$ và X(0) = 0, trong đó đối với hàm xác định dương $\alpha = 0$, còn đối với hàm xác định âm $\alpha = 1$.

Ví dụ. Trong không gian thực $\mathbb{R}^n$ hệ toạ độ Oxy hàm số

$$v = x^2 + y^2 - 2\alpha xy\cos t$$

với $|\alpha| < 1$ là xác định dương vì

$v(t, x, y) \geqslant x^2 + y^2 - 2|\alpha||x||y| \geqslant (1 - |\alpha|)(x^2 + y^2) =$
$= \omega(x, y) > 0$ với $x^2 + y^2 > 0$; $v = 0$ khi $x = y = 0$.

Với $|\alpha| = 1$ hàm v chỉ là hàm có dấu dương.

Định nghĩa 3. Hàm v (t, X) được gọi là hàm *có giới hạn vô cùng bé bậc cao* khi $X \to 0$ nếu với $t_o > a$ nào đó ta có $v(t, X) \underset{\tau}{\overset{\to}{\to}} 0$ trên $[t_o, \infty)$ khi $X \to 0$, tức là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|v(t, X)| < \varepsilon \tag{1.5}$$

khi $\|X\| < \delta$ và $t \in [t_o, \infty)$.

Từ bất đẳng thức (1.5) có thể kết luận rằng hàm v (t, X) có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi $X \to 0$ sẽ bị chặn trong một bán trụ nào đó

$$t_o \leqslant t < \infty, \ \|X\| < h.$$

Cần lưu ý rằng nếu hàm v (X) liên tục, không phụ thuộc vào thời gian t và $v(0) = 0$ thì v (X) sẽ có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi $X \to 0$.

Ví dụ. 1) Hàm $v = x^2 + y^2 - 2\alpha xy\cos t$ với $|\alpha| < 1$ có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.

2) Hàm $v = \sin^2[t(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)]$ không có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + ... + x_n^2} \to 0$ mặc dù nó bị chặn và $\to 0$ khi $\|X\| \to 0$.

§2. TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN NGHIỆM

Trước khi đưa ra các kết quả cơ bản của phương pháp thứ hai Liapunốp, ta hãy đưa ra một định nghĩa quan trọng, đó là định nghĩa đạo hàm trong nghĩa của hệ.

Giả sử G(t, X) liên tục theo t và có các đạo hàm riêng liên tục theo $x_1, x_2, ..., x_n$ trong một miền T ($T = \{a < t < \infty, ||X|| < H\}$) và

$$\frac{dX}{dt} = G(t,X) \qquad (2.1)$$

là một hệ vi phân quy đổi, tức là $G(t, 0) \equiv 0$ và từ đó rõ ràng hệ (2.1) có nghiệm tầm thường $X \equiv 0$.

Giả sử $v = v(t, X) \in C^{(1,1)}_{tx}(T_o)$ (khả vi liên tục theo các biến $t, x_1, x_2, ..., x_n$ trong $T_o = \{a < t < \infty ; ||X|| \leqslant h < H\} \subset T$) và

$G(t, X) = \text{colon}[G_1(t, x_1, ..., x_n), ..., G_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)]$

Định nghĩa. Hàm số

$$\dot{v}(t, X) = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} . G_j(t, X) \qquad (2.2)$$

được gọi là *đạo hàm* (toàn phần) *theo t của hàm v(t, X) trong nghĩa của hệ (2.1).*

Nếu $X = X(t)$ là một nghiệm của hệ (2.1) thì $\dot{v}(t, X)$ chính là đạo hàm toàn phần theo t của hàm hợp $v(t, X(t))$, tức là

$$\dot{v}(t, X) = \frac{d}{dt} v(t, X(t))$$

Định lí thứ nhất Liapunốp. *Nếu đối với hệ quy đổi (2.1) tồn tại một hàm xác định dương*

$$v(t, X) \in C^{(1,1)}_{tX}(T_o)\ (T_o \subset T)$$

có đạo hàm dấu âm $\dot{v}(t, X)$ *theo t trong nghĩa của hệ,thì nghiệm tầm thường* $X \equiv 0$ $(a < t < \infty)$ *của hệ đã cho ổn định theo Liapunốp khi* $t \to +\infty$.

Chứng minh. Theo điều kiện của định lí thì có một hàm liên tục xác định dương $\omega(X)$ sao cho

$$v(t, X) \geqslant \omega(X) > 0 \text{ với } X \neq 0 \qquad (2.3)$$

và $$v(t,\ 0) = \omega(0) = 0$$

Trong không gian $\mathbb{R}^n_x$ xét mặt cầu S_ε

$$\|X\| = \varepsilon \tag{2.4}$$

hoàn toàn bị chứa trong T_o, trong đó $0 < \varepsilon \leqslant h < H$.

Vì mặt cầu S_ε là một tập compắc và hàm ω (X) liên tục và dương trên S_ε cho nên (theo định lí Vâyơxtras) cận dưới của hàm đó sẽ đạt được tại một điểm $X^* \in S_\varepsilon$ nào đó, vì vậy

$$\inf_{X \in S_\varepsilon} \omega(X) = \omega(X^*) = \alpha > 0 \tag{2.5}$$

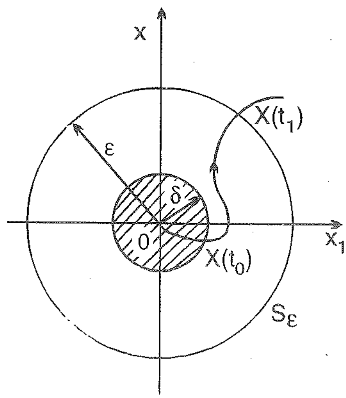
Giả sử $t_o \in (a, +\infty)$ là tùy ý. Hàm $v(t_o, X)$ liên tục theo X và $v(t_o, 0) = 0$. Do đó tồn tại một lân cận $\|X\| < \delta < \varepsilon$ sao cho $0 \leqslant v(t_o, X) < \alpha$ với

$$\|X\| < \delta \tag{2.6}$$

Bây giờ ta xét một nghiệm không tầm thường bất kì

$$X = X(t) \tag{2.7}$$

với điều kiện ban đầu $\|X(t_o)\| < \delta$ (h. 38).



Hình 38

Ta hãy chứng minh rằng quỹ đạo của nghiệm này hoàn toàn nằm bên trong mặt cầu S_ε, tức là

$$\|X(t)\| < \varepsilon \text{ với } t_o \leqslant t < \infty \tag{2.8}$$

Thật vậy, khi $t = t_o$ ta có

$$\|X(t_o)\| < \delta < \varepsilon$$

Giả sử bất đẳng thức (2.8) thỏa mãn không phải với mọi $t \leqslant [t_o, +\infty)$ và t_1 là điểm đầu tiên nghiệm X(t) gặp biên S_ε, tức là $\|X(t)\| < \varepsilon$ với $t_o \leqslant t < t_1$ và $\|X(t_1)\| = \varepsilon$. Hãy xét sự biến động của hàm $v(t) = v(t, X(t))$ dọc theo nghiệm $X(t)$. Từ điều kiện của định lí

$$\dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} \leqslant 0$$

nên hàm $v(t)$ là không tăng. Do đó từ (2.6) và (2.5) ta có

$$\alpha > v(t_o, X(t_o)) \geqslant v(t_1, X(t_1)) \geqslant \omega(X(t_1)) \geqslant \alpha,$$

điều này là phi lí.

Như vậy, nghiệm $X = X(t)$ với mọi $t \in [t_o, \infty)$ hữu hạn luôn luôn ở bên trong mặt cầu S_ε và bởi vì $\varepsilon < H$ nên nghiệm này xác định với $t_o \leqslant t < \infty$ (kéo dài vô hạn về phía phải) và

$$\|X(t)\| < \varepsilon \text{ với } t_o \leqslant t < \infty,$$

nếu $\|X(t_o)\| < \delta$. Điều đó có nghĩa là nghiệm tầm thường $X \equiv 0$ ổn định theo Liapunốp khi $t \to +\infty$.

Hệ quả. Nếu đối với hệ vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (A(t) \in C[t_o, \infty))$$

tồn tại hàm xác định dương $v(t, X)$ có đạo hàm trong nghĩa của hệ $\dot{v}(t, X) \leqslant 0$ thì tất cả các nghiệm $X(t)$ của hệ đó xác định và bị chặn trên nửa trục $[t_o, \infty)$.

Ví dụ. Xét tính ổn định của nghiệm tầm thường của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

Giải. Chọn hàm $v(t, x, y) = x^2 + 2y^2$. Rõ ràng hàm đó là xác định dương.

Đạo hàm của hàm này theo t trong nghĩa của hệ là

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x.(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2)$$

$$= -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leqslant 0 \text{ với } x, y \text{ đủ bé.}$$

Ta thấy rằng tất cả các điều kiện của định lí trên được thỏa mãn, vì vậy nghiệm tầm thường $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ của hệ đã cho là ổn định.

Chú ý. Trong định lí thứ nhất Liapunốp có thể thay tính xác định dương của hàm $v(t, X)$ bằng tính xác định âm, nhưng khi đó đòi hỏi $\dot{v}(t, X)$ phải là hàm dấu dương. Việc chứng minh hoàn toàn tương tự.

Định lí thứ hai Liapunốp. *Giả sử đối với hệ quy đổi (2.1) tồn tại một hàm xác định dương* $v(t, X) \in C^{(1,1)}_{tX}(T_o)$ *có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi* $X \to 0$ *và có đạo hàm theo t xác định âm* $\dot{v}(t,X)$ *trong nghĩa của hệ đó. Khi đó nghiệm tầm thường* $X \equiv 0$ *của hệ ổn định tiệm cận khi* $t \to +\infty$.

Ta thừa nhận, không chứng minh định lí này. Có thể xem phần chứng minh trong [4].

Hệ quả. Nếu đối với hệ vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

tồn tại hàm xác định dương $v(t, X)$ thỏa mãn các điều kiện trong định lí thứ hai của Liapunốp thì mọi nghiệm của hệ đó đều ổn định tiệm cận toàn cục.

Chú ý. Trong định lí trên ta có thể thay điều kiện xác định dương của hàm $v(t, X)$ bằng điều kiện xác định âm, nhưng khi đó phải có điều kiện xác định dương đối với $\dot{v}(t, X)$.

Ví dụ. Xét tính ổn định của nghiệm tầm thường đối với hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3 \end{cases}$$

Giải. Hàm $v = x^2 + y^2$ thỏa mãn các điều kiện của định lí 2 Liapunốp. Thật vậy : $v(x, y) \geq 0$ và $v(0, 0) = 0$;

$$\frac{dv}{dt} = 2x \cdot (-5y - 2x^3) + 2y(5y - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0$$

và $\quad \frac{dv}{dt} = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

§3. TÍNH KHÔNG ỔN ĐỊNH NGHIỆM

1. Định lí thứ 3 Liapunốp. *Giả sử đối với hệ quy đổi (2.1) tồn tại hàm* $v(t, X) \in C^{(1,1)}_{tX}(T_o)$ *có giới hạn vô cùng bé bậc cao khi* $X \to 0$ *và có đạo hàm với dấu xác định* $\dot{v}(t, X)$ *theo t trong nghĩa của hệ. Nếu với một* $t_o > a$ *nào đó trong lân cận bất kì* $\|X\| < \Delta \leq h < H$ *tồn tại điểm* (t_o, X_o) *sao cho dấu của hàm* $v(t, X)$ *trùng với dấu của đạo hàm* $\dot{v}(t, X)$, *tức là sao cho*

$$v(t_o, X_o) \cdot \dot{v}(t_o, X_o) > 0 \qquad (3.1)$$

thì nghiệm tầm thường $X \equiv 0$ *của hệ (2.1) không ổn định theo Liapunốp khi* $t \to +\infty$.

Ta không chứng minh định lí này vì việc chứng minh cũng hoàn toàn tương tự như việc chứng minh định lí sau (cũng về tính không ổn định nghiệm) mà ta sẽ tiến hành. Trước hết, trong định lí trên đòi hỏi đạo hàm $\dot{v}(t, X)$ trong nghĩa của hệ phải có dấu dương trong một lân cận *toàn phần* của gốc tốc độ O. Thực sự ra, điều kiện đó có thể giảm nhẹ đáng kể, nó được thể hiện ở định lí tổng quát sau.

2. Định lí 1 Tshetaép. *Giả sử đối với hệ quy đổi (2.1) trong miền* $T = \{t_o \leq t < +\infty, \|X\| \leq h < H\}$ *tồn tại một hàm khả vi liên tục v(t, X) với miền dương* $E = \{(t, X) \in T, v(t, X) > 0\}$, *miền E có thiết diện mở khác không* D_t *dính với gốc tọa độ O đối với mỗi* $t \in [t_o, \infty)$; *ngoài ra trên phần biên của miền E* *nằm về phía trong hình trụ T (bao gồm cả trục Ot) đẳng thức sau được thỏa mãn (nếu v xác định dương thì phần của biên đó quy về một điểm duy nhất là gốc tọa độ)*

$$v(t, X\ ) = 0$$

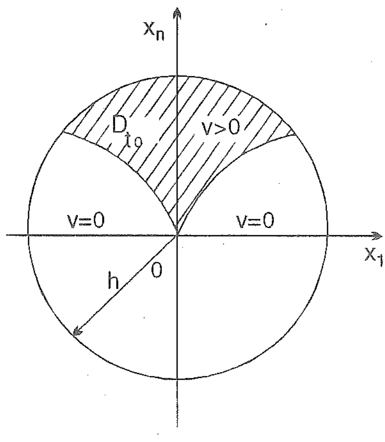
Khi đó, nếu : 1) *Hàm v(t, X) bị chặn trong miền E ;*

2) *Hàm v (t, X) trong miền E có đạo hàm* $\dot{v}(t, X)$ *trong nghĩa của hệ (2.1) dương ;*

3) *Trong mỗi miền con* $\{v(t, X) \geqslant \alpha > 0\}$ *thỏa mãn bất đẳng thức* $\dot{v}(t, X) \geqslant \beta > 0$, *trong đó* $\beta = \beta(\alpha)$ *là số dương phụ thuộc vào* α,

thì nghiệm tầm thường của hệ (2.1) không ổn định theo Liapunốp khi $t \to \infty$.

Chứng minh. Giả sử $\delta > 0$ bé tùy ý. Vì điểm O là điểm biên đối với thiết diện mở $D_{t_0} = D$ nên trong siêu phẳng $t = t_o$ tồn tại điểm $X_o \in D$ sao cho $0 < \|X_o\| < \delta < h$, ngoài ra $v(t_o, X_o) = \alpha > 0$ (h. 39).



Hình 39

Ta hãy chứng minh rằng nghiệm X (t) xác định với điều kiện ban đầu $X(t_o) = X_o$ khi t tăng dần sẽ rời khỏi hình cầu $\|X\| < h$ khi $t \geqslant t_o$. Do điều kiện 2) của định lí

$\dot{v}(t, X(t)) > 0$ khi $v(t, X(t)) > 0$; từ đó khi $t \geqslant t_o$ ta có

$$v(t, X(t)) \geqslant v(t_o, X(t_o)) = \alpha \tag{3.2}$$

khi $v(t, X(t)) > 0$. Vì nghiệm X (t) có thể rời khỏi miền E chỉ khi vượt qua phần trong của biên ở một thời điểm $t_1 > t_o$ nào đó, mà ở đó $v(t_1, X(t_1)) = 0$, ngoài ra

$$v(t, X(t)) \geqslant \alpha > 0 \text{ khi } t_o \leqslant t < t_1,$$

cho nên ta có (chuyển qua giới hạn khi $t \to t_1 - 0$ trong bất đẳng thức trên)

$$v(t_1), X(t_1)) \geqslant \alpha > 0,$$

điều không thể xảy ra được. Như vậy, nghiệm $X(t)$ khi $t \geqslant t_o$ hoàn toàn nằm trong miền con $\{v(t, X) \geqslant \alpha > 0\}$ của E. Từ đó theo điều kiện 3) của định lí, ta được

$$\dot{v}(t, X)(t)) \geqslant \beta > 0 \qquad (3.3)$$

Lấy tích phân từng vế đối với bất đẳng thức (3.3) với $t \geqslant t_o$ ta có

$$v(t, X(t)) \geqslant v(t_o, X(t_o)) + \beta(t - t_o) \qquad (3.4)$$

Bất đẳng thức (3.4) không thể xảy ra vì theo điều kiện 1) của định lí thì hàm $v(t, X)$ bị chặn trong miền E.

Như vậy, trong lân cận δ bất kì của điểm O khi $t = t_o$ tồn tại một nghiệm $X(t)$ sẽ rời khỏi phía trong của hình cầu $||X|| < h$ khi $t \to +\infty$. Điều đó chứng tỏ rằng nghiệm tầm thường $X \equiv 0$ không ổn định theo Liapunốp.

Ví dụ. Xét tính ổn định của nghiệm tầm thường đối với hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x \end{cases}$$

Giải. Xét hàm $v = \dfrac{1}{3}x^3 + xy + \dfrac{1}{3}y^3$

Ở đây miền $E = \{(t, x, y) \in T, x > 0, y > 0\}$. Vì trong E hàm v là xác định dương, nên phần của biên cần xét là gốc tọa độ (0, 0), và tại đó $v(0, 0) = 0$. Trong E hàm v rõ ràng bị chặn. Ngoài ra trong E

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0$$

Như vậy, theo định lí Tshetaép nghiệm $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ không ổn định.

§4. SƠ LƯỢC VỀ ĐIỀU KIỆN CẦN

Trong ba § trên ta đã đưa ra các điều kiện đủ để một hệ vi phân là ổn định, ổn định tiệm cận hoặc không ổn định, tức là tương ứng tìm được các hàm v(t, X) thỏa mãn các điều kiện nhất định. Thường người ta tìm các hàm không phụ thuộc vào t và việc tính đạo hàm của nó trong nghĩa của hệ là đơn giản. Các hàm v(t, X) thỏa mãn các điều kiện của các định lí thứ nhất, thứ 2 và thứ 3 Liapunốp được gọi tương ứng là các *hàm Liapunốp* loại 1, loại 2 và loại 3. Một vấn đề đặt ra là xác định những điều kiện cầu của các định lí trên. Đến nay có nhiều công trình giải quyết vấn đề này. Các bạn đọc có thể xem [3], [4]. Ta sẽ đưa ra đây một kết quả trong lĩnh vực này, không chứng minh nó chi tiết mà chỉ nêu ra cách xây dựng hàm v(t, X).

Định lí Pecxítski. Giả sử hệ quy đổi

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X) \quad (G(t, 0) \equiv 0) \qquad (4.1)$$

trong đó $G(t, X) \in C^{(1, 1)}_{tX}$ $(t_o \leqslant t < \infty, \|X\| < H < \infty)$,

có nghiệm tầm thường $X \equiv 0$ ổn định theo Liapunốp khi $t \to +\infty$. Khi đó đối với hệ (4.1) trong miền

$$t_o \leqslant t < +\infty, \|X\| < h < H$$

tồn tại một hàm Liapunốp $v(t, X) \in C^{(1,1)}_{tX}$ loại 1, tức là hàm này thỏa mãn các điều kiện của định lí thứ nhất Liapunốp và ổn định.

Để xây dựng hàm v(t, X) người ta xét một hệ phụ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{4.2}$$

trong đó $F(t, Y) = G(t, Y).\varphi(Y)$ và $\varphi(Y) \in C^1(\mathbb{R}^n_Y)$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1 \text{ khi } \|Y\| \leqslant h \\ 0 \text{ khi } \|Y\| \geqslant H \end{cases} \tag{4.3}$$

Giả sử $X(t, t_o, X_o)$ và $Y(t ; t_o ; Y_o)$ tương ứng là các nghiệm của các hệ (4.1) và (4.2) được xác định bởi các điều kiện ban đầu $X(t ; t_o ; X_o) = X_o$ và $Y(t ; t_o ; Y_o) = Y_o$. Từ (4.3) ta thấy nghiệm $Y(t ; t_o ; Y_o)$ được xác định trên nửa trục $t_o \leqslant t < \infty$ và thỏa mãn tính duy nhất.

Cố định t_o và xét hàm

$$v(t, X) = (1 + e^t)\, \|Y(t_o ; t, X)\|^2$$

$$(t \geqslant t_o, \; \|X\| < H) \tag{4.4}$$

trong đó chuẩn của vectơ $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ là chuẩn Ơclit

$$\|Y\| = (Y, Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

Người ta chứng minh được rằng hàm v (t, X) là hàm Liapunốp loại 1 (xem [5]).

BÀI TẬP CHƯƠNG III

Xét tính ổn định của nghiệm tầm thường đối với các hệ sau :

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - 3xy^2 - \dfrac{1}{4}x^3 \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{3}x - y - 2y^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3 \\ \dot{y} = -x - 7y^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3 \\ \dot{y} = \dfrac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = yx^4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4 \\ \dot{y} = y - x^2y^3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} - 2y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - 4y^3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}xy^2 \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{4}y + 3xz^3 \\ \dot{z} = -\dfrac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases}$

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. Ổn định tiệm cận (xét hàm $v = x^2 + 3y^2$).
2. Ổn định tiệm cận (xét hàm $v = x^2 + y^2$).
3. Ổn định tiệm cận (xét hàm $v = x^2 + 3y^2$).
4. Ổn định (xét hàm $v = x^4 + y^4$).
5. Không ổn định (xét hàm $v = x^2 - y^2$).

6. Không ổn định (xét hàm $v = x^4 - y^4$).

7. Ổn định tiệm cận (xét hàm $v = 3x^2 + 2y^2$).

8. Ổn định tiệm cận (xét hàm $v = x^2 + 2y^2 + 3z^2$).

CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hoàng Hữu Đường – Võ Đức Tôn – Nguyễn Thế Hoàn. Phương trình vi phân T 1, 2, Hà Nội, NXB ĐH và THCN, 1970

[2] Nguyễn Thế Hoàn – Trần Văn Nhung, Bài tập phương trình vi phân, Hà Nội, NXB ĐH và THCN, 1979

[3] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, гостехиздат, 1950

[4] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", 1967

[5] Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения, "Наука", 1964

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Giám đốc công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội

PHAN KẾ THÁI

Biên tập lần đầu:

NGUYỄN TRỌNG BÁ

Biên tập tái bản:

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Trình bày bìa :

TẠ TRỌNG TRÍ

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN CÔNG TY CP DVXB GIÁO DỤC HÀ NỘI

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH

Mã số: 7K375h4-DAI

Số đăng kí KHXB : 118 - 2014/CXB/ 104- 21/GD.

In 700 cuốn (QĐ in số : 59), khổ 14,5 x 20,5 cm.

In tại Công ty CP in và vật tư Hải Dương.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2014.

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC - BỘ MÔN TOÁN CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

1. **Giải tích hàm**	Nguyễn Xuân Liêm
2. **Bài tập giải tích hàm**	Nguyễn Xuân Liêm
3. **Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân**	Nguyễn Xuân Liêm
4. **Giải tích (2 tập)**	Nguyễn Xuân Liêm
5. **Toán học cao cấp (3 tập)**	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
6. **Bài tập toán học cao cấp (3 tập)**	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
7. **Đại số đại cương**	Nguyễn Hữu Việt Hưng
8. **Số đại số**	Hoàng Xuân Sính
9. **Hình học vi phân**	Đoàn Quỳnh
10. **Giải tích số**	Nguyễn Minh Chương (Chủ biên)
11. **Phương trình đạo hàm riêng**	Nguyễn Minh Chương
12. **Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định**	Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phu
13. **Mở đầu lí thuyết xác suất và ứng dụng**	Đặng Hùng Thắng
14. **Bài tập xác suất**	Đặng Hùng Thắng
15. **Lí thuyết xác suất**	Nguyễn Duy Tiến - Vũ Viết Yên
16. **Xác xuất thống kê**	Nguyễn Văn Hộ

Bạn đọc có thể mua sách và đồ dùng dạy học tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội :	45 Phố Vọng ; 187, 187C Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 25 Hàn Thuyên ; 51 Lò Đúc ; 45 Hàng Chuối ; Ngõ 385 Hoàng Quốc Việt ; 17T2 - 17T3, Trung Hoà - Nhân Chính ; Toà nhà HESCO Văn Quán - Hà Đông.
– Tại TP. Đà Nẵng :	78 Pasteur ; 145 Lê Lợi ; 223 Lê Đình Lý.
– Tại TP. Hồ Chí Minh :	2A Đinh Tiên Hoàng, quận 1 ; 231 NguyễnVăn Cừ, quận 5 ; 116 Đinh Tiên Hoàng, phường 1, quận Bình Thạnh ; 63 Vĩnh Viễn, phường 2, quận 10.
– Tại TP. Cần Thơ :	162D Đường 3/2, phường Xuân Khánh, quận Ninh Kiều.

– Tại Website bán hàng trực tuyến : www.sach24.vn

Website : www.nxbgd.vn

ISBN : 978-604-0-03836-4
9786040038364

Giá : 52.000 đ